S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 456–464 (2008) УДК 517.968, 517.944

MSC 30E20, 45E05, 45E10, 45F15

О КОРРЕКТНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ И СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ

А. Ф. ВОРОНИН

Abstract. We obtain some necessary and sufficient conditions for the well-posednes of a convolution equations on a finite interval and of a system of Cauchy-type singular integral equations.

Keywords: integral equation, convolution, system, well-posedness, Riemann problem, Cauchy-type singular integral equation.

Введение

В данной работе получены новые утверждения в теории уравнений в свертках на конечном интервале и теории задачи факторизации (она же задача Римана). Эти две теории тесно связаны — в работе автора [1] уравнения в свертках на конечном интервале сведены (эквивалентным образом) к задаче Римана для кусочно-голоморфного вектора длины 2.

В настоящей статье приведены результаты автора по теме интеграционного проекта СО РАН №48, которые полностью опубликованы в работах [2–5].

Voronin, A.F., The well-posednes of a convolution equations on a finite interval and of a system of Cauchy-type singular integral equations.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №48 и РФФИ (грант 06-01-00422).

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 25 ноября 2008 г.

1. Интегральное уравнения 1-го рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром

Рассмотрим интегральное уравнение 1-го рода в свертках на конечном интервале $(0, b)$,

$$\int_0^b k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0, b), \tag{1}$$

при следующих ограничениях,

$$k \in L_1(-b, b), \quad f \in L_1(0, b), \quad b > 0. \tag{2}$$

Кроме того, предполагается, что ядро k является периодической функцией на (-b,b),

$$k(t + b) = k(t), \quad t \in (-b, 0), \tag{3}$$

и удовлетворяет условию,

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{1}{p^s \mathcal{F}k_+(p)} = 0, \ Im\,p \geq -\delta < 0, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{F}k_+(p) = \int_0^b e^{ipt}k(t)\,dt,$$

$0 < s$ — некоторая целая постоянная. Решение уравнения (1) при условиях (2)–(4) (решение задачи (1)–(4)) будем искать в классе $L_1(0, b)$. Согласно неравенству Юнга, имеем

$$||u * k||_1 \leq ||k||_1 ||u||_1,$$

где

$$u * k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)u(s)\,ds, \ t \in R.$$

В вышестоящем равенстве $k(t) = 0, \ t\overline{\in}(-b, b), \ u(t) = 0, \ t\overline{\in}(0, b), \ ||.||_1$ — норма в $L_1(R)$.

В данном разделе найдены в замкнутой форме [6, с. 532] необходимые и достаточные условия единственности и все решения однородной задачи (1)–(4). Для случая, когда функции k и f дифференцируемы ($s = 2$), в разделе получены (в замкнутой форме) необходимые и достаточные условия разрешимости и корректности а также все решения задачи (1)–(4).

Уравнения типа свертки тесно связаны с приложениями. Это задачи классической математической физики и ее обратные задачи, информатики, всевозможные задачи современной техники и экономики : ядерной физики, автоматического управления, игр, массового обслуживания и др. [7, с. 6].Тем не менее, к настоящему времени, теория задачи (1)–(2) далека от завершения. Не существует теории корректности задачи (1)–(2) с обозримыми условиями корректности. Успех в исследовании задачи (1)–(2) достигнут лишь в частных случаях. В монографиях [7–8] и работе [9] для ядер k из специальных классов, уравнение (1) достаточно полно исследовано (класс рассматриваемых в [9] ядер принципиально другой чем в [7–8]). В [10] задача (1)–(2)

полностью исследована при условии, что Фурье образ ядра k (предварительно продолженного на всю вещественную прямую R) является рациональной функцией. В [1] задача (1)–(2) сведена к классической векторной краевой задаче Римана для аналитических функций с матричным коэффициентом (там же приведена библиография исследований уравнения (1). Однако векторная задача Римана [11, с. 439-442],[12, с. 54-55](в отличие от скалярного случая) не достаточно развита для практического применения [12, с. 54-55],[5].

