S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 483–498 (2008) УДК 517.958, 519.63, 535.3
MSC 45K05, 85A25, 35Q60, 65N21

ЗАДАЧИ РЕНТГЕНОВСКОЙ И ОПТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

А. Е. КОВТАНЮК, В. М. МУН, В. Г. НАЗАРОВ, И. В. ПРОХОРОВ, И. П. ЯРОВЕНКО

Abstract. The problems of X-ray and optical tomography have been considered in the review. A method for determination of a substance chemical composition based on the use of X-ray irradiation results has been proposed. The solution uniqueness for the problem of the attenuation coefficient determination for the vector transfer equation under a special external radiation source has been shown. The problems of determination of the refraction indices and optical thicknesses for a layered medium have been studied. A computer verification of the proposed numerical algorithms has been carried out.

Keywords: radiation transfer theory, inverse problems, tomography.

Введение

В обзоре представлены некоторые результаты работ [5,14–20], полученные сотрудниками лаборатории Вычислительных методов математической физики Института прикладной математики ДВО РАН в рамках междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №48. Научные исследования, проведенные коллективом, в основном касались теории обратных задач для уравнения переноса излучения и их условно можно разделить на три группы. Первое направление исследований связано с проблемой, определения химического состава вещества по данным рентгеновского просвечивания. Второе направление посвящено задачам рентгеновской томографии для векторного уравнения переноса, учитывающего поляризацию излучения. И

Kovtanyuk, A.E., Mun, V.M., Nazarov, V.G., Prokhorov, I.V., Yarovenko, I.P., X-ray and optical tomography problems.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 48.

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 26 ноября 2008 г.

третья группа, объединяет в себя исследования обратных задач для уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения, описывающих отражение и преломление света на границе раздела сред. Учет последнего эффекта позволяет трактовать эти обратные задачи, как задачи оптической томографии в мутных средах.

1. Определение химического состава вещества рентгеноскопическим методом

Определение химического состава вещества неоднородного трехмерного тела радиографическим методом является интересной задачей с точки зрения теории и, кроме того, имеет большую практическую значимость [1–4].

Рассматривается вопрос определения химического состава неоднородного тела с неизвестной внутренней структурой, состоящего из конечного числа однородных по составу частей $G_1, ..., G_p$ и занимающего в $\mathbb{R}^3$ ограниченную выпуклую область G по результатам просвечивания этого тела рентгеновским излучением на диапазоне энергии $I = [E_\alpha, E_\beta]$ [5].

Задача 1.1. *Под задачей определения химического состава понимается нахождение в каждой из подобластей G_k; $k = 1, ..., p$ перечня всех входящих в G_k химических элементов $X_1, ..., X_N$, определение их массовых долей $w_{k1}, ..., w_{kN}$ и плотности вещества ρ_k в G_k.*

Такая постановка задачи представляется оправданной в случаях, когда, например, речь идет о нахождении внутреннего устройства промышленного изделия, разборка которого на части невозможна.

На первом этапе решения задачи производится нахождение границ неоднородностей G_i с помощью индикатора неоднородностей – некоторой функции $\mathrm{Ind}(r, E)$, которая вычисляется по выходящему из G излучению. Подробное описание этого метода можно найти в работах [6,7]. Основное внимание мы уделим второму этапу решения задачи – способу определения химического состава неоднородностей [5]. При этом, с учетом информации, полученной на первом этапе, посредством энергетического сканирования тела по конечному набору специально выбранных прямых, производится определение химических элементов, входящих в состав каждой неоднородности, находятся их массовые доли и плотности материалов, составляющих неоднородности.

В качестве математической модели взаимодействия рентгеновского излучения с веществом бралось интегро-дифференциальное уравнение переноса [6,7]

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, E) + \mu(r, E) f(r, \omega, E) = \\ = \mu_s(r, E) \int\limits_{\Omega} S(r, \omega \cdot \omega', E) f(r, \omega', E) d\omega' + J(r, \omega, E). \quad (1.1)$$

Здесь $r \in G \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : \mid \omega \mid = 1\}$ – единичная сфера, $\omega, \omega' \in \Omega$, E – энергия излучения, $f(r, \omega, E)$ – плотность потока фотонов в точке r, движущихся в направлении ω и имеющих энергию E, $\mu(r, E)$– коэффициент полного взаимодействия фотонов с веществом, $S(r, \omega \cdot \omega', E)$ – индикатриса рассеяния, $J(r, \omega, E)$ – плотность внутренних источников излучения. При упругом рассеянии фотонов их энергия не меняется, поэтому переменная E в этом уравнении присутствует в качестве параметра. В дальнейшем для нас будет важна зависимость коэффициентов μ и μ_s от энергии, поэтому эта переменная в уравнении сохранена, и напротив, когда речь будет идти об однородных по пространственной переменной веществам или химическим элементам аргумент r у коэффициентов будет опущен.

Предлагаемый способ определения химического состава основан на том, что для различных химических элементов коэффициенты их полного взаимодействия имеют разрывы при различных значениях энергии E.

Отметим предварительно следующее. На промежутке 1 кэВ – 20 Мэв функции $\mu(E)$ и $\mu_a(E) = \mu(E) - \mu_s(E)$ для каждого элемента непрерывны всюду кроме конечного числа точек, в которых они одновременно имеют разрыв I рода. Наличие скачков у функций $\mu(E)$, $\mu_a(E)$ следует из физических моделей взаимодействия излучения с веществом. Только для элементов с номерами Z меньше 11 функции $\mu(E)$ и $\mu_a(E)$ непрерывны на рассматриваемом промежутке энергии.

Для разных элементов все точки разрыва E' функций $\mu(E)$, $\mu_a(E)$ всегда различны и их общее число для всех элементов составляет 566. Самый первый скачок (в порядке возрастания по энергии) имеет место при $E' = 1.002$ кэВ (для фермия), а самый последний при $E' = 143.1$ кэВ (тоже для фермия).

Для определения химического состава тела, внутреннюю структуру которого уже считаем найденной, используется наличие скачков у коэффициента $\mu(E)$ и индивидуальность набора таких скачков для каждого химического элемента.

