S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 499–508 (2008) УДК 519.53
MSC 28B05

НЕПРЕРЫВНЫЕ МЕРЫ

Л. Я. САВЕЛЬЕВ

Abstract. We consider the binary algebra $(B, +, \cdot)$ and abel semigroup $(H, +)$ with neutral 0-elements and with topologies ensuring a continuity of additive and multiplicative transfers. Let A – subalgebra of algebra B. We shall name an additive and continuous mapping $m : A \to H$ as an abstract measure. One of fundamental tasks of the general measure theory is an investigation of existance conditions of a continuous extention $\bar{m} : \bar{A} \to H$ of measure $m : A \to H$ to its definition domain closure $\bar{A}$. A number of author works mentioned in literature is dedicated to solving this problem. There is their brief review fnd some new results described in the article. These results are connected with extentions of a vector measure to an integral sum and the last one to an integral.

Keywords: measure, integral, continuity, topology.

1. Непрерывное продолжение меры

В статье [1] рассматривается булево кольцо B, его подкольцо A и топологическая абелева группа H. Топология для B определяется фильтром окрестностей нуля в H и мерой $m : A \to H$. При некоторых предположениях о мере m эта топология согласуется со структурой кольца B и делает меру равномерно непрерывной. Эго позволяет применить к ней общую теорему о непрерывном продолжении отображений. В рамках одной модели подробно

Savelyev, L.Ya., Continuous measures.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана РФФИ (грант 06-01-00422), Советом по грантам президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ 7157.2006.1), Междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН (2006-48).

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 26 ноября 2008 г.

рассматриваются конечно и счетно аддитивные числовые и булевы меры. Соответственно получаются *жордановы и лебеговы продолжения*.

В статье [2] описываются общие свойства секвенциальной порядковой (*борелевской*) топологии для булевых колец множеств и мер, являющихся непрерывными отображениями подколец этих колец в регулярные абелевы полугруппы. Сформулированы общие условия существования непрерывных продолжений мер. Доказано, что для числовых мер борелевская непрерывность эквивалентна счетной аддитивности и ограниченности, а для булевых – счетной аддитивности. В общем случае при борелевской топологии непрерывны только переносы, а не операции. Доказано, что числовые и булевы меры продолжаются с колец на их замыкания, совпадающие с порожденными сигма – кольцами.

Статья [3] посвящена условиям продолжимости *векторных мер*, определенных на кольце множеств с борелевской топологией и принимающих значения в локально выпуклом пространстве.Композиции с линейными функционалами векторных мер являются скалярными мерами. Полунормы позволяют определить вариации векторной меры. Выделяются классы A, B, C, E, V счетно-аддитивных, ограниченных, непрерывных, продолжимых, имеющих ограниченные вариации мер. Доказывается, что $V \subseteq C \subseteq E \subseteq A \subseteq B$. Приводятся следствия для различных частных случаев. Если пространство значений меры конечномерно, то $V = C = E = A = B$. Если оно монтелево или слабо секвенциально полное банахово, то $A = B$. Приводится пример $A \neq B$. Отмечается возможность переноса части результатов на булевы кольца с некоторыми другими топологиями и меры со значениями в абелевых полугруппах.

В приложении "Непрерывные меры"к книге [4] рассматриваются *меры на полутопологических булевых кольцах*, принимающие значения в абелевых полугруппах. Полутопологическим называется кольцо с топологией, при которой аддитивный и мультипликативный переносы непрерывны. Выделяются топологии, порождаемые секвенциальными пределами, удовлетворяющими условиям Фреше и Урысона. Рассматриваются секвенциально непрерывные и топологически непрерывные меры. Рассматриваются порядковый, монотонный и исчерпывающий секвенциальные пределы и порождаемые ими топологии. Доказываются теоремы о секвенциальном и топологическом продолжениях непрерывных мер соответственно на секвенциальное и топологическое замыкания области определения.

