S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 465–482 (2008) УДК 512.62, 517.54, 517.956

MSC 30C10, 30C25, 30C75, 30C85, 31A15

ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРОВ И ПРИНЦИПЫ МАЖОРАЦИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В. Н. ДУБИНИН

Abstract. This survey paper is devoted to applications of potential theory to some extremal problems of the geometric function theory of a complex variable. In particular, we present variational principles of conformal mappings that are derived from the properties of generalized condensers and symmetrization in a unified way. The variations of the Robin functions under deformation of a domain or a portion of its boundary are considered. Applications of condensers and majorization principles include distortion theorems for holomorphic functions, covering theorem for p-valent functions in a circular annulus, Bernstein-type inequalities for rational functions with prescribed poles, polynomial inequalities and more.

Keywords: Condenser capacity, hyperbolic capacity, logarithmic capacity, Robin function, symmetrization, dissimmetrization, variational principles, majorization principles, conformal mappings, distortion theorems, covering theorems, p-valent functions, rational functions, polynomials.

Введение

В рамках данного направления исследований получены новые утверждения теории потенциала с целью решения конкретных открытых проблем

Dubinin, V.N., Condenser capacities and majorization principles in the geometric function theory of a complex variable.

© 2008 Дубинин В.Н.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 48.

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 26 ноября 2008 г.

геометрической теории функций и ее приложений. К основным научным достижениям за отчетный период можно отнести следующие результаты.

Установлены принципы симметрии и композиции для конформной емкости обобщенных конденсаторов. Рассмотрена связь этих принципов с классическими леммами Гретша и некоторыми видами симметризации. Даны приложения к оценкам логарифмической и гиперболической емкостей компактов, а также к задачам об экстремальном разбиении [1].

Сформулированы новые вариационные принципы конформных отображений, вытекающие единым образом из теории потенциала, поляризации и симметризации, усиливающие ряд классических и современных утверждений теории функций. Часть полученных результатов можно рассматривать как свойства функций Робена и емкостей Робена, а также как теоремы искажения для однолистных функций в конечносвязных областях [2]–[3].

Изучено поведение емкости конденсатора с параллельными пластинами при таких простейших конформных преобразованиях как взаимное движение пластин, излом пластин и сдвиг пробела. Рассмотрено поведение конформного модуля четырехугольника при сдвигах вершин, поворотах сторон и различных усреднениях. Для указанных выше задач разработаны новые подходы, так как решение их прямыми вычислениями не представляется возможным [4]–[5].

Показано, что прямое применение леммы Шварца и ее обобщений к специально построенным произведениям Бляшке приводит к новым неравенствам для некоторых классов целых функций. В частности, для целых функций экспоненциального типа с нулями в замкнутой нижней полуплоскости установлены теоремы искажения, включая двуточечную теорему искажения на вещественной оси. Аналогичные теоремы получены для полиномов с нулями в замкнутом единичном круге, при этом уточняются классические теоремы Турана и Энкени–Ривлина. Кроме того, доказана теорема о взаимном расположении нулей и критических точек полиномов [6].

Решена одна из задач Смейла о критических значениях полиномов [7].

Доказано, что для любого полинома со связной лемнискатой и с m критическими точками, и для любых $n - m + 1$ точек лемнискаты существует континуум, принадлежащий лемнискате и малой логарифмической емкости, соединяющей эти точки, а также все нули и критические точки полинома. В качестве следствий приводятся некоторые оценки для континуумов наименьшей емкости, содержащих наперед заданные точки [8].

Установлен новый принцип мажорации для мероморфных функций с предписанными полюсами. В качестве приложений получены теоремы покрытия и искажения для рациональных функций и полиномов. В частности, приводится простое доказательство неравенств бернштейновского типа для рациональных функций на нескольких отрезках, полученных ранее Тотиком, Лукашовым и другими математиками [9].

Доказана общая теорема покрытия радиальных отрезков при p–листном отображении кругового кольца. Как следствия из нее вытекают теоремы покрытия для p–листных в круге функций, а также известные теоремы М.А. Лаврентьева, Г.М. Голузина и других математиков о покрытии отрезков и площадей при конформных и однолистных отображениях круга и кольца [10].

Получены новые теоремы искажения для регулярных и ограниченных в круге функций и, в частности, граничные теоремы искажения для многолистных функций. В случае однолистных функций установлены новые многоточечные теоремы искажения с учетом граничного поведения этих функций [11].

Остановимся подробнее на некоторых результатах из работ [1], [2], [6], [7], [9], [10].

1. Вариационные принципы конформных отображений

1.1. **Основные определения и постановки задач.** Указанные в заглавии принципы имеют важное значение в теории функций комплексного переменного и механике сплошных сред [12], [13]. В данном параграфе рассматриваются качественные вариационные принципы, т.е. предложения, позволяющие судить о том, как изменяются конформные отображения при изменении границ отображаемых областей. Например, классический качественный вариационный принцип утверждает, что если функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает область D, $\infty \in D \subset \Delta_z := \{z : |z| > 1\}$ на внешность единичного круга Δ_w так, что $f(\infty) = \infty$, то в бесконечно удаленной точке $|f'(\infty)| \leqslant 1$; в точке $z \in (\partial D) \cap (\partial \Delta_z)$ выполняется неравенство $|f'(z)| \leqslant 1$ (если производная существует), и при любом $\rho > 1$ *линия уровня* $|f(z)| = \rho$ содержится в множестве $|z| \geqslant \rho$. Другими словами, при деформировании области Δ_z в область D модули производных в бесконечности и в неподвижных граничных точках уменьшаются, а линии уровня растягиваются. Аналогичные принципы имеют место для функций, реализующих конформное отображение на канонические области других типов: на полуплоскость $H_w := \{w : \text{Im } w > 0\}$ и на полосу $S_w := \{w : 0 < \text{Im } w < 1\}$ [13, п. 61](в отличие от [13], мы сравниваем функцию f с тождественным отображением, что не ограничивает общности). Указанные принципы можно трактовать как свойства комплексных потенциалов стационарных плоскопараллельных векторных полей. Они вытекают, например, из леммы Шварца либо из принципа максимума для гармонических функций. К настоящему времени известны усиления и уточнения этих принципов в различных направлениях. Кроме того, современные методы геометрической теории функций комплексного переменного позволяют получить новые вариационные теоремы, учитывающие дополнительную нормировку отображения, либо характер деформации канонической области. Однако, эти факты не нашли должного отражения в литературе. В работе [2] частично восполняется указанный пробел. Здесь приводятся вариационные принципы, вытекающие единым образом из теории потенциала и симметризации. Для заданной канонической области K_z мы изучаем свойства функции $f : D \to K_w$ в зависимости от *деформации* $(D \backslash K_z) \cup (K_z \backslash D)$. В случае $D \subset K_z$ будем говорить о *внутренней* деформации, а в случае $D \supset K_z$– о *внешней* деформации области K_z. Основное внимание будет уделено вариации модуля производной функции f, т.е. оценкам *растяжений*. Помимо указанных выше канонических областей введем также кольцо $K_w(R) = \{w : 1 < |w| < R\}$ и четырехугольник $Q_w(a_1, a_2, a_3, a_4)$ в плоскости $\mathbf{C}_w$ с прямолинейными сторонами и вершинами в точках a_1, a_2, a_3, a_4, расположенными в порядке положительного обхода его границы. В соответствии с рассматриваемыми вариационными принципами определим следующие классы функций:

$\mathcal{V}_1$– класс функций $w = f(z)$, каждая из которых конформно и однолистно отображает некоторую односвязную область $D = D(f)$, $\infty \in D \subset \overline{\mathbf{C}}_z$, на внешность единичного круга Δ_w так, что в окрестности бесконечности имеет место разложение

$$f(z) = \alpha z + O(1), \qquad z \to \infty;$$

$\mathcal{V}_2$– класс функций $w = f(z)$, конформно и однолистно отображающих область $D = D(f)$, для которой множество $(H_z \backslash D) \cup (D \backslash H_z)$ ограничено, на полуплоскость H_w и таких, что справедливо разложение

$$f(z) = z + O(1), \qquad z \in D, \qquad z \to \infty;$$

$\mathcal{V}_3$– класс функций $w = f(z)$, конформно и однолистно отображающих область $D = D(f)$, удовлетворяющую условию $(S_z \backslash D) \cup (D \backslash S_z)$ ограничено, на полосу S_w так, что

$$\lim_{\substack{z\to+\infty \\ z\in D}} f(z) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{z\to-\infty \\ z\in D}} f(z) = -\infty.$$

$\mathcal{V}_4(l)$– класс функций $w = f(z)$, удовлетворяющих следующим условиям: область определения функции f представляет собой четырехугольник $D = D(f)$ с вершинами в точках a_1, a_2, a_3, a_4, расположенными в порядке положительного обхода его границы, причем сторона a_1a_2 принадлежит отрезку $[l, l+i]$, $l > 0$, сторона a_3a_4 принадлежит отрезку $[i, 0]$; функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает четырехугольник D на некоторый прямолинейный четырехугольник $Q(L, L+i, i, 0)$, $L = L(f) > 0$, так, что имеет место соответствие вершин $f(a_1) = L$, $f(a_2) = L + i$, $f(a_3) = i$, $f(a_4) = 0$;

$\mathcal{V}_5$– класс функций $w = f(z)$, которые заданы в двусвязной области $D = D(f)$, отделяющей круг $|z| \leqslant 1$ от бесконечности, и отображают эту область конформно и однолистно на кольцо $K_w(R)$ так, что внешняя граничная компонента области D соответствует окружности $|w| = R, R = R(f)$.

Результаты статьи [2] можно рассматривать как дополнение к вариационным принципам [13] и методу мажорантных областей [14], которые нашли применение в различных областях математической физики. С другой стороны, теоремы п.п. 1.2–1.3 суть новые свойства и приложения функций Робена и емкостей Робена [15], изучению и применению которых в последнее время посвящено немало работ. В частности, теоремы п.1.3 отвечают в некоторой степени на вопрос Дюрена [15, с. 188] о перспективах применения метода симметризации при изучении свойств емкостей Робена. В отличие от [15] мы рассматриваем функцию Робена не только с полюсом в точке области B, но и ее аналог с полюсом в граничной точке. Напомним определение этой функции.

Пусть область B ограничена конечным числом аналитических кривых, Γ – непустое замкнутое подмножество ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных жордановых дуг, и пусть z_0 – конечная точка множества $\overline{B} \backslash \Gamma$. Обозначим через $g(z) = g_B(z, z_0, \Gamma)$ вещественную непрерывную функцию на $\overline{B} \backslash \{z_0\}$, непрерывно дифференцируемую на $\overline{B} \backslash (\Gamma \cup \{z_0\})$, гармоническую в $B \backslash \{z_0\}$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$g(z) = 0 \text{ при } z \in \Gamma,$$
$$\frac{\partial g}{\partial n}(z) = 0 \text{ при } z \in (\partial B) \setminus (\Gamma \cup \{z_0\}),$$

$g(z) + \log|z - z_0|$ — гармоническая функция в окрестности точки z_0 ($\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к гарнице ∂B).

В случае, когда $z_0 = \infty$, функция $g_B(z, z_0, \Gamma)$ определяется аналогично с той лишь разницей, что требуется гармоничность функции $g_B(z, z_0, \Gamma) - \log|z|$ в окрестности бесконечности. Определение функции $g_B(z, z_0, \Gamma)$ для конечносвязных областей с негладкой границей осуществляется с помощью конформного отображения (см. [16]). При $z_0 \in B$ функцию $g_B(z, z_0, \Gamma)$ называют *функцией Робена* области B с полюсом в точке z_0. В случае, когда $\Gamma = \partial B$, функция Робена совпадает с функцией Грина. Введем также обобзначение

$$r(B, \Gamma, z_0) = \exp\{\lim_{z \to z_0} [g_B(z, z_0, \Gamma) + \log|z - z_0|]\}$$

в случае конечной точки z_0 и

$$r(B, \Gamma, \infty) = \exp\{\lim_{z \to \infty} [g_B(z, \infty, \Gamma) - \log|z|]\}.$$

При $z_0 = \infty$ и $z_0 \in B$ величина $r^{-1}(B, \Gamma, z_0)$ называется *емкостью Робена* множества Γ относительно области B. Основным инструментом при доказательстве теорем п.п.1.2–1.3 является понятие емкости обобщенного конденсатора [16].

1.2. **Изменение функций Робена при деформации областей и заданных участков границ.** Рассмотрим сперва общую вариационную теорему для квадратичных форм, коэффициенты которых зависят от емкостей Робена и функций Робена. При этом ограничимся внутренними деформациями областей, так как соответствующие утверждения для внешних деформаций отличаются лишь обозначениями. Пусть D и K_z – конечносвязные области без изолированных граничных точек, $D \subset K_z \subset \overline{\mathbf{C}}_z$, и пусть K_w– экземпляр области K_z в плоскости $\overline{\mathbf{C}}_w$. Пусть Γ и Γ' – замкнутые подмножества соответственно ∂D и ∂K_z, состоящие из конечного числа невырожденных связных компонент; $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$– совокупность различных допустимых точек в $\overline{D} \setminus (\Gamma \cup \Gamma')$ и $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел, $\sum\limits_{k=1}^n \delta_k^2 \neq 0$. В утверждениях единственности для приведенных модулей важную роль играет функция

$$u(z) = \sum_{k=1}^n \delta_k g_{K_z}(z, z_k, \Gamma),$$

которую будем называть *потенциальной функцией* области K_z, множества Γ и совокупностей Z, Δ, Ψ. Предположим, что существует функция $w = f(z)$, которая конформно и однолистно отображает область D на область K_w и для которой существуют производные $f'(z_k)$, $k = 1, ..., n$, и пусть $f(\Gamma)$ – образ Γ в смысле граничного соответствия. Ввиду конформной инвариантности [16] имеем

$$\sum_{k,l=1}^n \alpha_k \delta_k \delta_l \left[g_D(z_k, z_l, \Gamma) - g_{K_z}(z_k, z_l, \Gamma')\right] =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l \left[g_{K_w}(f(z_k), f(z_l), f(\Gamma)) - g_{K_z}(z_k, z_l, \Gamma') \right], \qquad (1.1)$$