Пусть $L_{r,\omega}$ луч исходящий из точки r в направлении ω и $d(r,\omega) = mes_1(L_{r,\omega} \cap \overline{G})$, $(r,\omega) \in \overline{G} \times \Omega$, где $mes_1(\cdot)$ означает меру множества в пространстве $\mathbb{R}^1$. Функция $d(r,\omega)$ есть расстояние от точки r до границы области G в направлении ω.

Определим множества $\Gamma^{\pm}$ как совокупность пар $(y,\omega) \in \partial G \times \Omega$, для которых верно представление $(y,\omega) = r \pm d(r,\pm\omega)\omega$, $(r,\omega) \in G \times \Omega$. Если в этом представлении точки r ограничить только множеством G_0, аналогичные множества пар обозначаются $\Gamma_0^{\pm}$. Используя эти обозначения, выпишем граничные условия:

$$f(\xi,\omega,E) = h(\xi,\omega,E), \quad (\xi,\omega) \in \Gamma^{-},\ E \in I, \tag{1.2}$$

$$f(\eta,\omega,E) = H(\eta,\omega,E), \quad (\eta,\omega) \in \Gamma^{+},\ E \in I, \tag{1.3}$$

где функции $h(\xi,\omega,E)$ и $H(\eta,\omega,E)$ имеют смысл плотности входящего и выходящего излучения соответственно.

Будем считать, что выполняются следующие условия. Функция $h(\xi,\omega,E)$ непрерывна по всем переменным и имеет коллимированный характер по (ξ,ω), так что $h(\xi,\omega,E)$ отлична от нуля лишь для (ξ,ω) мало отличающихся от некоторых заданных (ξ_0,ω_0); рассеяние в G незначительно и нет внутренних источников излучения $(J = 0)$.

Сначала, путем просвечивания области G коллимированным рентгеновским излучением вдоль специально выбираемого набора прямых $L_1,...,L_p$ находится перечень всех химических элементов $X_1,...,X_N$, присутствующих в G и определяются левые и правые предельные значения $H(E_j-0)$, $H(E_j+0)$ выходящего из G излучения для величин энергии $E_j \in I$, при которых коэффициенты полного ослабления излучения для химических элементов $X_1, ..., X_N$ имеют скачки.

Таким образом, определен набор химических элементов из которых состоит среда, и после этого задача сводится к решению системы из $Np+p$ уравнений и условий [5]

$$\sum_{k=1}^{p} l_{ik} \cdot \rho_k w_{kj} = \gamma_{ij}, \ i = 1, ...p, \ j = 1, ..., N, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_{kj} = 1, \ w_{kj} \geq 0, \ k = 1, ..., p \tag{1.5}$$

относительно неизвестных ρ_k, w_{kj}. Величины l_{ik} и γ_{ij} при этом известны и определяются следующим образом. Первая их них, l_{ik} есть линейная мера пересечения прямой L_i с областью G_k, а вторая вычисляется по формуле

$$\gamma_{ij} = \frac{\rho_{xj} \ln(H_i(E_j - 0)/H_i(E_j + 0))}{\mu_{xj}(E_j + 0) - \mu_{xj}(E_j - 0)},$$

где $H_i(E_j - 0)$ и $H_i(E_j + 0)$ есть, соответственно, левое и правое предельное значение плотности потока излучения, выходящего из G при просвечивании тела вдоль прямой L_i, а E_j есть значение энергии, при которой коэффициент ослабления μ_{xj} химического элемента X_j имеет скачок, величина ρ_{xj} обозначает плотность элемента X_j.

В нижеприведенной таблице представлены результаты одного из проведенных численных экспериментов [5]. В этом эксперименте область G представляла из себя шар радиуса 1 мкм с центром в начале координат и содержала подобласти G_1 и G_2. При этом G_2 была частью однополостного гиперболоида, а $G_1 = G \backslash G_2$. Подобласть G_1 была заполнена фосфидом алюминия AlP, а G_2 – алюмоселенидом меди $CuAlSe_2$. Таким образом, области G_1 и G_2 соответствовали различным однородным веществам, не содержащим внутренних источников излучения. Первые три строки таблицы относятся к подобласти G_1, заполненной AlP, содержат точные и расчетные значения плотности материала ρ(г/см^3) и массовые доли каждого химического элемента, присутствующего в G. Последние три строки таблицы относятся к подобласти G_2, заполненной $CuAlSe_2$. Как видно из этой таблицы, расчетные и точные значения искомых величин хорошо согласуются.

Значения	$\rho_1(AlP)$	$w_{11}(Al)$	$w_{12}(P)$	$w_{13}(Cu)$	$w_{14}(Se)$
Точное	2.420	0.4655578	0.5344423	0.0	0.0
Расчет	2.420	0.4655576	0.5344424	0.0	0.0
	$\rho_2(CuAlSe_2)$	$w_{21}(Al)$	$w_{22}(P)$	$w_{23}(Cu)$	$w_{24}(Se)$
Точное	4.700	0.1086005	0.0	0.2557723	0.6356272
Расчет	4.72137	0.1093943	0.002568157	0.2534516	0.6345859

Полученные результаты позволяют утверждать, что предлагаемый метод может быть использован для нахождения химического состава и структуры неоднородных тел малого размера (до 10 микрон в диаметре). Недостатком данного метода является то обстоятельство, что хорошая точность при нахождении искомых величин может быть достигнута только для тел, размеры которых не превышают нескольких микрон. Использование больших значений энергии зондирующего излучения, при которых коэффициенты полного взаимодействия для веществ быстро убывают, оказывается невозможным ввиду отсутствия скачков у коэффициентов для таких энергий.

2. Задача рентгеновской томографии для векторного уравнения переноса

В рамках модели, основанной на скалярном уравнении переноса излучения, рассматриваются два вида взаимодействия фотонов с веществом: поглощение и рассеяние. Но оба этих процесса в существенной степени зависят от поляризации входящего излучения, поэтому скалярное уравнение переноса, не учитывающее поляризацию, является приближенной моделью. Для более точного описания процесса переноса излучения необходимо учитывать поляризацию светового пучка [8–9]. Хороший обзор работ, посвященных векторному уравнению переносу имеется в [10].