Отметим также, что к задаче (1)–(3), при соответствующих дополнительных условиях на ядро k ($k(t) = k(-t), Im\, k = 0$) эффективно применима теорема Гильберта-Шмидта [13, с. 50,75]. В этом случае, что важно, нет нужды исследовать однородное уравнение (1) в виду того, что все собственные функции интегрального оператора в (1) известны (тригонометрическая система функций $\{\cos, \sin\}$). Однако здесь (и в общем случае применения теоремы Гильберта-Шмидта) число условий разрешимости уравнения (1) бесконечно.

В данном разделе, в качестве метода исследования уравнения (1) используется скалярная краевая задача Римана [6,7]. Условия периодичности ядра позволяют свести искомое интегральное уравнение к скалярной задаче Римана на прямой методом, развитым в [14–15].

Продолжим функции k и f на всю вещественную ось R следующим образом, положив

(5) $k(t) := 0,\ t > b,\ k_+(t) := k(t),\ t \geq 0,\ k(t) = k(t+b),\ t < 0,\ f(t) := 0,\ t\overline{\in}[0, b].$

Ясно, что условие (5) не влияет на решение задачи (1)–(4). Ниже будем считать, что (5) выполнено.

Обозначим через $L_1(e^{at}, R)$, где $a \geq 0$, класс функций с нормой,

$$||g|| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}|g(t)|\, dt.$$

Положим

$$\mathcal{R} := \{C+\mathcal{F}g_0(p) :\ \mathcal{F}g_0(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt}g_0(t)\, dt,\ Im\, p = -a,\ g_0 \in L_1(e^{at}, R),\ C = const\},$$

где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье-Лапласа,

$$\mathcal{R}_0^{\pm} := \{\mathcal{G}_0^{\pm}(p) \in \mathcal{R} :\ \mathcal{G}_0^{\pm}(p) = \mathcal{F}\{\theta(\pm t)g_0(t)\}(p),\ Im\, p = -a,\ g_0 \in L_1(e^{at}, R)\},$$

где θ — функция Хевисайда,
$\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_0^+ \oplus \mathcal{R}_0^-$, где $\oplus$ - прямая сумма. Через P_0^+ и P_0^- обозначим дополнительные друг к другу проекторы,

$$P_0^{\pm} : \mathcal{R}_0 \to \mathcal{R}_0^{\pm},\ P_0^{\pm}\mathcal{G}_0(p) \equiv P_0^{\pm}\{\mathcal{G}_0(t)\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt}g_0(t)\theta(\pm t)\, dt,\ Im\, p = -a.$$

Справедлива формула

$$P_0^+\mathcal{G}_0(p) + P_0^-\mathcal{G}_0(p) = \mathcal{G}_0(p) \equiv \mathcal{F}g_0(p),\ Im\, p = -a.$$

1.1. **Результаты исследования уравнения (1) в случае дифференцируемости k и f.** В этом пункте будем считать, что

$$k'_+ \in L_1(0,b),\ \alpha := k_+(0) \neq 0,\ k(b) = 0,\ f' \in L_1(0,b). \tag{6}$$

Из (6) следует справедливость ограничения (4) для $s = 2$.

Утверждение 1.1 *Целая функция,*

$$\alpha + \mathcal{F}k'_+(p) \equiv \alpha + \int\limits_0^b e^{ipt}k'_+(t)\,dt,\ p = x + iy,$$

имеет в полуплоскости $Im\,p \geq C_0$ конечное число нулей для любой вещественной постоянной C_0. Кроме того, существует параметр $a > 0$ такой, что

$$\alpha + \mathcal{F}k'_+(p) \neq 0,\ -a \leq Im\,p < 0. \tag{7}$$

Обозначим все нули функции $\alpha + \mathcal{F}k'_+(p)$ в полуплоскости $Im\,p \geq 0$ через $p_1, ..., p_n$ (n_j — кратность p_j -го нуля, $j = 1, ..., n$).

Положим

$$X_0 := \{p_j \in R:\ p_j = 2m_j\pi/b,\ m_j \in N,\ \alpha + \mathcal{F}k'_+(p_j) = 0\},$$

где N — множество целых чисел.
Из утверждения 1.1 следует, что X_0 — конечное множество (с числом элементов — $M_0 \leq n$). Ясно, что $M_0 = 0$ при $X_0 = \emptyset$ — пустое множество.