где $\alpha_k = 2$, если $z_k \in D$ и $\alpha_k = 1$ при $z_k \in \partial D$, $k = 1, ..., n$, а разность в квадратных скобках в случае $k = l$ определяется по формуле

$$g_{\varphi(B)}(\varphi(z), \varphi(z), \varphi(\Gamma)) - g_{B'}(z, z, \Gamma') =$$
$$= \lim_{\zeta \to z} \left[g_{\varphi(B)}(\varphi(\zeta), \varphi(z), \varphi(\Gamma)) - g_{B'}(\zeta, z, \Gamma') \right],$$

φ – некоторое отображение, в частности, тождественное. Неравенства для левой части (1.1) можно трактовать как свойства монотонности квадратичной формы, в то время как неравенства для правой части суть качественные вариационные принципы. Таким образом, доказательство некоторых вариационных принципов сводится к применению методов теории потенциала. Имеет место

Теорема 1.1. [2] *Пусть области D, K_z, K_w, множества Γ, Γ', совокупности Z, Δ и функция f определены выше. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *если $D = K_z$, то в случае $\Gamma \subset \Gamma'$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l \left[g_{K_w}(f(z_k), f(z_l), f(\Gamma)) - g_{K_z}(z_k, z_l, \Gamma') \right] \geqslant 0, \qquad (1.2)$$

а в случае $\Gamma \supset \Gamma'$ выполняется неравенство в другую сторону

$$\sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l \left[g_{K_w}(f(z_k), f(z_l), f(\Gamma)) - g_{K_z}(z_k, z_l, \Gamma') \right] \leqslant 0, \qquad (1.3)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\Gamma = \Gamma'$

2) *если $\overline{(\partial D) \cap K_z} \cap \left(\Gamma \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \{z_k\} \right) \right) = \emptyset$ и $\Gamma = \Gamma'$, то вновь справедливо неравенство* (1.2),*причем знак равенства имеет место в том и только том случае, когда $\overline{D} = \overline{K_z}$ и $((\partial D) \backslash \Gamma) \cap K_z$ состоит из конечного числа кусочно гладких кривых, во внутренних точках которых для потенциальной функции и множеств K_z, Γ и совокупностей Z, Δ выполняется равенство $\partial u / \partial n = 0$;*

3) *если $(\partial D) \cap K_z \subset \Gamma$ и $\Gamma' = (\partial K_z) \backslash ((\partial D) \backslash \Gamma)$, то выполняется неравенство* (1.3) *со знаком равенства в том и только в том случае, когда $\overline{D} = \overline{K_z}$ и потенциальная функция множеств K_z, Γ' и совокупностей Z, Δ равна нулю на множестве $\Gamma \cap K_z$.*

Как уже отмечалось выше, неравенства (1.2) и (1.3) можно рассматривать как обобщенную монотонность функций Робена. Частные случаи такой монотонности были получены ранее с помощью принципа максимума для гармонических функций [17], вариационной формулы для функции Грина [18], либо из свойств экстремальной длины семейств кривых (см. [15, с. 183]). Отметим следующее наблюдение. Пусть область D, множество Γ и совокупности Z, Δ определены выше, либо $D = \overline{\mathbf{C}}_z$, $\Gamma = \emptyset$, и пусть область $D \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \{z_k\}$ содержит замкнутое множество, ограниченное кривыми γ_j, заданными уравнениями $y = g_j(x)$; $g_1(x) \leqslant g_2(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $g_j(0) =$

$g_j(a) = 0$, $j = 1, 2$. Положим $D_j = D \backslash \gamma_j$, Γ_j^+ — объединение Γ с верхним берегом разреза γ_j, Γ_j^- — объединение Γ с нижним берегом разреза γ_j, $j = 1, 2$. Последовательное применение монотонности квадратичной формы в соответствии с утверждениями 3) и 2) теоремы 1.1 приводит к неравенствам

$$\sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l \left[g_{D_1}(z_k, z_l, \Gamma_1^+) - g_{D_2}(z_k, z_l, \Gamma_2^+) \right] \geqslant 0,$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l \left[g_{D_1}(z_k, z_l, \Gamma_1^-) - g_{D_2}(z_k, z_l, \Gamma_2^-) \right] \leqslant 0.$$

Учитывая результат С.Р. Насырова [19, с. 96], заключаем, что выписанные неравенства являются далеко идущими обобщениями утверждения М.А. Лаврентьева: при неотрицательной циркуляции поля скоростей подъемная сила, действующая на дугу γ_2, не меньше подъемной силы, действующей на дугу γ_1.

Выбирая в теореме 1.1 в качестве K_z конкретную каноническую область, получаем вариационные принципы в соответствующих классах функций. Рассмотрим некоторые примеры с комментариями и дополнениями. Пусть функция $f \in \mathcal{V}_1$, $D(f) \subset \Delta_z$ и пусть $\Gamma-$ подмножество единичной окружности $|z| = 1$, состоящее из конечного числа дуг и $\Gamma \subset \partial D(f)$. Утверждение 2) теоремы 1.1 приводит к теореме искажения, в которой модули $|f'(z_k)/f(z_k)|$ оцениваются через внутренние радиусы и функции Грина областей $\overline{\mathbf{C}}_z \backslash \Gamma$ и $\overline{\mathbf{C}}_w \backslash f(\Gamma)$. В частности, если дополнительно $n = 1$, $z_1 = \infty$ и $\delta_1 = 1$, то неравенство (1.2) (где $\Gamma = \Gamma'$) совпадает с неравенством Поммеренке

$$\sqrt{|f'(\infty)|}\ \mathrm{cap}\Gamma \geqslant \mathrm{cap} f(\Gamma)$$

[20, с. 217] (здесь cap$(\cdot)$ означает логарифмическую емкость; соответствующее утверждение в работе [20] сформулировано для ограниченных в круге функций и доказано при более слабых ограничениях на отображение f). Если дуга Γ стягивается в граничную точку z, где существует производная $f'(z)$, то неравенство Поммеренке дает

$$\sqrt{|f'(\infty)|} \geqslant |f'(z)|, \tag{1.4}$$

что уточняет классический принцип, упомянутый в начале п.п.1.1.

Пусть теперь функция $f \in \mathcal{V}_2$ и $D(f) \subset H_z$. Тогда функцию f можно рассматривать как комплексный потенциал бесконечно глубокого течения над плоским дном, обтекающего препятствие $H_z \backslash D(f)$, и с гидродинамической нормировкой, означающей невозмущенность потока на бесконечности.