Среди немногочисленных работ по обратным задачам для векторного уравнения переноса отметим [11–13]. В данной работе исследуется задача определения коэффициента ослабления уравнения переноса [14,15]. Метод нахождения коэффициента основан на использовании источника внешнего излучения специального типа, имеющего разрывы первого рода по угловой переменной. В скалярном случае этот метод решения обратной задачи применялся в работах [6,7].

Уравнение переноса поляризованного излучения в изотропной среде для четырехмерного вектора параметров Стокса $f=(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ имеет вид [14,15]:

$$\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega)+\mu(r)f(r,\omega)=\mu_s(r)\int\limits_{\Omega}P(r,\omega,\omega')f(r,\omega')d\omega'+J(r,\omega), \tag{2.1}$$

где функция $J(r,\omega)$ есть вектор, описывающий внутренние источники излучения, $P(r,\omega,\omega')$ – матрица рассеяния размерности 4×4. Под символом $\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega)$ будем понимать четырехкомпонентную вектор-функцию, i-ая компонента которой представляет собой производную функции $f_i(r,\omega)$ в направлении ω относительно пространственной переменной r.

Обозначим через $C_b(X)$, $X\in\mathbb{R}^m$ банахово пространство функций, определенных на $\overline{X}$, ограниченных и непрерывных на X, с нормой

$$||f||=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

Аналогично определим пространство $C_b^{(4)}(X)$, образованное вектор-функциями $f=(f_1,\; f_2,\; f_3,\; f_4)$, каждая компонента которой принадлежит $C_b(X)$, и соответствующая норма определяется равенством

$$||f||_4=\max_{1\le i\le 4}||f_i||.$$

Обозначая через G_0 объединение всех областей G_i, сформулируем ограничения на коэффициенты уравнения (1). Функции $\mu(r)$, $\mu_s(r)$ – неотрицательные и принадлежат пространству $C_b(G_0)$, причем $\mu(r)\ge\mu_s(r)$, а вектор-функция $J(r,\omega)\in C_b^{(4)}(G_0\times\Omega)$. Все компоненты матрицы рассеяния $P(r,\omega,\omega')$ принадлежат $C_b(G_0\times\Omega\times\Omega)$.

К уравнению (2.1) присоединим граничные условия

$$f(\xi,\omega)=h(\xi,\omega),\quad (\xi,\omega)\in\Gamma^-. \tag{2.2}$$

$$f(\eta,\omega) = H(\eta,\omega), \quad (\eta,\omega) \in \Gamma^+. \tag{2.3}$$

Относительно функции h предполагается, что она неотрицательная и $\widetilde{h}(r,\omega) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega)$ принадлежит $C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega_0)$, где Ω_0 открытое подмножество Ω плотное в Ω и $mes_2(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$.

Рассмотрим следующую задачу томографии.

Задача 2.1. *Требуется определить функцию $\mu(r)$ из уравнения (2.1) и краевых условий (2.2), (2.3), если известны только функции h, H.*

Задачу определения функции f из (2.1),(2.2),при известных μ, P, J, h, будем называть *прямой задачей (2.1),(2.2)*. Обозначим

$$(lf)(r,\omega) = \omega \cdot \nabla_r f(r,\omega) + \mu(r) f(r,\omega), \tag{2.4}$$

$$N(r,\omega) = \mu_s(r) \int\limits_{\Omega} P(r,\omega,\omega') f(r,\omega') d\omega'. \tag{2.5}$$

Определим класс D, в котором ищется решение прямой задачи. Вектор-функция $f(r,\omega) \in D(G_0 \times \Omega_0)$, если для любых точек $(r,\omega) \in G_0 \times \Omega_0$ функция $f(r + t\omega,\omega)$ абсолютно непрерывна по переменной $t \in [-d(r,-\omega),\ d(r,\omega)]$, и функции $f(r,\omega)$ и $\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega)$ принадлежат пространству $C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega_0)$.

Отметим следующее. Так как, функция $\mu(r) \in C_b(G_0)$, то оператор l, определенный равенством (2.4), переводит $D(G_0 \times \Omega_0)$ в $C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega_0)$.

Задача 2.2. *Решением прямой задачи (2.1),(2.2) будем называть функцию $f(r,\omega) \in D(G_0 \times \Omega_0)$, которая для всех $(r,\omega) \in G_0 \times \Omega_0$ удовлетворяет соотношениям*

$$(lf)(r,\omega) = N(r,\omega) + J(r,\omega),$$

$$f(r - d(r,-\omega)\omega,\omega) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega).$$

Условия на параметры Стокса $f_i(r,\omega)$, вызванные физическими ограничениями, состоят в следующем [8,9]

$$f_1 \geq 0, \quad f_1^2 \geq f_2^2 + f_3^2 + f_4^2. \tag{2.6}$$

Обозначим через K - конус в пространстве $C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega_0)$, образованный функциями $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega_0)$, удовлетворяющими условиям (2.6). Для всех $f \in K$, матрица рассеяния $P(r,\omega,\omega')$ удовлетворяет ограничениям

$$Pf \in K, \tag{2.7}$$

$$\mu_s(r) \int\limits_{\Omega} (P(r,\omega,\omega') f(r,\omega'))_1 d\omega' \leq \frac{\mu(r)}{4\pi} \int\limits_{\Omega} f_1(r,\omega') d\omega'. \tag{2.8}$$

Ограничение (2.7) означает, что матричный оператор P переводит конус K в себя, то есть

$$(Pf)_1 \geq 0, \quad (Pf)_1^2 \geq (Pf)_2^2 + (Pf)_3^2 + (Pf)_4^2,$$

а условие (2.8) выражает закон сохранения энергии в акте рассеяния в неразмножающей среде.

Имеет место утверждение о корректности прямой задачи (2.1),(2.2) [14,15].

Теорема 2.1. *Пусть* $\widetilde{h}(r,\omega) \in K$, $J(r,\omega) \in C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega) \cap K$ *и справедливы условия (2.7), (2.8), тогда в конусе* K *решение задачи (2.1),(2.2) существует, единственно и представляется в виде ряда Неймана*

$$f(r,\omega) = f_0(r,\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}((AS)^n f_0)(r,\omega), \tag{2.9}$$

$$f_0(r,\omega) = \widetilde{h}(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu(r-\omega t)dt\right) + (AJ)(r,\omega),$$

сходящегося в норме пространства $C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega_0)$.