В статье [5] подробно описываются свойства топологических булевых колец с частично непрерывными операциями. Рассматриваются меры со значениями в равномерных абелевых полугруппах. Доказывается, что непрерывная в точке 0 мера сходится в каждой точке замыкания области определения. Это позволяет сформулировать теоремы о непрерывных продолжениях мер, обобщающие полученные раньше. Выделяются секвенциальные топологии, при которых каждое секвенциально замкнутое множество топологически замкнуто. Доказываются теоремы о топологическом и секвенциальном продолжениях меры. Основной результат о непрерывном продолжении меры формулируется следующим образом:

Пусть m – непрерывная мера на подалгебре A топологической булевой алгебры C, принимающая значения в полной отделимой абелевой полугруппе

H. Существует единственная непрерывная мера $\bar{m}$ на замыкании $\bar{A}$ алгебры A, принимающая значения в H и продолжающая m.

Аналогичное предложение верно для мер, непрерывных при секвенциальной топологии и принимающих значения в секвенциально полной отделимой абелевой полугруппе:

Пусть m – непрерывная при секвенциальной топологии мера на подалгебре A топологической булевой алгебры C, принимающая значения в секвенциально полной отделимой абелевой полугруппе H. Существует единственная непрерывная мера $\bar{m}$ на секвенциальном замыкании $\bar{A}$ алгебры A, принимающая значения в H и продолжающая m.

Статья [6] посвящена мерам, непрерывным при общей порядковой топологии, определяемой порядково сходящимися *направленностями* для класса всех частей данного множества. Эти меры называются *вполне непрерывными*. Доказывается, что вполне непрерывные меры дискретны и исчерпываемы, а исчерпываемость эквивалентна существованию плотности, удовлетворяющей условию Коши. Рассматриваются меры, принимающие значения в частично равномерных абелевых полугруппах. Доказывается относительная компактность образа вполне непрерывной меры. Описываются ее атомические представления. Доказывается теорема о существовании и единственности секвенциального продолжения вполне непрерывной меры. Выделяется групповая компонента полугрупповой меры.

В статье [7] рассматриваются *индуктивные пределы направленностей* непрерывных абстрактных мер. Описываются индуктивные пределы топологических булевых алгебр и колец. Формулируются критерии замкнутости, отделимости и сходимости. Выделяются секвенциальные топологии. Описывается непрерывное присоединение единицы. Доказывается, что индуктивный предел возрастающей направленности непрерывных мер является непрерывнои мерой. Доказываются теоремы о топологическом и секвенциальном продолжениях индуктивного предела непрерывных мер. Формулируются следствия для векторных мер со значениями в банаховом пространстве со свойством Радона-Никодима.

В заметке [8] доказываются две теоремы о непрерывных продолжениях аддитивных на ортогональных парах элементов отображений топологических орторешеток в топологические полугруппы. Предлагается общее определение отношения ортогональности для решетки с нулем и операцией вычитания. Рассматриваются топологические орторешетки и частично равномерные топологические абелевы полугруппы. Доказываются теоремы о продолжении непрерывной меры на топологическое и секвенциальное замыкания ортоподрешетки, являющейся областью определения данной меры.

В препринте [9] и статье [10] описываются *абстрактные внешние меры*. Внешней мерой называется функция, обладающая свойством: если элементы достаточно малы, то их сумма имеет произвольно малое значение. это свойство обобщает классическое неравенство треугольника. Внешняя мера определяется на подалгебре булевой алгебры и принимает значения в топологическом пространстве с выбранной нулевой точкой. Фильтр окрестностей этой точки служит шкалой для измерения малости значений функции. Для разных классов абстрактных внешних мер доказано существование продолжений, сохраняющих класс. Сформулированы условия единственности продолжения.

Из теорем о внешних мерах получены следствия для абстрактных мер. Доказано в частности, что классическое условие счетной аддитивности меры можно заменить условием непрерывности меры при некоторой локально выпуклой топологии.