Следствие 1.1. *Если функция $f \in \mathcal{V}_2$, $D(f) \subset H_z$ и Γ –замкнутое ограниченное подмножество $\partial D(f)$, $\Gamma \cap \overline{H_z \setminus D(f)} = \emptyset$, то*

$$cap f(\Gamma) \leqslant cap \Gamma. \tag{1.5}$$

Доказательство вытекает из теоремы 1.1 (случай 2), $n = 1$, $z_1 = \infty$, если заметить, что "функция Робена" верхней полуплоскости с полюсом в бесконечности (относительно Γ ($f(\Gamma)$)) является сужением функции Грина области $\overline{\mathbf{C}}_z \backslash \Gamma$ ($\overline{\mathbf{C}}_w \backslash f(\Gamma)$) с полюсом в $z = \infty$ на эту полуплоскость. Неравенство (1.5) содержит классическую оценку $f'(z) \leqslant 1$, справедливую для всех точек z, лежащих на границе $D(f)$ в стороне от препятствия $H_z \backslash D(f)$ [13, с. 61].

Аналогичные следствия устанавливаются в других классах функций, определенных в п. 1.1. Некоторые из этих результатов допускают эквивалентную формулировку в разных классах функций ввиду наличия подходящего конформного отображения. Этим мы завершаем анализ теоремы 1.1, хотя существует немало примеров ее реализации.

1.3. **Неравенства для растяжений и сравнение.** Согласно классическим вариационным принципам, при внутренней деформации области растяжение в неподвижных точках границы уменьшается. Естественно предположить, например, что в точках более удаленных от деформации изменение растяжения будет менее значительным. Сравнение растяжений в разных точках при заданной деформации иногда можно интерпретировать как сравнение деформаций при их удалении от заданной точки. Кроме того, сравнение деформаций по степени их влияния на растяжение и другие характеристики заданной функции представляет самостоятельный интерес. Рассмотрим некоторые из этих вопросов для введенных ранее классов функций.

Теорема 1.2. [2] *Предположим, что функция f принадлежит классу $\mathcal{V}_2$ либо классу $\mathcal{V}_3$, и пусть $K_z = H_z$ в первом случае и $K_z = S_z$ во втором, $D = D(f)$ и β — вещественное число. Предположим также, что внутренняя часть деформации $K_z \backslash D$ лежит в полуплоскости $Re\, z < \beta$, а внешняя $D \backslash K_z$ — в полуплоскости $Re\, z > \beta$. Пусть Γ — замкнутое подмножество ∂D, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент и обладающее следующим свойством: $\Gamma \supset \{\partial[(K_z \backslash D) \cup (D \backslash K_z)]\} \backslash \partial K_z$, и если точка $z \in \Gamma \cap \partial K_z$, $Re\ z \geqslant \beta$, то необходимо $-\overline{z} + 2\beta \in \Gamma$. Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ — совокупность различных допустимых точек в $\overline{D} \backslash \Gamma$, и $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ — совокупность положительных чисел. Тогда*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l \left[g_{K_w}(f(z_k'), f(z_l'), f(\Gamma)) - g_{K_w}(f(z_k), f(z_l), f(\Gamma)\right] \geqslant 0, \tag{1.6}$$

где $\alpha_k = 2$, если $z_k \in D$, $\alpha_k = 1$ при $z_k \in \partial D$, а точки z_k', $k = 1, ..., n$, определяются следующим образом: если для соответствующей точки z_k совокупности Z существует точка $z_l \in Z$, симметричная z_k относительно прямой $Re\ z = \beta$, то $z_k' = z_k$ при $Re\ z_k \geqslant \beta$, $\delta_k \geqslant \delta_l$ либо $Re\ z_k \leqslant \beta$, $\delta_k \leqslant \delta_l$, и $z_k' = z_l$ при $Re\, z_k \geqslant \beta$, $\delta_k < \delta_l$ либо $Re\, z_k \leqslant \beta$, $\delta_k > \delta_l$; если же симметричная точка $-\overline{z_k} + 2\beta$ не принадлежит совокупности Z, то полагаем $z_k' = z_k$ при $Re\ z_k \geqslant \beta$ и $z_k' = -\overline{z_k} + 2\beta$ при $Re\ z_k \leqslant \beta$.

Поясним неравенство (1.6) на следующем простом примере.

Следствие 1.2. *Пусть $f \in \mathcal{V}_2$, $D(f) \subset H_z$ и $H_z \backslash D(f)$ лежит в левой полуплоскости $Re\ z < 0$. Тогда для любых положительных z_1, z_2 и y, $z_1 < z_2$, выполняются неравенства*

$$Im\ f(z_1 + iy) \leqslant Im\ f(z_2 + iy),$$

$$f'(z_1) \leqslant f'(z_2).$$

Таким образом, в условиях следствия 1.2 (и в терминах комплексного потенциала) независимо от формы препятствия $H_z \backslash D(f)$ линии тока справа от мнимой оси монотонно снижаются, а скорость течения вдоль вещественной оси не убывает. Привлекая, дополнительно, лемму Хопфа, можно убедиться на основании доказательства следствия 1.2, что скорость на вещественной оси строго возрастает. Аналогичные утверждения для производных в граничных точках эффективно использовались А.Ю. Солыниным и другими авторами при решении проблем о "минимальной площади" в разных постановках (см., например, [21]).

Теорема 1.3. *Пусть функция $f \in \mathcal{V}_5$, $D(f) \subset K_z(R)$ и одна из граничных компонент области $D(f)$ есть окружность $|z| = 1$. Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ — совокупность различных допустимых точек в $D(f) \cup \{z : |z| = 1\}$ и $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ — совокупность отличных от нуля вещественных чисел, удовлетворяющих условию: на любой окружности $|z| = \rho$, $1 \leqslant \rho < R$, расположено не более двух точек множества Z, причем если точки z_k и z_l имеют одинаковый модуль, то необходимо $\delta_k\delta_l < 0$. Тогда*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k\delta_k\delta_l \left[g_{K_z(R)}(z_k^*, z_l^*, \Gamma_2) - g_{K_w(R(f))}(f(z_k), f(z_l), \Gamma_1)\right] \geqslant 0,$$

где α_k как и выше, $z_k^* = |z_k|$, если $\delta_k > 0$ и $z_k^* = -|z_k|$ при $\delta_k < 0$, $k = 1, ..., n$; $\Gamma_2 = \{z : |z| = R\}$, $\Gamma_1 = \{w : |w| = R(f)\}$.

Применение круговой симметризации и симметризации Штейнера [22] позволяет получить аналогичные результаты для функций классов $\mathcal{V}_1$–$\mathcal{V}_3$. Приведем теперь пример иного характера. Если функция $f \in \mathcal{V}_4(l)$, то область $D(f)$ можно интерпретировать, например, как область фильтрации, $f/L(f)$ — комплексный потенциал фильтрационного потока, а $1/L(f)$ — расход жидкости. Рассмотрим конденсатор $C(f) = (D(f), \{a_4a_1, a_2a_3\}, \{0, 1\})$. Из монотонности емкости конденсатора вытекает, что если сторона a_1a_2 совпадает с отрезком $[l, l+i]$, а сторона a_3a_4 с отрезком $[i, 0]$, то в случае $D(f) \subset Q_z(l, l+i, i, 0)$ выполняется $L(f) \geqslant l$, а в случае $D(f) \supset Q_z(l, l+i, i, 0)$ имеем $L(f) \leqslant l$. В следующей теореме показывается, что внутренние деформации четырехугольника в большей степени влияют на величину $L(f)$, чем внешние деформации той же формы.