Конкретизируем теперь множество Ω_0. Пусть $\Omega_0 = \Omega_- \cup \Omega_+$, $\Omega_\pm = \{\omega \in \Omega : \mathrm{sgn}(\omega_3) = \pm 1\}$. Для решения поставленной задачи томографии, кроме условий, сформулированных в теореме 2.1, введем дополнительные условия на функцию h.

Пусть $\widetilde{h}(r,\omega) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega) \in C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega_0)$ и хотя бы для одного i, $i \in \{1,2,3,4\}$ справедливо

$$[\widetilde{h}_i](r,\omega) = \widetilde{h}_i^+(r,\omega) - \widetilde{h}_i^-(r,\omega) \neq 0, \quad r \in G_0, \quad \omega = (\omega_1,\omega_2,0) \in \Omega, \tag{2.10}$$

где

$$\widetilde{h}_i^\pm(r,\omega) = \lim_{\varepsilon \to +0} \widetilde{h}_i\left(r, \frac{(\omega_1,\omega_2,\pm\varepsilon)}{1+\varepsilon^2}\right).$$

Таким образом, мы предполагаем наличие разрыва первого рода у одной или более компонент функции $h(r,\omega)$ в горизонтальных направлениях ($\omega_3 = 0$).

Решение задачи томографии дает следующее утверждение [14,15].

Теорема 2.2. *Пусть при условиях теоремы 2.1, функция* h *удовлетворяет вышеперечисленным условиям и выполняется соотношение (2.3), тогда для всех* $r \in G_0$, $\omega = (\omega_1,\omega_2,0) \in \Omega$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r+\omega t)dt = \ln\frac{[h_i](r - d(r,-\omega)\omega,\omega)}{[H_i](r + d(r,\omega)\omega,\omega)}. \tag{2.11}$$

В итоге, задача томографии свелась к задаче обращения двумерного преобразования Радона от функции μ

$$(\mathcal{R}\mu)(r,\omega) \equiv \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r+\omega t)dt = \Phi_i(r,\omega), \tag{2.12}$$

где

$$\Phi_i(r,\omega) = \ln\frac{[h_i](r - d(r,-\omega)\omega,\omega)}{[H_i](r + d(r,\omega)\omega,\omega)} \tag{2.13}$$

в любой горизонтальной плоскости $\{r = (r_1,r_2,r_3) \in \mathbb{R}^3 : r_3 = const\}$, имеющей общую точку с множеством G_0. Эта задача имеет единственное решение в широком классе функций.

Из формул (2.11)–(2.13) непосредственно вытекает, что для нахождения $(\mathcal{R}\mu)(r,\omega)$ можно использовать любые компоненты векторных функций h и

H, имеющие ненулевые разрывы по угловой переменной. Это обстоятельство будет использовано далее при проведении численных экспериментов.

Продемонстрируем работу алгоритма решения задачи томографии на примере фантома Кормака [14,15]. Разбиение G_0 состоит из шести областей G_i, в которых коэффициент ослабления равен либо 1 либо 2, рассеяние в среде происходит согласно закону Рэлея и его уровень во всех областях составляет 50%, внутренние источники отсутствуют.

Были взяты следующие компоненты вектор-функции $h(r,\omega)$, соответствующей входящему излучению:

$$h_1 = \begin{cases} 1, & \omega_3 \geq 0, \\ 1.2, & \omega_3 < 0, \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0.2, & \omega_3 \geq 0, \\ 1, & \omega_3 < 0, \end{cases} \quad h_3 = \begin{cases} 0.4, & \omega_3 \geq 0, \\ 0.1, & \omega_3 < 0, \end{cases} \quad h_4 = 0.$$

Восстановление функции $\mu(r)$ осуществлялось в плоскости $r_3 = 0$. Сечение плоскости $r_3 = 0$ с областью G представляет собой круг радиуса 1. При восстановлении функции $\mu(r)$ использовалась параллельная схема сканирования. Пусть

$$r_1 = \rho\cos\varphi, \quad r_2 = \rho\sin\varphi, \quad \rho \in [-1,1], \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

$$\omega = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \omega_\perp = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \quad \omega \cdot \omega_\perp = 0,$$

тогда равенство (2.13) запишется в виде

$$\int\limits_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} \mu(\rho\omega_\perp + t\omega)dt = \widetilde{\Phi}_i(\rho, \omega), \tag{2.14}$$

где $\widetilde{\Phi}_i(\rho,\omega) = \Phi_i(r(\rho,\omega), \omega(\varphi))$, $r = \rho\omega_\perp(\varphi)$. Таким образом, в сечении $r_3 = 0$ мы получили интегралы от следа функции μ по почти всем прямым, проходящим через точки $r = \rho\omega_\perp(\varphi)$ в направлении $\omega(\varphi)$, $\rho \in [-1,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Для проведения вычислительных экспериментов было взято следующее разбиение множества $[-1,1] \times [0, 2\pi)$, на котором определяется преобразование Радона $(\mathcal{R}\mu)(\rho, \omega(\varphi)) = \widetilde{\Phi}_i(\rho, \omega)$

$$\rho_l = -1 + l/60, \quad l = \overline{0, 120}, \quad \varphi_s = s\pi/90, \quad s = \overline{0, 179}.$$

Для нахождения $\widetilde{\Phi}_i(\rho_l, \omega(\varphi_s))$ необходимо вычислить скачок $[H_i](r + d(r,\omega)\omega, \omega)$ в точках $(r^{l,s}, \omega^s)$, где $r^{l,s} = \rho_l\omega_\perp(\varphi_s)$, $\omega^s = \omega(\varphi_s)$.