Выделяются следующие результаты. Пусть E – непустое множество, R – некоторое кольцо его *измеримых* частей, $S = \{Y \subseteq E : YR \subseteq R\}$, F – отделимое локально выпуклое пространство, $m : R \to F$ – счетно-аддитивная мера, $n : S \to F$ – счетно-аддитивное продолжение меры m. Мера m, для которой такое продолжение n существует, называется *наследственно продолжимой*. Мера m, которая сходится по определяемому включением возрастающему направлению для R, называется *замкнутой*. Мера m, которая каждый отрезок $[0, X] \subseteq R$ отображает в ограниченное множество, называется *локально ограниченной*. Замкнутость меры эквивалентна ее непрерывности при определяемой мерой внешней топологии. Существует тесная связь между наследственной продолжимостью меры, ее исчерпываемостью и ее суммируемостью на дизъюнктивных последовательностях измеримых множеств. Основной результат о наследственной продолжимости меры формулируется следующим образом:

Если F полное, то замкнутая мера m наследственно продолжима. Если F специальное секвенциально полное или слабо полное, то наследственная продолжимость меры m эквивалентна ее локальной ограниченности.

В статье [11] рассматриваются решетки с инволютивными начальными дополнениями. Для них определяются операция вычитания и отношение ортогональности. Описываются алгебраические свойства получающихся дифференциальных орторешеток и мер, являющихся ортоаддитивными монотонными операторами на этих решетках. Доказывается теорема об условиях их корректной продолжимости.

В заметке [12] и книге [13] рассматривается общее пространство с мерой. Так называется тройка (C, B, m), составленная из спектрального множества C, базового класса B линейно свободных множеств элементов модуля E и аддитивного на каждом базовом множестве $B \subseteq C$ отображения $m : C \to F$ множества C в модуль F (*меры*). Эта конструкция объединяет классические (коммутативные) и квантовые (некоммутативные) пространства с мерами. Выделяются меры на множествах индикаторов и на множествах проекторов, объединяемых свойством идемпотентности. Общая модель позволяет объединить классический и квантовый случаи, рассматриваемые в теоретической физике [14]. Из определений следует, что рассматриваемая мера является линейным отображением. Она линейно продолжается до интегральной суммы на линейную оболочку своей области определения. В случае, когда для рассматриваемых модулей определены топологии, при которых скалярные и векторные операции непрерывны, выделяются непрерывные меры. Формулируются критерий непрерывности интегральной суммы, порождаемой непрерывной мерой и теорема о непрерывном продолжении интегральной суммы до регулярного интеграла на замыкании ее области определения.

2. Меры и интегральные суммы

Рассмотрим векторные пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ с ассоциативными, коммутативными, имеющими общую единицу 1 скалярными кольцами. Предполагается, что $\mathbb{K}$ есть подкольцо кольца $\mathbb{L}$. Выберем непустой наследственный класс $\mathcal{B}$ линейно свободных множеств $B \subseteq E$. Наследственность $\mathcal{B}$ означает, что вместе с множеством B класс $\mathcal{B}$ содержит все его части: $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{B}$. Назовем $\mathcal{B}$ *базовым классом* или *мультибазой*, а множества $B \in \mathcal{B}$ – *базовыми* множествами или просто *базами*. Выберем также множество $C \subseteq E$ такое, что для каждого конечного $X \subseteq C$ существует база $B \subseteq C$, аддитивная оболочка $A(B)$ которой содержит X. Это значит, что каждый вектор из X равен сумме некоторых векторов из B: по определению $A(B)$ состоит из всех конечных сумм элементов B. Назовем множество C *спектральным* по $\mathcal{B}$ или просто *спектром*. Возьмем отображение $m : C \to F$, аддитивное на каждой конечной базе $B \subseteq C$, сумма векторов которой принадлежит C. Назовем m *мерой*. Тройку $(C, \mathcal{B}, m)$ будем называть *пространством с мерой*.

Рассмотрим: поле $\mathbb{P}$, кольцо $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ всех последовательностей элементов $\mathbb{P}$, его подкольцо $\mathcal{A}$, идеал $\mathcal{I}$ в $\mathcal{A}$, фактор-кольцо $\mathbb{K} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$, множество U, кольцо $E = \mathcal{F}(U, \mathbb{K})$ всех функций $x : U \to \mathbb{K}$, алгебру $(\mathbb{K}, E)$. Векторами алгебры $(\mathbb{K}, E)$ являются скалярные функции x, а скалярами – фактор-множества последовательностей элементов поля $\mathbb{P}$. Обозначим через P множество всех индикаторов, определенных на U. Будем отождествлять множества в U с их индикаторами: $\mathcal{P}(U) = P \subseteq E$. Ортогональность индикаторов означает дизъюнктность соответствующих множеств. Семейства попарно ортогональных векторов будем называть *ортосемействами*. Порядок для множеств определяет порядок для индикаторов. Говорят, что множество Q индикаторов образует *полукольцо*, если:

$$(a)\ 0 \in Q, \qquad (b)\ xy \in Q \quad (x, y \in Q), \qquad (c)\ y - x = \sum z_k \quad (x \leqslant y)$$