Теорема 1.4. *Если функция $f \in \mathcal{V}_4(l)$, $D(f) \subset \Pi := \{z : 0 \leqslant Re\ z \leqslant l\}$, и если отрезки $[l, l+i]$ и $[i, 0]$ являются сторонами четырехугольника $D(f)$, а две другие стороны отличаются друг от друга лишь сдвигом вдоль мнимой оси, то $l \leqslant L(f)$.*

Пусть теперь $f_k \in \mathcal{V}_4(l)$, $D(f_k) \subset \Pi$, $k = 1, 2$, и соответствующие стороны четырехугольников $D(f_1)$ и $D(f_2)$ суть отрезки $[l, l+i]$ и $[i, 0]$. Пусть две другие стороны четырехугольника $D(f_1)$ представляют собой некоторые кривые γ_1 и γ_2, ($0 \in \gamma_1$, $l \in \gamma_1$), а стороны четырехугольника $D(f_2)$ образованы из сторон $D(f_1)$ отражением γ_1 — относительно вещественной оси, а γ_2 — относительно прямой $Im\ z = 1$. Тогда $l \leqslant (L(f_1) + L(f_2))/2$.

Наконец, если $f \in \mathcal{V}_4(l)$, $D(f) \subset \Pi$, отрезки $[l, l+i]$, $[i, 0]$ являются сторонами четырехугольника $D(f)$, и две другие стороны обладают центральной симметрией a_4a_1 относительно точки $l/2$, а a_2a_3 относительно $l/2 + i$), то $l \leqslant L(f)$.

Этими примерами далеко не исчерпываются приложения поляризации, симметризации и диссимметризации [22] к вариационным принципам конформных отображений. Здесь рассматривались только подходы к решению указанных проблем на примере выбранных классов функций. В работе [2] изучается так же геометрия линий уровня в классах $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_5$.

2. Обобщенная задача Сеге о покрытии радиальных отрезков

Теоремы покрытия при регулярных отображениях составляют важную часть геометрической теории функций комплексного переменного [12]. К первому результату такого рода можно отнести теорему Кебе–Бибербаха об $1/4$, суть которой состоит в следующем. Если функция f регулярна и однолистна в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условию $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, то образ круга $|z| < 1$ при отображении f содержит круг с центром в начале и радиуса $1/4$. Другими словами, любой отрезок с концом в начале координат длины меньшей $1/4$ содержится в образе круга при указанном отображении. В 1922 году Сеге распространил этот результат на случай двух диаметрально противоположных отрезков и поставил вопрос о длине n радиальных отрезков, расположенных под равными углами. В разное время указанной задачей занимались Полиа, Гретш, М.А. Лаврентьев, Ренгель, Г.М. Голузин, Дженкинс, П.М. Тамразов и другие математики. Естественно поставить вопрос о получении аналогичных утверждений для произвольных регулярных функций, не обязательно однолистных. Известный пример регулярной функции показывает, что без дополнительных ограничений на функцию f здесь не обойтись [12, с. 73]. В заметке [10] рассматривается теорема покрытия отрезков для p–листных функций с учетом листности накрытия. Функция f называется p–листной в области D, если она принимает каждое значение в D не более, чем в p точках. Обозначим через $G(z; R)$ экстремальную функцию Гретша, которая конформно и однолистно отображает кольцо $1 < |z| < R$ на внешность единичного круга $|w| > 1$ с разрезом по вещественной положительной полуоси $w \geqslant G(R; R) > 1$. Нетрудно показать, что

$$G(z; R) = \tau \operatorname{sn}^2 \left(\left(\frac{i}{\pi} \log zR + 1 \right) \mathbf{K}(\tau); \tau \right),$$

где $\mathbf{K}(\tau)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем τ, $\operatorname{sn}(\cdot; \tau)$ — эллиптический синус, и $\tau = 1/G(R; R)$ — решение уравнения

$$\log R = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1 - \tau^2})}{\mathbf{K}(\tau)}.$$

Функция $E(\zeta; n, p, R) := \sqrt[n]{G(\zeta^n; R^{np})}$, $E(1; n, p, R) = 1$, конформно и однолистно отображает кольцо $1 < |\zeta| < R^p$ на внешность круга $|w| > 1$ с разрезами вдоль лучей $\{w : \arg w^n = 0, \ |w^n| \geqslant G(R^{np}; R^{np})\}$. Всюду ниже под римановой поверхностью будем понимать поверхность, склеенную из конечного числа плоских областей с естественным определением проекций и окрестностей для точек на такой поверхности. Жорданову кривую γ на римановой поверхности назовем отрезком, если отображение проектирования осуществляет взаимно однозначное соответствие между γ и некоторым отрезком плоскости. Под длиной γ понимается длина соответствующего отрезка.

Теорема 2.1. [10] *Пусть функция* $w = f(z)$ *регулярна и* p*–листна в кольце* $1 \leqslant |z| < R$, *причем* $\int\limits_{|z|=1} d\arg f(z) = 2p\pi$; $|f(z)| \geqslant 1$ *при* $1 \leqslant |z| < R$ *и* $|f(z)| = 1$, *когда* $|z| = 1$. *Обозначим через* $L_f(r, \varphi)$ *верхнюю грань длин отрезков на римановой поверхности функции, обратной к функции* $w = f(z)$, $1 < |z| < r$, *лежащих над лучом* $\arg w = \varphi$ *и содержащих на конце точку над окружностью* $|w| = 1$, $1 < r \leqslant R$. *Тогда для любых* θ, $n \geqslant 1$ *и* $1 < r \leqslant R$ *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} (L_f(r, \theta + 2\pi k/n) + 1) \geqslant G(r^{np}; R^{np}). \tag{2.1}$$

Равенство достигается для функций $f(z) = e^{i\theta} E(\alpha z^p; n, p, R)$, $|\alpha| = 1$.

При $p = 1$ неравенство (2.1) является распространением классических результатов Гретша ($n = 1$) и Кубо ($n = 2$) для однолистных функций на случай произвольных n [22]. В полном объеме указанная теорема приводится впервые в [10]. Переходя в неравенстве (2.1) от функции f к функции $f(zR)/R$, $1/R < |z| < 1$, стандартными рассуждениями при $R \to \infty$ получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть функция* $w = f(z) = z^p + \ldots$ *регулярна и* p*–листна в круге* $|z| < 1$, *и пусть* $\Lambda_f(r, \varphi)$ *означает верхнюю грань длин отрезков на римановой поверхности функции, обратной к функции* $w = f(z)$, $|z| < r$, *лежащих над лучом* $\arg w = \varphi$ *и содержащих на конце точку над* $w = 0$. *Тогда для любых* θ, $n \geqslant 1$ *и* $0 < r \leqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \Lambda_f(r, \theta + 2\pi k/n) \geqslant r^p (1 + r^{np})^{-2/n}.$$

Равенство достигается для функций $f(z) = z^p[1 + (e^{-i\theta} z^p)^n]^{-2/n}$, p*–кратно покрывающих* w*–плоскость с разрезами вдоль лучей* $\{w : \arg w^n = \theta n, \ |w^n| \geqslant 1/4\}$.