Для простоты будем считать, что при $X_0 \neq \emptyset$ $p_j = 2m_j\pi/b,\ j = 1, ..., M_0$, причем, $p_1 = 0,\ n_1 = 1$ при $0 \in X_0$.

Теорема 1.1 *Пусть справедливы ограничения (2)–(3) и (6). Тогда уравнение (1) разрешимо в $L_1(0,b)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия,*

$$f(a) = f(b),$$

при $X_0 \neq \emptyset$:

$$\mathcal{F}f'(p_j) = 0,\ p_j \in X_0,\ j = 1, ..., M_0,$$

при $0 \overline{\in} X_0$ либо при $0 \in X_0$ и $\mathcal{F}k_+(0) = 0$:

$$f(b) = 0.$$

При выполнении условий разрешимости, образ Фурье-Лапласа общего решения уравнения выражается формулой,

$$\mathcal{F}u(p) = (H_0^-(p) - Q_0^-(p))(1 - e^{ipb}),\ Im\,p = -a,$$

где

$$H_0^-(p) = P_0^- H_0(p),\ H_0(p) = \frac{e^{-ipb}\mathcal{F}f'(p)}{(1 - e^{-ipb})(\alpha + \mathcal{F}k'_+(p))},\ Im\,p = -a,$$

$$Q_0^-(p) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_j} c_{lj}^0 (p - p_j)^{-l},\ (Q_0^- = 0,\ n = 0).$$

Комплексные постоянные c_{jl} ($l = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., n$) определены ниже (в замечании), параметр $a > 0$ выбран из условия (7).

Замечание. *Коэффициенты рациональной функции* Q_0^- *определены следующим образом.*

Если $X_0 = \emptyset$, *то все коэффициенты однозначно находятся из равенства,*

$$P_0^-\{(1-e^{ipb})Q_0^-(p)\} = P_0^-\{\frac{\mathcal{F}k'_+(p)}{\alpha+\mathcal{F}k'_+(p)}\},\ Im\, p = -a, \tag{8}$$

где левая и правая части равенства — рациональные функции.

В противном случае, $X_0 \neq \emptyset$, *первые* M_0 *коэффициентов* c_{1j}^0 $(j = 1, ..., M_0)$ *— произвольные комплексные постоянные, за исключением, быть может,* c_{11}^0. *Остальные коэффициенты* c_{lj}^0 *при* $l = 1, ..., n_j$ $j = M_0+1, ..., n$ *и при* $l > 1,\ j = 1, ..., M_0$ *однозначно определяются из равенства (8).*

Для c_{11}^0 *при* $0 \in X_0$ *справедлива формула,*

$$c_{11}^0 = -if(b)/\mathcal{F}k_+(0),\ if\ \mathcal{F}k_+(0) \neq 0,$$

в противном случае, $\mathcal{F}k_+(0) = 0$, c_{11}^0 *— произвольная комплексная постоянная.*

Из теоремы 1.1 легко видеть, что задача (2)–(3),(6) слабо некорректна.

1.2. **Однородное уравнение. Общий случай.** Обозначим все нули функции $p^s\mathcal{F}k_+(p)$ в полуплоскости $Im\, p \geq 0$ через $p_1, ..., p_n$. Положим

$$X_0 := \{p_j \in R\,:\ p_j = 2m\pi/b,\ m_j \in N,\ p_j^s\mathcal{F}k_+(p_j) = 0\},$$

M_0 — число элементов конечного дискретного множества X_0.

Теорема 1.2 *Пусть справедливы ограничения (2)-(4). Тогда однородное уравнение (1)(f=0) имеет единственное (тривиальное) решение в* $L_1(0, b)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:*

(i) $X_0 = \emptyset$,

либо

(ii) $X_0 = \{0\}$ *и* $\mathcal{F}k_+(0) \neq 0$.

Если оба условия (i),(ii) не выполнены, то общий вид нетривиального решение уравнения следующий:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{M_0} c_j e^{-ip_j t},\ t \in (0, b),$$

где $p_j \in X_0$, $j = 1, ..., M_0$; c_j $(j = 1, ..., M_0)$ *— произвольные комплексные числа.*

2. Необходимые и достаточные условия корректности уравнения 2-го рода в свертках на отрезке с четным ядром.