для некоторого конечного ортосемейства векторов $z_k \in Q$. При этом возможно, что $y - x \notin Q$. Так как $x \leqslant y$ эквивалентно $xy = x$ и $z_j z_k = 0$ $(j \neq k)$, то

$$0 = x - x = x(y - x) = \sum x z_k \Rightarrow x z_k = 0,$$

и поэтому условие (c) эквивалентно равенству

$$(c1)\ y = x + \sum z_k, \quad x z_k = z_j z_k = 0 \quad (j \neq k).$$

Оно означает, что каждый индикатор $y \in Q$, больший индикатора $x \in Q$, равен сумме некоторых попарно ортогональных индикаторов из Q, одним из которых является x.

Возьмем: класс $\mathcal{B} = \mathcal{R}$ всех линейно свободных ортомножеств в E, полукольцо $C = Q$ индикаторов множеств в U, векторное пространство $(\mathbb{K}, F)$ и *ортоаддитивную* функцию $m : Q \to F$. Ортоаддитивность m означает, что

$$m\Big(\sum b\Big) = \sum m(b) \quad (b \in B)$$

для каждой базы $B \subseteq Q$ такой, что $\sum b \in Q$. Если поле P бесконечно, то для конечного семейства индикаторов $x_i \in Q$ верно $\sum x_i \in Q$ тогда и только тогда, когда индикаторы x_i попарно ортогональны. В этом случае ортоаддитивность функции m эквивалентна ее обычной аддитивности. Здесь рассматриваются только бесконечные поля. Если в смешанном произведении вектора на скаляр нет делителей нуля, то ортомножество линейно свободно тогда и только тогда, когда ему не принадлежит нулевой вектор.

Часто бывает полезен алгоритм ортогонализации последовательности индикаторов. Рассмотрим последовательность индикаторов $x_i \in Q$ и определяемую ею последовательность индикаторов

$$y_j = x_j - \left(\bigcup_{i<j} x_i \right) x_j \in P.$$

(В скобках верхняя грань индикаторов x_i.) Верны [13, 3.1.3] следующие утверждения. *Для всех номеров j, k, n верны соотношения*

$$y_j \leqslant x_j, \qquad y_j y_k = 0 \quad (j \neq k), \qquad \sum_{j \leqslant n} y_j = \bigcup_{i<j} x_i.$$

Для каждых индикатора $y \in Q$ и ортосемейства $u_i \in Q$, $u_i \leqslant y$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ существует ортосемейство индикаторов $v_j \in Q$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ такое, что $u_i v_j = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ и

$$y = \sum u_i + \sum v_j.$$

Основной результат формулируется следующим образом:

Полукольцо индикаторов Q является спектральным множеством по ортогональной мультибазе $\mathcal{R}$.

Полукольцо индикаторов Q, ортогональная мультибаза $\mathcal{R}$ и ортоаддитивная функция $m : Q \to F$ составляют пространство с мерой $(Q, \mathcal{R}, m)$.

Выбирая подходящим образом поле $\mathbb{P}$, кольцо $\mathcal{A}$, идеал $\mathcal{I}$ и группу F можно получить определенные на классах множеств меры с вещественными, инфинитезимальными, p-адическими, векторными и операторными значениями .

Рассмотрим векторные пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ и некоторое множество S линейно независимых векторов из E. Класс $\mathcal{B} = \mathcal{K}(S)$ всех конечных частей множества S является мультибазой в E. Объединение $A = A(S) = \cup A(B)$ $(B \in \mathcal{K}(S))$ назовем *аддитивной оболочкой* множества S. Она содержится в линейной оболочке $L = L(S) = \cup L(B)$ $(B \in \mathcal{K}(S))$ множества S. Ясно, что аддитивная оболочка $A = A(B)$ есть спектральное множество по $\mathcal{K}(S)$.