При $r = 1$ это утверждение включает в себя п.1–п.3 известной теоремы Г.М. Голузина. При $p = 1$ и любом другом r, $0 < r \leqslant 1$, указанное утверждение установлено ранее (см. [22, с.58]), а в случае любых p и r является новым. Отметим, что частный случай $p = 1$, $r = 1$ вбирает в себя классические утверждения Г.М. Голузина о покрытии отрезков и площадей (см. [22, с. 56-57]).

3. Принципы мажорации для мероморфных функций

Функцию Грина $g_D(z, \zeta)$ области D называют *классической*, если она обращается в нуль на границе D. Для данной области D, имеющей классическую функцию Грина, набора точек $\{z_k\}_{k=1}^m$, $z_k \in D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $k = 1, \ldots, m$, и вещественного числа $r > 0$ введем обозначение

$$D_r(z_1, \ldots, z_m) = \left\{ z : \sum_{k=1}^{m} g_D(z, z_k) > r \right\}.$$

Теорема 3.1. [9] *Пусть области* D *и* G *имеют классические функции Грина,* $D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $\infty \in G \subset \overline{\mathbb{C}}_w$. *Предположим, что функция* f *является мероморфной* *в области D, имеет по крайней мере один полюс в D и удовлетворяет условию $f(\partial D) \subset \partial G$ (т.е. при стремлении точки z к границе области D все предельные значения $f(z)$ принадлежат границе G). Тогда для любого положительного r справедливо включение*

$$f(D_r(z_1,\ldots,z_m)) \setminus f(\partial D_r(z_1,\ldots,z_m)) \supset G_r(\infty), \tag{3.1}$$

где $z_1,\ldots,z_m$ — полюсы функции f в области D, каждый из которых учитывается столько раз, каков его порядок.

В качестве следствия этой теоремы отметим утверждение К.Дочева (см.[23]): если полином $P(z) = c_n z_n + \ldots + c_0,\ c_n \neq 0$, с вещественными коэффициентами $c_k,\ k = 0,1,\ldots,n$, нормирован условиями

$$\max\{P(z) : z \in [-1,1]\} = -\min\{P(z) : z \in [-1,1]\} = 1,$$

то для любого $\rho > 1$ образ эллипса $|z-1| + |z+1| = \rho + 1/\rho$ при отображении $w = P(z)$ лежит внутри эллипса $|w-1| + |w+1| = \rho^n + 1/\rho^n$. Здесь экстремальным является случай, когда $P(z)$ совпадает с полиномом Чебышёва первого рода $T_n(z)$, который n–кратно покрывает второй эллипс первым. К. Дочев получил указанный результат путем оригинального исследования соответствующих тригонометрических полиномов.

Включение (3.1) при достаточно больших r дает следующую оценку.

Следствие 3.1. *Пусть в условиях предыдущей теоремы точка $z_0 \in D$ является полюсом функции f порядка n, в окрестности которого справедливо разложение*

$$\begin{array}{lll} f(z) = c(z-z_0)^{-n} + \ldots, & \text{когда } z_0 \text{ конечно}, & \\ f(z) = cz^n + \ldots, & \text{когда } z_0 = \infty, & \end{array} \qquad c \neq 0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|c| \leqslant \frac{(r(D,z_0))^n}{r(G,\infty)} \exp\left\{ \sum_{z_k \neq z_0} g_D(z_0,z_k) \right\},$$

где суммирование производится с учетом порядка по всем полюсам z_k функции f, лежащим в области D и отличным от z_0, а $r(\Omega,a)$ означает внутренний радиус области Ω относительно точки a.

Если в качестве функции f взять полином $P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$ степени n и если $P(E) \subset F$, где E и F — некоторые компакты, то следствие 3.1 дает оценку

$$|c_n| \leqslant \frac{\operatorname{cap} F}{(\operatorname{cap} E)^n},$$

где $\operatorname{cap}(\cdot)$ означает логарифмическую емкость. Это неравенство вытекает также из теоремы Фекете [12, гл.VII, § 1]. В частности, если полином

$$P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$$

с вещественными коэффициентами удовлетворяет на двух отрезках

$$E = [-1,-\alpha] \cup [\alpha,1], \qquad 0 < \alpha < 1,$$

условию $|P| \leqslant 1$, то

$$|c_n| \leqslant \frac{2^{n-1}}{(1-\alpha^2)^{n/2}},$$

равенство достигается для четных n и для полиномов вида

$$T_{n/2}\left(\frac{2x^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Следствие 3.2. *Пусть в условиях теоремы* 3.1 *область D имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана γ, ни одна точка которой не является предельной для граничных точек, не принадлежащих γ, а область G имеет на своей границе такую же дугу Γ. Предположим, что функция f отображает дугу γ на некоторую дугу $f(\gamma)\subset\Gamma$ так, что положительной ориентации γ соответствует положительная ориентация на Γ. Тогда для любой точки $z\in\gamma$ справедливо неравенство*

$$|f'(z)|\frac{\partial g_G(f(z),\infty)}{\partial n}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_D(z,z_k)}{\partial n}, \tag{3.2}$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к соответствующей граничной дуге.

В случае, когда f — рациональная функция степени n, являющаяся отношением двух вещественных полиномов, и для некоторых компактов E и F на вещественной оси выполняется $f(E)\subset F$, неравенство (3.2) совпадает с неравенством А.Л. Лукашова (см.[24] , [25])

$$|f'(x)|\widetilde{\omega}_F(\infty,f(x))\leqslant\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\omega}_E(z_k,x), \tag{3.3}$$

справедливого для любой внутренней точки x компакта E. Здесь

$$\widetilde{\omega}_E(z,x)=\frac{d}{dx}(\omega(z,[\inf E,x]\cap E,\overline{\mathbb{C}}_z\setminus E)),$$

где $\omega(z,e,\Omega)$ — гармоническая мера множества $e\subset\partial\Omega$ в точке z относительно области $\Omega(D=\overline{\mathbb{C}}_z\setminus E,\ G=\overline{\mathbb{C}}_w\setminus F,\ m=n)$. Выбирая конкретные компакты E и F в (3.3), получаем ряд известных неравенств Бернштейна–Сегё, Ахиезера, Виденского, Русака, Барана–Тотика и других математиков (см. [24], а также замечания по истории вопроса в [24, § 5]).

4. Неравенства для критических значений полиномов

Всюду в дальнейшем P означает алгебраический полином степени $n,\ n\geqslant 2$. Точка ζ называется критической точкой полинома P, если $P'(\zeta)=0$. Под критическим значением полинома P понимается величина $P(\zeta)$, где ζ — критическая точка P. Несмотря на простоту этих понятий имеется много нерешенных проблем, связанных с критическими точками и критическими значениями полиномов. В работе [26] в связи с изучением сходимости метода Ньютона вычисления корней полиномов Смейл установил неравенства для критических значений и поставил вопрос о точности этих оценок [26, с.9, 11, 31–33]. В частности, для полиномов $P(z)=c_nz^n+\ldots+c_1z,\ c_1\neq 0$, Смейл доказал существование критической точки ζ, удовлетворяющей неравенству

$$|P(\zeta)|\left|\frac{c_n}{c_1^n}\right|^{1/(n-1)}\leqslant\left(2^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}\right)^{1/(n-1)}\leqslant 4 \tag{4.1}$$

(см. [26, доказательство теоремы 1, с. 9–11]). В работе [7] получен следующий результат.