Вычисление вектор-функции H проводилось с помощью метода Монте-Карло. При проведении вычислительных экспериментов значение вектор-функции аппроксимировалось 20 слагаемыми ряда Неймана. Было взято 500 траекторий в одном эксперименте, и 5000 – в другом. Нахождение преобразования Радона можно осуществить по скачку в одной из первых трех компонент функций h, H. То есть, по формуле (2.14) при $i = 1, 2, 3$. Первоначально преобразование Радона было вычислено при $i = 1$, $n = 500$, что соответствует алгоритму для скалярного уравнения переноса. Используя алгоритм свертки и обратной проекции, были найдены значения функции $\mu(r)$ на равномерной сетке 400×400 в плоскости $r_3 = 0$. Результат восстановления представлен на рис. 1(а). Аналогичное восстановление при $i = 2$, $n = 500$ представлено на рис. 1(б). На рис.2(а,б) изображено восстановление функции μ по первым двум компонентам решения при $n = 5000$.

(а) **(б)**

Рис. 1: Восстановление функции $\mu(r_1, r_2, r_3)$ в сечении $r_3 = 0$ для случая $n = 500$.
(а) – реконструкция при $i = 1$; **(б)** – реконструкция при $i = 2$.

(а) **(б)**

Рис. 2: Восстановление функции $\mu(r_1, r_2, r_3)$ в сечении $r_3 = 0$ для случая $n = 5000$.
(а) – реконструкция при $i = 1$; **(б)** – реконструкция при $i = 2$.

Приведенный вычислительный эксперимент демонстрирует, что использование скачка во второй компоненте вектор функции $h(\xi, \omega)$ позволяет получить более качественное восстановление. Отметим, что когда $[h_1](r - d(r, -\omega)\omega, \omega) = 0$ было бы вообще невозможно решить обратную задачу методом, который соответствует скалярному случаю, даже при точно заданных исходных данных.

Таким образом, полученное обобщение алгоритма решения задачи томографии на случай векторного уравнения переноса поляризованного излучения позволяет в ряде случаев получить более качественное восстановление по сравнению с ранее использованным подходом. Для практических исследований это означает, что применение поляризованных источников специального типа существенно расширяет возможности методов неразрушающего контроля изделий при их радиационном облучении.

3. Задачи оптической томографии в слоистых средах

При описании процесса распространения излучения в веществе приходится сталкиваться с тем, что среда составлена из разнородных по своим радиационным свойствам материалов, что в терминах уравнения переноса означает разрывность его коэффициентов. На поверхностях разрыва ставятся условия сопряжения, которые накладывают дополнительные ограничения на функцию распределения плотности излучения. Наиболее полно исследованы задачи для уравнения переноса с условиями сопряжения на границе раздела типа непрерывной склейки решения $f(r,\omega)$ по переменой r в направлении ω. В краевых задачах (1.1),(1.2) и (2.1),(2.2) требование непрерывности решения неявно предполагается. Это, в частности, приводит к сравнительно простому интегральному представлению для решения краевой задачи.

Рассмотрение более общих условий сопряжения позволяет учитывать отражение и преломление света на контактных границах, а не только его поглощение и рассеяние на случайно распределенных микро-неоднородностях среды. Модель, основанная на уравнении переноса с обобщенными условиями сопряжения, весьма актуальна и находит свое применение в атмосферной оптике, в лазерной медицине и в трехмерной компьютерной графике. Несмотря на ее более чем полувековую историю и повышенный интерес в последнее время, теоретические результаты в этой области развиты в незначительной степени. Только в последние годы заметен прогресс в этом направлении, и, в частности, в работах авторов [16–20].

Ниже будут рассмотрены задачи оптической диагностики слоистых сред для модели процесса распространения излучения, основанной на стационарном интегродифференциальном уравнении переноса с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред, которые учитывают отражение и преломление светового потока.

Эти задачи заключаются в определении коэффициента преломления и оптических толщин многослойной среды по выходящему излучению и их решение основано на использовании явления полного внутреннего отражения на границе раздела сред и применении специального типа внешнего источника, имеющего разрыв первого рода по угловой переменной.

В работах [16–19] были описаны способы определения относительных показателей слоев в случае достаточно произвольного внешнего источника. Они базируются качественных свойствах решения уравнения переноса. В частности, используется тот факт, что производная по угловой переменной от решения уравнения имеет неограниченный рост вблизи угла полного внутреннего отражения.

История использования источника разрывного типа идейно восходит к работе Д.С. Аниконова, И.В. Прохорова (1992), подробно изложенной в [6]. В этой работе рассматривалась обратная задача в пространственно трехмерном случае, заключающаяся в определении коэффициента ослабления уравнения переноса по решению, известному на границе среды. В [6] приводится также теоретическое обоснование практической реализуемости внешнего излучателя, имеющего разрыв по угловой переменной.

В работе [20] авторы предлагают способ одновременного нахождения показателей преломления и оптических толщин слоистой среды.

Пусть среда, в которой происходит процесс переноса излучения, имеет плоскую геометрию и заполняет область $G = \{(x, y, z) : z \in (z_0, z_p)\}$. Плоскости $z = z_i$, $i = 1, 2, ..., p-1$ являются границами раздела слоев $G_i = \{(x, y, z) : z \in (z_{i-1}, z_i)\}$. Если все радиационные характеристики среды зависят только от одной пространственной переменной z, то в такой среде процесс переноса излучения может быть описан следующим уравнением

$$\nu f_z(z, \nu, \varphi) + \mu(z) f(z, \nu, \varphi) = \mu_s(z) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} S(z, \chi) f(z, \nu', \varphi') d\nu' d\varphi' + J(z, \nu, \varphi). \tag{3.1}$$

Здесь $f(z, \nu, \varphi)$ интерпретируется как плотность потока излучения в точке $z \in G$ и в направлении $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\sqrt{1-\nu^2}\cos\varphi, \sqrt{1-\nu^2}\sin\varphi, \nu)$. Углы $\alpha = \arccos\nu$ и φ представляют собой сферические координаты; $\alpha \in [0, \pi]$ – зенитный угол, отсчитываемый от оси z, а $\varphi \in [0, 2\pi)$ – азимут ($\varphi = 0$ соответствует оси x). Величина ν является косинусом угла между направлением ω и осью z, а $\chi = \omega \cdot \omega'$ – косинус угла между векторами ω и ω'.