Сужение $m = T|A$ на A линейного оператора $T : L \to F$ является мерой: аддитивность m на $B \in \mathcal{K}(S)$ следует из линейности T. Класс $\mathcal{B} = \mathcal{K}(S)$, множество $A(S)$ и сужение $m = T|A$ составляют пространство с мерой $(A(S), \mathcal{K}(S), T|A)$. Каждый линейный оператор порождает некоторое семейство мер. Интегрирование связано с обратным процессом: порождением семейством мер некоторого линейного оператора.

Рассмотрим поле $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, комплексное гильбертово пространство H и алгебру $E = \mathcal{L}(H)$ ограниченных линейных операторов $x : H \to H$. Отождествление каждого подпространства $X \subseteq H$ с эрмитовым проектором $p : H \to X$ позволяет отождествить класс $\mathcal{P} = \mathcal{P}(H)$ подпространств пространства H с множеством $P = P(H) \subseteq E$ эрмитовых проекторов на эти подпространства. Для эрмитовых проекторов отношение ортогональности определяется равенствами $pq = qp = 0$. Ортогональность ненулевых проекторов влечет их линейную независимость. Поэтому класс $\mathcal{R}$ всех ортомножеств $B \subseteq P$ из ненулевых проекторов – базовый. Назовем $\mathcal{R}$ *ортогональной проекторной мультибазой.* Возьмем некоторое ортомножество $R \in \mathcal{R}$, составленное из проекторов конечного ранга, и его аддитивную оболочку $A = A(R) = \cup A(B)$ $(B \in \mathcal{K}(R))$. Она является спектральным множеством по $\mathcal{B} = \mathcal{K}(R)$ и тем более по $\mathcal{R}$. Размерность $d(p) = \dim p(H)$ образа $p(H)$ проектора $P \in R$ определяет меру $d : A \to R$. Класс $\mathcal{K}(R)$, множество $A(R)$ и мера d составляют пространство с мерой $(A(R), \mathcal{K}(R), d)$.

Заметим, что индикаторы и проекторы объединяет их идемпотентность. Можно рассматривать общую модель с алгеброй E и множеством P ее идемпотентов. Если для E определена инволюция, то можно взять эрмитовы идемпотенты. В теории возможностей [15], построенной по аналогии с теорией вероятностей, используется порядковая шкала и суммой считается максимум, а произведением – минимум. Индикаторы множеств заменяются произвольными функциями со значениями в отрезке $[0, 1]$.

При данных определениях спектральная аддитивность меры $m : C \to F$ эквивалентна ее линейности. Обычно линейные операторы определяются на подпространствах рассматриваемого пространства. Спектральное множество C, на котором определена мера m, может не быть подпространством пространства . Но тем не менее в соответствии с общими определениями аддитивности, однородности и линейности, *мера является линейным отображением.* спектрального множества $C \subseteq F$ в векторное пространство F.

Линейность меры позволяет продолжить ее на линейную оболочку $S = L(C)$. Эта оболочка состоит из линейных комбинаций $u = \sum \alpha(x)x$ $(x \in C)$ с финитными $\alpha : C \to \mathbb{K}$. Назовем векторы $u \in S$ *простыми.* Равенство

$$s(u) = \{\sum \alpha(x)m(x) : u = \sum \alpha(x)x\}$$

определяет соответствие $s : S \to F$. Назовем $s : S \to F$ *интеградьной суммой* по мере m. Из общего принципа линейного продолжения следует, что

Интегральная сумма $s : S \to F$ является единственным линейным отображением S в F, продолжающим меру $m : C \to F$.

Подчеркнем, что в отличие от меры интегральная сумма определена на векторном пространстве и к ней применимы все общие теоремы для линейных операторов. Поэтому часто предпочтительнее вместо мер рассматривать интегральные суммы.