Теорема 4.1. *Если $P(z) = z^n + \ldots + c_1 z$, то справедливо неравенство*

$$\min\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\} \leqslant (n-1)\left|\frac{c_1}{n}\right|^{n/(n-1)}. \tag{4.2}$$

Равенство в (4.2) достигается для полиномов вида $P(z) = z^n + c_1 z$, где c_1 — произвольное комплексное число.

Таким образом, мы улучшаем оценку (4.1) с заменой правых частей на $(n-1)\times(1/n)^{n/(n-1)}$, и наша оценка точная. Заметим, что левая часть неравенства (4.2) неоднократно встречается в работе [26].

Сравним неравенство (4.2) с гипотезой Смейла о "среднем значении"[26, с.33]. Неравенство (4.2) дает

$$\min_{1\leqslant\nu\leqslant n-1}|P(\zeta_\nu)| \leqslant |c_1|\frac{n-1}{n}\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1}|\zeta_\nu|},$$

в то время как указанная гипотеза гласит

$$\min_{1\leqslant\nu\leqslant n-1}\left|\frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu}\right| \leqslant |c_1|\frac{n-1}{n} \tag{4.3}$$

с равенством для того же полинома $P(z) = z^n + c_1 z,\ c_1 \neq 0$. Выписанные неравенства суть близкие, но независимые соотношения. Предположение (4.3) доказано различными методами в ряде частных случаев (см. [27, гл.7]). Доказательство теоремы 4.1 основано на применении диссимметризации [22].

Теорема 4.2. [7] *Пусть ζ_ν, $\nu = 1, \ldots, n-1$, — критические точки полинома $P(z) = z^n + \ldots + c_1 z$, и пусть все нули этого полинома, отличные от $z = 0$ расположенные на $n-1$ лучах, выходящих из точки $z = 0$ под равными углами величины $2\pi/(n-1)$ так, что каждый луч содержит один и только один нуль. Тогда*

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1}|P(\zeta_\nu)|} \geqslant (n-1)\left|\frac{c_1}{n}\right|^{n/(n-1)}.$$

Равенство достигается для полиномов вида $P(z) = z^n + c_1 z$, где c_1 — произвольное комплексное число, отличное от нуля.

Следующий результат установлен с помощью леммы Шварца [6].

Теорема 4.3. *Пусть $P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)$, $|\alpha_k| \leqslant 1,\ k = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 2$, и пусть $\beta_k,\ k = 1, \ldots, n-1$, — критические точки полинома P. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha}_k\prod_{k=1}^{n}\alpha_k - n\prod_{k=1}^{n-1}\beta_k\right| \leqslant 1 - \left|\prod_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right|.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = z^n + c_1 z,\ |c_1| = 1$.

5. Метрические свойства замкнутых множеств

Указанные в заглавии свойства представляют известный интерес в геометрической теории функций комплексного переменного [12, гл.VII]. Приведем здесь два утверждения из недавней статьи [1]. Рассмотрим сначала теорему об оценке гиперболической емкости $\mathrm{cap}_h E$ множества E, связанной с пересечениями множества E наперед заданными кривыми специального вида. Определим эти кривые следующим образом. При фиксированном натуральном $m \geqslant 1$ разобьем плоскость $\mathbb{C}$ лучами $\arg z^m = \pi$ на m симметричных открытых углов $B_k, ; k = 1, \ldots, m$. В каждом из таких углов B_k рассмотрим семейство кривых $\Gamma_k = \{\gamma_k(c) : 0 < c < \infty\}$, заданных уравнениями $\gamma_k(c) :\ \operatorname{Re} z^{m/2} = c > 0,\ z \in B_k,\ k = 1, \ldots, m$. Легко видеть, что при $m = 1$ семейство Γ_1 состоит из парабол, при $m = 2$ семейства Γ_1 и Γ_2 есть семейства параллельных прямых, а при $m = 4$ семейства $\Gamma_k,\ 1 \leqslant k \leqslant 4$, состоят из ветвей гипербол. Заметим также, что расстояние от кривой $\gamma_k(c)$ до начала координат равно $c^{2/m}$.

Теорема 5.1. *Пусть E — произвольное замкнутое подмножество единичного круга $U := \{z : |z| < 1\}$, и пусть $L_k(E)$ означает линейную меру множества всех c, при которых $\gamma_k(c) \cap E \neq \emptyset,\ k = 1, \ldots, m$. Тогда*

$$\operatorname{cap}_h E \geqslant \exp\left[-\frac{\pi}{2m}\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\tau^2})}{\mathbf{K}(\tau)}\right], \tag{5.1}$$

где $\mathbf{K}(\cdot)$ — полный эллиптический интеграл первого рода и

$$\tau^{-1/2} - \tau^{1/2} = \sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m}\left[L_k^{-1}(E) - L_k(E)\right]}, \quad 0 \leqslant \tau < 1.$$

Равенство в (5.1) *достигается для симметричных множеств*

$$E_m^*(t) = \{z : |z| \leqslant t,\ \arg z^m = 0\}, \quad 0 \leqslant t < 1.$$

Нетрудно видеть, что теорему 5.1 модно интерпретировать как теорему покрытия. Именно, для любого замкнутого подмножества E круга U выполняется неравенство

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m}\left[L_k^{-1}(E) - L_k(E)\right]} \geqslant \tau^{-1/2} - \tau^{1/2},$$

где τ — решение уравнения

$$\operatorname{cap}_h E = \exp\left[-\frac{\pi}{2m}\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\tau^2})}{\mathbf{K}(\tau)}\right]. \tag{5.2}$$

Следствие 5.1. *В условиях теоремы* 5.1 *справедливо неравенство*

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} L_k(E)} \leqslant \sqrt{\tau},$$

где τ — решение уравнения (5.2). *Равенство достигается для множества $E_m^*(t),\ 0 \leqslant t < 1$.*

При $m = 2$ следствие 5.1 можно получить из дискретной версии гиперболической емкости, установленной Цудзи, а также из симметризации Штейнера (см. [22], с.11).

Следствие 5.2. *Если континуум $E \subset U$ соединяет точку $z \in U$ с радиусом $[0, -z/|z|]$, то*

$$|z| \leqslant \tau,$$

где τ — решение уравнения (5.2) *с* $m = 1$. *Если* z_k, $k = 1, \dots, m$, $m \geqslant 2$, *— произвольные точки континуума* $E \subset U$, *лежащие соответственно на* m *лучах, исходящих из точки* $z = 0$ *под равными углами, то*

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} |z_k|} \leqslant \tau^{1/m},$$

где τ *удовлетворяет* (5.2). *Равенство имеет место для континуумов* E, *состоящих из* m *прямолинейных отрезков одинаковой длины, исходящих из точки* $z = 0$ *под равными углами и соединяющих начало координат с точками* z_k, $k = 1, \dots, m$.