В настоящем разделе будет продолжено [1] исследование уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале $(0, b)$:

$$u(t) - \int_0^b k(t-s)u(s)\, ds = f(t), \quad t \in (0, b), \tag{9}$$

где

$$k \in L_1(-b, b), \quad f \in L_1(0, b), \quad b > 0, \tag{10}$$

при дополнительных условиях

$$(11)\qquad k(t)=k(-t),\ t\in(-b,b),\ \Lambda^{+}(x):=1-\int\limits_{0}^{b}e^{ixt}k(t)\,dt\neq 0,\ x\in R.$$

Положим

$$\kappa:=2Ind\,\Lambda^{+}(x)\equiv\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\Lambda^{+}(x))'\frac{d\,x}{\Lambda^{+}(x)}$$

— индекс уравнения (9), где $(\Lambda^{+}(x))'=\frac{\partial}{\partial x}\Lambda^{+}(x)$. Согласно принципа аргумента $\kappa=2n\geq 0$, где n - общее число нулей в полуплоскости $Im\,p>0$ регулярной в этой полуплоскости функции $\Lambda^{+}(p)$. При этом все n нулей лежат в некоторой полуокрестности точки p=0 (утверждение 1.1 [1]).

Целью работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1 *Пусть выполнены условия (10)–(11). Тогда, если $\kappa=0$, то уравнение (9) безусловно разрешимо в классе $L_1(0,b)$. При этом решение устойчиво, как по правой части f, так и по ядру k и по параметру b (в норме L_1).*

В противном случае ($\kappa>0$) однородное уравнение (9) имеет нетривиальное решение в $L_1(0,b)$. Размерность пространства решений однородного уравнения не превосходит κ.

Отметим, что неравенство в (11) и условие $\kappa=0$ заведомо выполнены, если

$$\int\limits_{0}^{b}|k(s)|\,ds<1,$$

что следует из неравенства треугольника для функции $\Lambda^{+}(p)$,

$$|\Lambda^{+}(x+iy)|\geq 1-\int\limits_{0}^{b}e^{-ys}|k(s)|\,ds,\ y\geq 0.$$

Для уравнения (9) при условии (10) известны лишь достаточные условия разрешимости - следствие теоремы Банаха об обратном операторе [16, с. 206-207] :

$$\int\limits_{0}^{b}|k(s)|\,ds<1/2.$$

В работах автора [1],[17] декларированы достаточные условия разрешимости рассматриваемого уравнения, которые совпадают с условиями разрешимости настоящей теоремы.

Как следствие теоремы 2.1, в данном разделе получены необходимые и достаточные условия корректности для следующего уравнения второго рода:

$$(12)\qquad u_0(t)-\int\limits_{0}^{b/2}(k(t-s)+k(t+s))u_0(s)\,ds=f_0(t),\quad t\in(0,b/2),$$

где

$$(13)\qquad k\in L_1(-b/2,b),\ k(-t)=k(t),\,t\in(-b/2,b/2),\ f_0\in L_1(0,b/2).$$

В отличие от уравнения (9) уравнение (12) при условии (13) не имеет столь широкого применения. Отметим лишь теорию переноса частиц, где уравнение (12) моделирует, в частности, перенос тепловых нейтронов в однородном сферическом слое толщины b/2 [18, с. 39].

Прежде, чем формулировать теорему 2.2 доопределим ядро уравнения (12) в интервале $(-b, -b/2)$ по четности,

$$k(-t) = k(t),\, t \in (b/2, b). \tag{14}$$

Тогда из теоремы 2.1 вытекает

Теорема 2.2 *Пусть выполнены условия (13)–(14) и справедливо неравенство в (11). Тогда, если* $\kappa = 0$, *то уравнение (12) безусловно разрешимо в классе* $L_1(0, b/2)$. *При этом решение устойчиво как по правой части* f_0 *так и по ядру* k *и по параметру* b *(в норме* L_1*).*

В противном случае $(\kappa > 0)$ *однородное уравнение (12) имеет нетривиальное решение в* $L_1(0, b/2)$. *Размерность пространства решений однородного уравнения не превосходит* κ.