Граничные условия для плоскопараллельного случая имеют вид

$$f^-(z_i, \nu, \varphi) = h(z_i, \nu, \varphi), \quad (z_i, \nu, \varphi) \in \Gamma^-, \tag{3.2}$$

$$f^-(z_i, \nu, \varphi) = (\widehat{B} f^+)(z_i, \nu, \varphi), \quad (z_i, \nu, \varphi) \in \gamma \times Y, \tag{3.3}$$

где

$$f^\pm(z_i, \nu, \varphi) = \begin{cases} f(z_i \pm 0, \nu, \varphi), & \nu < 0, \\ f(z_i \mp 0, \nu, \varphi), & \nu > 0, \end{cases} \qquad f(z_i \pm 0, \nu, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} f(z_i \pm \varepsilon, \nu, \varphi),$$

и $Y = Y^- \cup Y^+$, $Y^+ = (0, 1] \times [0, 2\pi)$, $Y^- = [-1, 0) \times [0, 2\pi)$, $\gamma = \{z_1, z_2, ..., z_{p-1}\}$, $\Gamma^\pm = z_0 \times Y^\pm \cup z_p \times Y^\mp$.

Оператор сопряжения $\widehat{B}$ в (3.3) является френелевского типа:

$$(\widehat{B} f^+)(z_i, \nu, \varphi) = R_i(\nu) f^+(z_i, -\nu, \varphi) + T_i(\nu) f^+(z_i, \psi_i, \varphi), \tag{3.4}$$

где

$$\psi_i(\nu) = \begin{cases} \operatorname{sign}(\nu)\sqrt{1 - \widetilde{\kappa}_i^2(\nu)(1-\nu^2)}, & \text{при } 1 - \widetilde{\kappa}_i^2(\nu)(1-\nu^2) \ge 0, \\ 0, & \text{при } 1 - \widetilde{\kappa}_i(\nu)(1-\nu^2) < 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\widetilde{\kappa}_i(\nu) = \begin{cases} \kappa_{i+1}/\kappa_i, & \text{при} \quad 0 < \nu \le 1, \\ \kappa_i/\kappa_{i+1}, & \text{при} \ -1 \le \nu < 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

и κ_i — некоторые положительные постоянные величины, являющиеся коэффициентами преломления слоев G_i, $i = 1, ..., p$. Коэффициенты R и T определяются следующими формулами:

$$R_i(\nu) = \frac{1}{2}(R_{i,\parallel}^2(\nu) + R_{i,\perp}^2(\nu)), \quad T_i(\nu) = \frac{1}{2}(T_{i,\parallel}^2(\nu) + T_{i,\perp}^2(\nu))\frac{\widetilde{\kappa}_i(\nu)\nu}{\psi_i(\nu)}, \tag{3.7}$$

где

$$R_{i,\parallel}(\nu) = \frac{\widetilde{\kappa}_i(\nu)\psi_i(\nu) - \nu}{\widetilde{\kappa}_i(\nu)\psi_i(\nu) + \nu}, \quad R_{i,\perp}(\nu) = \frac{\psi_i(\nu) - \widetilde{\kappa}_i(\nu)\nu}{\psi_i(\nu) + \widetilde{\kappa}_i(\nu)\nu},$$

$$T_{i,\parallel}(\nu) = \frac{2\psi_i(\nu)}{\widetilde{\kappa}_i(\nu)\psi_i(\nu) + \nu}, \quad T_{i,\perp}(\nu) = \frac{2\psi_i(\nu)}{\psi_i(\nu) + \widetilde{\kappa}_i(\nu)\nu}.$$

Они характеризуют свойства границы отражать и пропускать излучение.

Далее мы ограничимся рассмотрением одного из частных случаев задачи томографии. А именно, будем предполагать, что излучение доступно для измерения лишь на одной из границ, например, при $z = z_0$. Последнее обстоятельство характерно при диагностики кожного покрова человека. Для простоты будем также предполагать, что излучение со стороны границы $z = z_p$ в среду не поступает, т.е. $h(z_p, \nu, \varphi) = 0$, $\nu < 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Задача 3.1. *Требуется определить относительные показатели преломления κ_{i+1}/κ_1 и оптические толщины $\tau(z_i, z_{i-1}) = \int\limits_{z_{i-1}}^{z_i} \mu(z)dz$, $i = 1, ..., p-1$ слоев из уравнения (3.1), граничных соотношений (3.2),(3.3) и дополнительного краевого условия*

$$f(z_0, \nu, \varphi) = H(z_0, \nu, \varphi), \quad \nu < 0,\ \varphi \in [0, 2\pi), \tag{3.8}$$

если известны функции $h(z_0, \nu, \varphi)$ и $H(z_0, \nu, \varphi)$.

Решение поставленной задачи проводится в два этапа. Сначала, используя только знание о выходящем потоке (известна функция H), находятся относительные коэффициенты преломления а затем, оптические толщины сред G_i.

В принципе, для реализации первого этапа вовсе не обязательно наличие специального типа внешнего источника излучения. В работах [16–19] была решена задача определения показателей преломления в случае когда функция h зависит только от одной переменной ν, причем гладким образом. Мы будем придерживаться ограничений работы [20], в которой продемонстрирован подход, когда можно сразу избавиться от влияния рассеяния, используя разрыв у функции $h(z_0, \nu, \varphi)$ по переменной φ.

Пусть функция $h(z_0, \nu, \varphi) \in C_b(Y_0^-)$, $(Y_0^- = [-1, 0) \times \{[0, \varphi_0) \cup (\varphi_0, 2\pi)\})$ и имеет ограниченную производную по переменной ν для всех φ. Причем при $\varphi = \varphi_0$ эта функция содержит разрыв первого рода по переменной φ. Для определенности будем полагать, что $\varphi_0 = \pi$. Если в точке $\varphi = 2\pi$ функция h непрерывна, то из условия периодичности следует, что $h(z_0, \nu, 2\pi - 0) = h(z_0, \nu, 0)$. Однако, если выйти за рамки плоскопараллельной модели и рассмотреть процесс переноса излучения в трехмерном пространстве ($r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$), то с практической точки зрения источник излучения с разрывом только вдоль разреза $\varphi = \pi$ выглядит менее предпочтительным, чем со скачком как при $\varphi = \pi$, так и при $\varphi = 2\pi$, поскольку для создания последнего достаточно на пути изотропного потока излучения поместить препятствие в области $y > 0$ [6]. Имеет место утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть для некоторого номера i, $2 \le i \le p$ выполняются условия*

$$\frac{\kappa_i}{\kappa_1} < 1, \qquad \frac{\kappa_i}{\kappa_j} \le 1,\ j = 2, .., i, \qquad \frac{\kappa_i}{\kappa_{i-1}} < 1, \tag{3.9}$$

тогда $\dfrac{\partial}{\partial \nu}[f](z_0, \nu, \pi) \to \infty$ при $\nu \to \nu_i - 0$, где $\nu_i = -\sqrt{1 - (\kappa_i/\kappa_1)^2}$, f – решение краевой задачи (3.1)-(3.3) и $[f](z, \nu, \pi)$ величина разрыва функции $f(z, \nu, \varphi)$ по переменной φ, при $\varphi = \pi$.