Следствие 5.3. *Справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} E \geqslant \sqrt[m]{\frac{1}{4} \prod_{k=1}^{m} L_k^{2/m}(E)}.$$

При $m = 2$ данный результат восходит к Полиа [12, с.294]. Привлекая дополнительно теорему Фекете [12, с.290], из следствия 5.3 получаем

Следствие 5.4. *Пусть* $P(z) = z^n + \dots$ *— полином степени* $n \geqslant 1$, *и пусть* $E(P) = \{z : P(z) \in [0, 1]\}$. *Тогда*

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} L_k(E(P))} \leqslant 2^{1-m/n}.$$

Равенство имеет место в случае целого n/m *и*

$$P(z) = \frac{1}{2} \left[T_{n/m}(2^{2m/n-1} z^m - 1) + 1 \right] = z^n + \dots,$$

где $T_{n/m}(\zeta)$ *— полином Чебышева.*

Следствие 5.5. [22, с.44] *Если* z_k, $k = 1, \dots, m$, $m \geqslant 2$, *произвольные точки ограниченного континуума* E, *лежащие соответственно на* m *лучах, исходящих из точки* $z = 0$ *под равными углами, то*

$$\operatorname{cap} E \geqslant \sqrt[m]{\frac{1}{4} \prod_{k=1}^{m} |z_k|}$$

со случаем равенства, описанным в следствии 5.2.

Данное утверждение вытекает из следствия 5.3 и включает в себя ряд известных ранее результатов о покрытии отрезков и площадей, а также решении задачи Фекете [22].

Приведем теперь результат, анонсированный в работе [22, теорема 2.9] и ошибочно принятый за утверждение Клейна в недавнем обзоре (см. [28, с.257]).

Теорема 5.2. *Пусть* E *— замкнутое подмножество единичной окружности* $|z| = 1$, *и пусть* l_k *— линейная мера пересечения* E *с углом* $B_k = \{z = re^{i\theta} : 0 < r < \infty, |\theta - 2\pi k/m| < \pi/m\}$, $k = 1, \dots, m$. *Тогда*

$$\operatorname{cap} E \geqslant \prod_{k=1}^{m} [\sin(m l_k / 4)]^{2/m^2}.$$

Равенство имеет место в случае четного m *и множества* E*, состоящего из* $m/2$ *равных дуг с центрами в точках* $\exp(i(\pi/m + 4\pi k/m)),\ k = 1, \dots, m/2.$

Теоремы 5.1 и 5.2 доказаны с привлечением свойств емкостей конденсаторов и симметризации. О других приложениях емкостей конденсаторов можно узнать в работе [29].

Список литературы

[1] Дубинин В.Н., *Емкости конденсаторов, обобщения лемм Гретша и симметризация* , Зап. научн. семин. ПОМИ, **337** (2006), 73–100.

[2] Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г., *О вариационных принципах конформных отображений*, Алгебра и анализ, **18**: 3 (2006), 39–62.

[3] Dubinin V.N., Vuorinen M., *Robin functions and distortion theorems for regular mappings*, Reports in Math. Depart. of Math. and Stat. Univ. of Helsinki. Preprint 454, 2007, P. 21.

[4] Dubinin V.N., Karp D.B., *Capacities of certain plane condensers and sets under simple geometrics transformations*, Complex Variables, **53**: 6 (2008), 607–622.

[5] Dubinin V.N., Vuorinen M., *On conformal modules of polygonal quadrilaterals*, Israel Journal Math., 2008. (принята к печати).

[6] Дубинин В.Н., *О применении леммы Шварца к неравенствам для целых функций с ограничениями на нули*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **337** (2006), 101–112.

[7] Дубинин В.Н., *Неравенства для критических значений полиномов*, Матем. сборник, **197**: 8 (2006), 63–72.

[8] Дубинин В.Н., *Лемниската и неравенства для логарифмической емкости континуума*, Матем. заметки, **80**: 1 (2006), 33–37.

[9] Дубинин В.Н., Калмыков С.И., *Принцип мажорации для мероморфных функций*, Матем. сборник, **198**: 12 (2007), 37–46.

[10] Дубинин В.Н., Ким В.Ю., *О покрытии радиальных отрезков при p–листных отображениях круга и кольца*, Дальневост. матем. журнал, **7**: 1–2 (2007), 40–47.

[11] Дубинин В.Н., Ким В.Ю., *Теоремы искажения для регулярных и ограниченных в круге функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **350** (2007), 26–39.

[12] Голузин Г.М., *Геометрическая теория функций комплексного переменого*, М.: Наука, 1966.

[13] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., *Методы теории функций комплексного переменного*, М.: Наука, 1973.

[14] Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Лаврик В.И., Мистецкий Г.Е., *Метод мажорантных областей в теории фильтрации*, Киев: Наукова думка, 1974.

[15] Duren P., *Robin capacity*, Computational methods and Function Theory (CMFT'97). N. Papamichael, St. Ruscheweyh, E.B. Saff (Eds.), World scientific Publishing Co. 1999, 177–190.

[16] Дубинин В.Н., *Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин*, Зап. научных семинаров ПОМИ, **302** (2003), 38–51.

[17] Duren P., Schiffer M., *Robin functions and energy functionals of multiply connected domains*, Pacific J. Math., **148** (1991), 251–273.

[18] Duren P., Schiffer M.M., *Robin functions and distortion of capacity under conformal mapping*, Complex Variables, **21** (1993), 189–196.

[19] Nasyrov S., *Robin capacity and lift of infinitely thin airfoils*, Complex Variables, **47**: 2 (2002), 93–107.

[20] Pommerenke Ch., *Boundary behaviour of conformal maps*, Berlin: Springer, 1992.

[21] Barnard R.W., Richardson K., Solynin A.Yu., *Concentration of area in half–planes*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 2091–2099.

[22] Дубинин В.Н., *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи матем. наук, **49**: 1 (1994), 3–76.

[23] Дочев К., *О некоторых экстремальных свойствах многочленов*, Докл. АН СССР, **153**: 3 (1963), 519–521.

[24] Лукашов А.Л., *Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках*, Изв. РАН. Сер. мат., **68**: 3 (2004), 115–138.

[25] Лукашов А.Л., *Оценки производных рациональных функций и четвертая задача Золотарева*, Алгебра и анализ, **19**: 2 (2007), 122–130.

[26] Smale S., *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*, Bull. Amer. Math. Soc., **4**: 1 (1981), 1–36.

[27] Rahman Q.I., Schmeisser G., *Analytic theory of polynomials*, London Math. Soc. Monographs, New Series, **26** (2002), Oxford: Clarendon Press.

[28] Kirsch S., *Transfinite diameter, Chebyshev constant and capacities*, Handbook of complex analysis: Geometric function theory, Elsevier, Amsterdam, **2** (2005), 243–308.

[29] Dubinin V.N., Karp D.B., *Generalized condencers and distortion theorems for conformal mappings of planar domain*, Contemporary Mathematics, **424** (2007), 33–51.

Дубинин Владимир Николаевич
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: dubinin@iam.dvo.ru