Отметим, что эквивалентность уравнений (12) и (9) с ядром интегрального уравнения переноса частиц установлено, например, в [18, с. 39]. В общем случае (для произвольного четного $k \in L_1(-b, b)$) доказательство эквивалентности аналогичное.

Кроме того, в качестве промежуточного результата, в данном разделе приведена усиленная альтернатива Фредгольма для уравнения (9) с произвольным ядром из $L_1(-b, b)$, которая имеет самостоятельное значение.

Лемма 2.1 (усиленная альтернатива Фредгольма). *Пусть выполнено условие (10). Тогда, либо уравнение (9) разрешимо в* $L_1(0, b)$ *для* $f(t) = k(t)$, $t \in (0, b)$, *и тогда оно разрешимо в* $L_1(0, b)$ *для любого* $f \in L_1(0, b)$, *либо однородное уравнение (9) имеет нетривиальное решение в* $L_1(0, b)$.

Отметим, что лемма 2.1 анонсирована в [19] в многомерном случае.

3. Об условиях корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом

Краевая задача Римана с матричным коэффициентом эквивалентна, в вопросах корректности, системе уравнений Винера-Хопфа, характеристической системе сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [6, с. 446-449],[7, с. 48], и сводится к проблеме нахождения частных индексов при факторизации матричного коэффициента (матрицы-функции) [11, с. 439-441], [6, с. 54-55]. Заметим, что появились новые области применения теории факторизации матриц-функций, в частности, теория обратных задач рассеяния [20], некоторые вопросы теории вероятностей [21].

Понятие частных индексов было введено в [22], там же поставлена проблема их нахождения, которая в общем случае до сих пор не решена.

В данном разделе показано, что у четной унитарной матрицы-функции все частные индексы равны нулю. Кроме того, приведены результаты полного исследования корректности характеристической системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Для формулировки результатов работы проведем необходимые построения. Пусть Γ — гладкая замкнутая кривая, разбивающая плоскость на две области — внутреннюю D^+ и внешнюю (бесконечную) D^-. Для простоты, будем считать, что $\Gamma = R$. Результаты работы, полученные для этого случая, переносятся на общий случай с помощью конформного отображения полуплоскости $Im\, p > 0$ на область D^+.

Через $\mathcal{R}^\pm$ и $\mathcal{R}$ будем обозначать [23, с. 17] кольца функций, имеющие соответственно следующий общий вид :

$$\mathcal{G}^\pm(p) = C^\pm + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} g(t)\theta(\pm t)\, dt \equiv$$

$$C^\pm + \mathcal{F}\{g(t)\theta(\pm t)\}(p),\ \mathcal{G}(p) = C + \mathcal{F}g(p),\ p \in R,$$

где $C^\pm, C$ — постоянные, θ — функция Хевисайда, $g \in L_1(R)$, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье. Очевидно, что $\mathcal{G}^\pm(-x) \in \mathcal{R}^\mp$, $\mathcal{G}^\pm(\infty) = \mathcal{G}^\pm(-\infty) = C^\pm$.

Известна следующая

Лемма 3.1 *Пусть*

$$G \in \mathcal{R}_{n\times n}\ (g_{jl} \in \mathcal{R}),\ det\, G(x) \neq 0,\ x \in R, \tag{15}$$

где g_{jl} — элементы матрицы-функции G, $j, l = \overline{1, n}$. Тогда матрица-функция $G(x)$ допускает левую стандартную факторизацию на R :

$$G(x) = G^+(x)D(x)G^-(x),\ x \in R, \tag{16}$$

где

$$G^\pm,\ (G^\pm)^{-1} \in \mathcal{R}^\pm_{n\times n},\ D(x) = \{(\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_1}, ..., (\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_n}\},$$

$G^\pm$ — фактор-множители, $D(x)$ - диагональная матрица, $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq ... \geq \kappa_n$ — частные индексы.

Стандартная факторизация (15)–(16) называется канонической, если все частные индексы матрицы $G(x)$ равны нулю,

$$\kappa_1 = \kappa_2 = ... = \kappa_n = \kappa = 0,$$

где $\kappa = Ind_\Gamma\, det\, G(t) \equiv \frac{1}{2\pi}[arg\, det\, G(t)]_\Gamma = \sum\limits_{j=1}^{n} \kappa_j$ — суммарный индекс матрицы G.