3. Интегралы

Непрерывное продолжение интегральной суммы до интеграла – самый трудный шаг при его определении. Трудность заключается в выборе подходящих условий для меры, обеспечивающих такое продолжение. Сделаем ряд упрощающих предположений. Предположим, что скалярные кольца $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ являются полями и для $\mathbb{K}, \mathbb{L}, E, F$ определены топологии, при которых операции со скалярами и векторами непрерывны. В топологических векторных пространствах $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ замыкание подпространств вследствие непрерывности переносов являются подпространствами. Непрерывность линейного оператора эквивалентна его непрерывности в точке 0. Это позволяет сформулировать следующий общий критерий непрерывности интегральной суммы. Интегральная сумма s по мере m непрерывна тогда и только тогда, когда для каждой окрестности V точки $0 \in F$ существует окрестность U точки $0 \in E$ такая, что

$$\sum \alpha(e)m(e) \in V \quad \text{при} \quad \sum \alpha(e)e \in U \quad (e \in B, B \in \mathcal{B}, B \subseteq C).$$

Этот критерий дает возможность в некоторых случаях выделять меры, интегральные суммы по которым непрерывны. Вместо топологий для пространств E и F можно рассматривать топологии для некоторых их подпространств, содержащих соответственно S и $m(S)$.

Непрерывность линейных операторов в топологических векторных пространствах равномерна. При некоторых предположениях равномерно непрерывное отображение можно продолжать на замыкание области определения. Предположим дополнительно, что пространство F отделимое и полное. Это влечет его регулярность и обеспечивает существование и единственность непрерывного продолжения $t : T \to F$ непрерывной интегральной суммы $s : S \to F$ на замыкание T ее области определения S. Значения t определяются равенством

$$t(f) = \lim s(u) \qquad (u \to f, u \in S).$$

Оператор t линеен вместе с s. Будем называть оператор t *регулярным интегралом* по мере m. Функции $f \in T$ назовем *регулярно интегрируемыми* по мере m.

Пусть выполнено сформулированное условие непрерывности и интегральная сумма s непрерывна в точке 0, а векторное пространство F отделимое и полное. Тогда верно следующее предложение о существовании и единственности регулярного интеграла по мере m:

Равенство $t(f) = \lim s(u)$ $(u \to f,\ u \in S)$ определяет единственный непрерывный линейный оператор $t : T \to F$, продолжающий меру $m : C \to F$.

Переход от множеств к индикаторам, простым и интегрируемым функциям, а от булевых операций к действиям с функциями, вместе с переходом от мер к интегральным суммам и интегралам позволяет широко использовать методы математического и функционального анализа. Это часто бывает удобно и эффективно. Точно так же целесообразно переходить от подпространств к проекторам и линейным операторам, используя развитую для них теорию.

Применение изложенной теории иллюстрируют два примера продолжения меры до интеграла.

(1)Пусть: $\mathbb{K} = \mathbb{L} = F = \mathbb{R}$, E – нормированное пространство ограниченных вещественных функций на отрезке $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, C – полукольцо индикаторов интервалов в $[a, b]$. Линейная оболочка S множества C состоит из ступенчатых функций на $[a, b]$. Будем называть их простыми. Замыканием T множества S в пространстве E служит множество функций на $[a, b]$, не имеющих сложных разрывов (имеющих в каждой точке отрезка $[a, b]$ пределы слева и справа с естественной оговоркой насчет концов a, b). Эти функции являются пределами равномерно сходящихся последовательностей простых функций. Будем называть их *равномерно измеримыми*. Мерами, интегральными суммами и интегралами в рассматриваемом примере являются *ограниченные линейные функционалы* соответственно на C, S и T. Выделяются *интегралы Римана и Стилтьеса* для рассматриваемых функций. Подробное описание различных классов равномерно измеримых функций и подробные доказательства сформулированных утверждений есть в [17], где рассматриваются функции на расширенной вещественной прямой.