Из теоремы вытекает, что если последовательность κ_i, $i = 1, ..., p$ монотонно убывает, тогда $\dfrac{\partial}{\partial \nu}[f](z_0, \nu, \pi) \to \infty$ при $\nu \to \nu_i - 0$ для всех $i = 2, ..., p$.

В предположениях теоремы 3.1, удается показать единственность решения задачи определения показателей преломления.

Переходя к задаче нахождения оптических толщин слоев, для краткости будем использовать обозначение $\tau_j = \tau(z_{j-1}, z_j),\ j = 1, .., p-1$. Пусть известны все относительные показатели преломления, и оптические толщины $\tau_j,\ j < i$ и при $\nu = \nu_i$ на границе $z = z_i$ происходит полное внутреннее отражение. Тогда имеем следующее выражение для величины τ_i:

$$\tau_i = -\frac{\nu_i}{2} \ln \frac{h_{i-1}(-\psi_i(-\nu_i))}{h_{i-1}(\nu_i) R_{i-1}(-\nu_i) + T_{i-1}(-\psi_i(-\nu_i)) h_{i-1}(-\nu_i)}, \tag{3.10}$$

где величины $h_j, j = 0, ..., i-1$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} h_j(\nu) = {} & (T_{j-1}(-\psi_{j-1}(-\nu)) \exp(\tau_j|\nu|))^{-1} \times \\ & \times \{h_{j-1}(-\psi_{j-1}(-\nu)) \left(1 - R_j(\nu) R_{j-1}(-\nu) \exp\left(-2\tau_j/|\nu|\right)\right) - \\ & - R_j(\nu) h_{j-1}(-\nu) \exp(-2\tau_j/|\nu|) T_{j-1}\left(-\psi_{j-1}(-\nu)\right)\}, \quad \nu < 0; \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} h_j(\nu) = {} & (1 - R_j(\psi_j(\nu)) R_{j-1}(-\psi_j(\nu)) \exp(-2\tau_j/|\psi_j(\nu)|))^{-1} \times \\ & \times T_j(\nu) \{h_{j-1}(\psi_j(\nu)) \exp(-\tau_j/|\psi_j(\nu)|) + \\ & + R_{j-1}(\psi_j(\nu)) h_j(-\psi_j(\nu)) \exp(-2\tau_j/|\psi_j(\nu)|)\}, \quad \nu > 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$h_0(\nu) = \begin{cases} [H](z_0, \nu, \pi), & \nu < 0, \\ [h](z_0, \nu, \pi), & \nu > 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Наличие на границе $z = z_i$ полного внутреннего отражения приводит к тому, что последующие слои не вносят вклад в $[H](z_0, \nu, \pi)$ при $\nu_i \le \nu < -1$. Данное обстоятельство позволяет получить достаточно простую формулу (3.10) для определения τ_i. В случае монотонного поведения показателей преломления $(\kappa_i > \kappa_{i+1})\, i = 1, ..., p-1$, все оптические толщины $\tau_j,\ j = 1, ..., p-1$ могут быть определены последовательно. В противном случае определяется только часть $\tau_j,\ j = 1, ..., i-1$, для которых выполнены условия: $\kappa_1 > ... > \kappa_i$, где $\kappa_i \le \kappa_{i+1}$. Если выходящее излучение известно и на границе $z = z_p$, то дополнительно определяется набор $\tau_j,\ j = i, ..., p$, для которого $\kappa_p > ... > \kappa_l$, где $\kappa_l \le \kappa_{l-1}$.

В заключении рассмотрим два тестовых примера по восстановлению искомых характеристик облучаемой среды. Примеры строились в два этапа. На первом этапе, по заданной структуре облучаемой среды, решалась прямая задача и находилась функция $H(\nu, \varphi) = f(z_0 + 0, \nu, \varphi)$ при $\nu < 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$, моделирующая выходящее из среды излучение. Алгоритм решения прямой задачи, основанный на применении метода Монте-Карло, подробно описан в работах [17,18].

На втором этапе решалась обратная задача. Вычислялся скачок функции H при $\varphi = \pi$ и его производная по переменной ν. После этого находились значения переменной $\nu_i,\ i \le p$ при которых производная от скачка принимала аномально большие значения. Затем при помощи соотношений $\kappa_i/\kappa_1 = \sqrt{1 - \nu_i^2}$ находились относительные показатели преломления, и, наконец, по формуле (3.10) определялись оптические толщины.

Далее представлены результаты двух модельных экспериментов для четырехслойной среды. В экспериментах входящее излучение равнялось нулю на границе $z = z_4$, а при $z = z_0$ задавалось следующим образом

$$h(z_0, \nu, \varphi) = \begin{cases} 2, & \nu > 0, \varphi \in [0, \pi), \\ 1, & \nu > 0, \varphi \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Для моделировании рассеяния в качестве фазовой функции g выбиралась функция Хеньи-Гринштейна с показателем анизотропии рассеяния $\overline{g} \in (0,1)$.

Тест 1. В качестве облучаемого материала использовалась четырехслойная среда: 1) стекло; 2) роговой слой кожи; 2) эпидермис; 4) дерма. Оптические характеристики моделируемой среды при длине волны $\lambda = 337$ нм приведены в таблице 1.

Данный тест моделирует ситуацию, когда условия (3.9) выполняются для каждого из слоев. В этом случае, при помощи предложенных методов удается определить, как относительные показатели преломления, так и оптические толщины слоев (см. таблицу 2).