Теорема 3.2 *Пусть выполнено условие (15) и*

$$G^{-1}(x) = \overline{G^T(-x)},\ x \in R$$

(матрица $G(x)$ — четная унитарная). Тогда матрица $G(x)$ допускает левую канонические факторизации (все ее частные индексы равны нулю).

Рассмотрим теперь следующую характеристическую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$A(t)\phi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(s)}{s-t}\, ds = \mathcal{F}f(t), \quad t \in R, \tag{17}$$

где

$$A, B \in \mathcal{R}_{n\times n},\ f \in L_1(R),\ det\,(A(t) \pm B(t)) \neq 0,\ t \in R.$$

Положим $G := (A+B)^{-1}(A-B)$. Тогда справедлива

Теорема 3.3 *Пусть для матрицы $G(t)$ выполнены условия теоремы 3.2. Тогда система (17) имеет единственное решение в классе функций исчезающих на бесконечности в $\mathcal{R}_{n\times 1}$. Кроме того, решение устойчиво по A,B и f в соответствующих нормах.*

Список литературы

[1] Воронин А. Ф., *Полное обобщение метода Винера-Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами*, Диф. уравнения, **40**: 9 (2004), 1153–1160.

[2] Воронин А. Ф., *Интегральное уравнение первого рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром*, Сиб. журнал индустр. мат-ки, **11**: 1 (2008), 46–56.

[3] Воронин А. Ф., *Необходимые и достаточные условия корректности для уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром*, Сиб. математич. журнал, **49**: 4 (2008), 136–147.

[4] Воронин А. Ф., *Условия корректности уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром*, ДАН, **413**: 5 (2007), 594–595.

[5] Воронин А .Ф., *О корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом*, ДАН, **414**: 2 (2007), 156–158.

[6] Гахов Ф. Д., *Краевые задачи*, Наука, М., 1977.

[7] Гахов Ф. Д., Черский Ю. И., *Уравнения типа свертки*, Наука, М., 1978.

[8] Крейн М. Г., *Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов*, Успехи мат. наук, **13**: 5 (83) (1958), 3–120.

[9] Воронин А. Ф., *Уравнения в свертках на полупрямой с вырождающимися на интервале символами*, Дифференциальные уравнения, **36**: 4 (2000), 555–557.

[10] Ганин М. П., *Об одном интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящем от разности аргументов*, Изв. вузов. Математика, 2 (1963), 31–43.

[11] Мусхелишвили Н. И., *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968.

[12] Литвинчук Г. С., *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом*, Наука, М., 1986.

[13] Васильева А. Б., Тихонов Н. А., *Интегральные уравнения*, Физматлит, М., 2004.

[14] Воронин А. Ф., *Теорема единственности для уравнения 1-го рода в свертках на отрезке с дифференцируемым ядром*, Дифференц. уравнения, **37**:10 (2001), 1342–1349.

[15] Воронин А. Ф., *Один класс уравнений второго рода в свертках на отрезке*, Дифференц. уравнения, **36**: 10 (2000), 1377–1364.

[16] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, М.: Наука, 1984.

[17] Воронин А. Ф., *Теоремы единственности для интегральных уравнений в свертках 1-го и 2-го родов на отрезке*, **396**: 1 (2004), 12–14.

[18] Ершов Ю. И., Шихов С. Б., *Методы решения краевых задач теории переноса*, М. Атомиздат, 1977.

[19] Воронин А. Ф., *Усиление альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в свертках*, ДАН, **387**: 6 (2002), 737–738.

[20] Шабат А. Б., *Обратная задача рассеяния*, Дифференц. уравнения, **15**: 10 (1979), 1824–1834.

[21] Пресман Э. Л., *Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова*, Изв. Акад. наук СССР, сер. матем., **33**: 4 (1969), 70–81.

[22] Мусхелишвили Н. И., Векуа Н. П., *Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций*, Труды Тб. математического ин-та, **12** (1943), 1–46.

[23] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов*, Успехи мат. наук, **13**: 2(80) (1958), 3–72.

Анатолий Федорович Воронин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: voronin@math.nsc.ru