(2) Рассмотрим: множество X, алгебру $\mathcal{R}$ некоторых частей X, комплексное гильбертово пространство H, алгебру $\mathcal{P}$ проекторов $H \to H$. Множества из $\mathcal{R}$ будем называть *простыми.* Будем предполагать, что существует возрастающая последовательность проекторов, сходящаяся к единице. Проекторной *мерой* называется сильно непрерывная снизу в единице аддитивное отображение $P : \mathcal{R} \to \mathcal{P}$. Проекторная мера не только аддитивна, но и мультипликативна. По аналогии с числовой определяется проекторная *функция распределения.* Проекторная мера по линейности продолжается до проекторной *интегральной суммы* на пространство S простых функций $u : X \to \mathbb{C}$. Она является ограниченным линейнам оператором на $\mathcal{S}$. И вместе с проекторной мерой обладает свойством мультипликативности. Проекторная мера порождает семейство числовых мер, которые определяют пространство $\mathcal{M}$ ограниченных *измеримых функций* по проекторной мере. Непрерывное продолжение интегральной суммы дает интеграл по проекторной мере, который является всюду определенным ограниченным нормальным оператором на $\mathcal{M}$. Он вместе с проекторной интегральной суммой обладает свойством мультипликативности. Проекторный интеграл для неограниченных измеримых функций является неограниченным плотно определенным нормальным оператором в $\mathcal{M}$. Проекторные меры и определяемые ими интегралы подробно рассматриваются в посвященном спектральной теореме пункте 4.9 книги [13]. В главе 14 книги [18] описываются некоммутативные интегралы.

Новые результаты автора, содержащиеся в данном обзоре, опубликованы в монографии [19].

Список литературы

[1] Савельев Л.Я., *Продолжение мер по непрерывности*, Сиб. мат. ж., **5**: 3 (1964), 639–650.

[2] Савельев Л.Я., *О порядковых топологиях и непрерывных мерах*, Сиб. мат. ж., **6**: 6 (1965), 1357–1364.

[3] Савельев Л.Я., *Некоторые условия продолжимости векторных мер*, Сиб. мат. ж., **9**: 4 (1968), 940–950.

[4] Савельев Л.Я., *Лекции по математическому анализу, часть 4*, Новосибирск, НГУ, 1975.

[5] Савельев Л.Я., *Продолжение непрерывных мер*, Сиб. мат. ж., **20**: 5 (1979), 1082–1091.

[6] Недогибченко Г.В., Савельев Л.Я., *Вполне непрерывные меры*, Сиб. мат. ж., **22**: 6 (1981), 126–141.

[7] Недогибченко Г.В., Савельев Л.Я., *Индуктивные пределы направленностей мер*, Труды ИМ СОАН, Новосибирск, **1** (1982), 168–179.

[8] Савельев Л.Я., *Меры на орторешетках*, ДАН, **264**: 5 (1982), 1091–1094.

[9] Савельев Л.Я., *Абстрактные внешние меры*, Институт математики СОАН, препринт 22, 1983.

[10] Савельев Л.Я., *Внешние меры и топологии*, Сиб. мат. ж., **24**: 2 (1983), 133–149.

[11] Савельев Л.Я., *Операторы на дифференциальных решетках*, Вестник НГУ, серия «Математика, механика, информатика», **2**: 3 (2002), 26–43.

[12] Савельев Л.Я., *Пространства с мерами*, Докл. РАН, **357**: 3 (1997), 310–312.

[13] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я., *Теория операторов и некорректные задачи*, Новосибирск, Институт Математики, 1999.

[14] Эмх Ж., *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля*, Москва, Мир, 1976.

[15] Пытьев Ю.П., *Возможность. Элементы теории и применения*, Эдиториал УРСС, Москва, 2000.
[16] Бурбаки Н., *Алгебра*, Физматгиз, Москва, 1962.
[17] Савельев Л.Я., *Интегрирование равномерно измеримых функций*, Новосибирск, НГУ, 1984.
[18] Segal I.E., Kunze R.A., *Integrals and Operators*, Springer – Verlag, Berlin, 1978.
[19] M.M. Lavrent'ev, L.J. Savel'ev, *Operator Theory and Ill-Posed Problems*, Netherlands, Brill Academic Publishers, Martinus Nijhoff Publishers and VSP, Leiden-Boston, 2006, P. 680.

Лев Яковлевич Савельев
Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: savelev@math.nsc.ru