Как видно из таблицы 2, чем глубже находится слой тем хуже качество восстановления. Данное обстоятельство обусловлено следующими факторами. Во-первых, чем глубже находится слой, тем меньше вклад в выходящий поток сигнала об излучении прошедшем через него. Во-вторых, на качестве реконструкции оптической толщины слоя сказывается как погрешность нахождения показателей преломления, так и ошибки нахождения оптических толщин предыдущих слоев.

Таблица 1: Характеристики среды для длины волны $\lambda = 337$ нм.

Номер слоя	Вещество	Толщина (мм)	κ_i	μ_i (мм$^{-1}$)	$\mu_{s,i}$ (мм$^{-1}$)	$\overline{g}$
1	Стекло	5	1.7	0.04	0.022	0.0
2	Роговой слой	0.02	1.55	18	16	0.8
3	Эпидермис	0.08	1.5	19.7	16.5	0.72
4	Дерма	0.2	1.4	25	22.7	0.72

Таблица 2: Результаты численного эксперимента (тест 1).

i	κ_i/κ_1	погрешность (%)	τ_{i-1}	погрешность (%)
2	0.913	0.22	0.20002	0.01
3	0.885	0.34	0.3246	4.52
4	0.828	0.6	1.1338	28.05

Тест 2. В качестве облучаемого материала использовалась четырехслойная среда структура, которой аналогична первому тесту. Однако, в первом слое было выбрано оптическое стекло с показателем преломления $\kappa_1 = 1.5$. Данный тест демонстрирует ситуацию, когда условия (3.9) нарушаются для второго и третьего слоев, поскольку $\kappa_2/\kappa_1 = 1.033 \geq 1$ и $\kappa_3/\kappa_1 = 1 \geq 1$. В этом случае удается восстановить только величину $\kappa_4/\kappa_1 = 0.928$. В результате тестирования ее вычисленное значение получилось равным 0.933 и ошибка составила 0.53%.

Отметим одно существенное обстоятельство. Если эффекты отражения и преломления не учитываются, то задача определения оптических толщин не может быть решена в принципе, даже в случае нерассеивающей среды. В этой связи, серьезное ограничение о монотонности последовательности κ_i при определении оптических толщин не выглядит таким уж жестким, несмотря на то, что в трехмерном случае (в рентгеновском диапазоне) для подобной задачи получены гораздо более сильные результаты при менее ограничительных условиях [6,7] (см. также раздел 2 настоящей работы).

Список литературы

[1] Найденов С.В., Рыжиков В.Д., *Об определении химического состава методом мультиэнергетической радиографии*, Письма в ЖТФ, **28**: 9 (2002), 6–13.

[2] Зотьев Д.В., Филиппов М.Н., Ягола А.Г., *Об одной обратной задаче количественного рентгеноспектрального микроанализа*, Вычисл. методы и программирование, **4** (2003), 26–32.

[3] Федосеев В.М., *Рентгеновский способ обнаружения вещества по значению его эффективного атомного номера: Патент РФ №209579*, 1997.

[4] Румянцев А.Н., Мостовой В.И., Сухоручкин В.К., Яковлев Г.В., *Способ обнаружения и неразрушающего анализа веществ, содержащих ядра легких элементов: Патент РФ №2095796*, 1997.

[5] В.Г. Назаров, *Определение химического состава и структуры неоднородной среды методом рентгеновской томографии*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **47**: 8 (2007), 1413–1422.

[6] Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В., *Использование уравнения переноса в томографии*, М.: Логос, 2000.

[7] Anikonov D.S., Nazarov V.G., Prokhorov I.V., *Poorly visible media in X-ray tomography*, Utrecht, Boston: VSP, 2002.

[8] Чандрасекар С., *Перенос лучистой энергии*, М.: ИЛ, 1953.

[9] Розенберг Г.В., *Вектор-параметр Стокса*, Успехи физ. наук, **56**: 1 (1955), 77–109.

[10] Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Максакова С.В., *Математическая модель переноса поляризованного излучения*, Математическое моделирование, **10**: 7 (1998), 61–75.

[11] Siewert C.E., *Determination of the Single Scattering Albedo from Polarization Measurements of the Rayleigh Atmosphere*, Astrophysics and Space Sciences, **60** (1979), 237–239.

[12] Siewert C.E., *Solution an Inverse Problem in Radiative Transfer with Polarization*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer., **30**: 6 (1983), 523–526.

[13] Ukhinov S.A., Yurkov D.I., *Computation of the parametric derivatives of polarized radiation and the solution of inverse atmospheric optics problems*, Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **17**: 3 (2002), 283–303.

[14] Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V., *Tomography problem for the polarized-radiation transfer equation*, Journal Inverse and Ill-Posed Problems, **14**: 6 (2006), 609–620.

[15] Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В., *Численное решение обратной задачи для уравнения переноса поляризованного излучения*, Сибирский журнал вычислительной математики, **11**: 1 (2008), 55–68.

[16] Прохоров И.В., Яровенко И.П., *Исследование задач оптической томографии методами теории переноса излучения*, Оптика и спектроскопия, **101**: 5 (2006), 817–824.

[17] Яровенко И.П., *Численное решение краевых задач для уравнения переноса излучения в оптическом диапазоне*, Вычислительные методы и программирование, **7** (2006), 93–104.

[18] Яровенко И.П., *Математическое моделирование процесса переноса излучения в широком диапазоне энергий с приложениями к задачам рентгеновской и оптической томографии*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18. Владивосток, 2007, 144с.

[19] Прохоров И.В., *Математические задачи теории переноса излучения*, Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18. Владивосток, 2007, 256с.

[20] Prokhorov I.V., Yarovenko I.P., and Nazarov V.G., *Optical tomography problems at layered media*, IOP Publishing LTD. Inverse Problems, **24**: 2 (2008), 025019, 13pp.

Ковтанюк Андрей Егорович
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: ankov@imcs.dvgu.ru

Мун Василий Михайлович
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: s-prite@mail.ru

Назаров Василий Геннадьевич
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: naz@iam.dvo.ru

Прохоров Игорь Васильевич
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: prh@iam.dvo.ru

Яровенко Иван Петрович
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: yarovenko@iam.dvo.ru