S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 42–50 (2008) УДК 517.9

MSC 22E67, 35Q99

О ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МИКРОСТРУКТУР

Н. В. ЛЮБАШЕВСКАЯ

Abstract. We discuss group-theoretical properties of equation describing formation and evolution of defects in microstructures. Invariant solutions of equation are obtained by optimal system of subalgebras of Lie algebra permissible by considering equation. It is shown that optimal system consists of 3 one-dimensional subalgebras, 13 two-dimensional subalgebras, 7 tree-dimensional subalgebras. Each representative of optimal system generates invariant solution of rang 3, 2 or 1 with corresponding number of independent variables. All factor equations describing invariant solutions of considering equation are constructed.

1. Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений предоставляет мощные и универсальные методы получения широких классов точных решений дифференциальных уравнений произвольной природы [1]. Его достоинствами являются алгоритмичность и универсальность: его алгоритмы не зависят от типа уравнений, числа переменных, нелинейности и проч. Особенно эффективно применение методов группового анализа к уравнениям математической физики и механики сплошной среды, поскольку в этих случаях математические модели, т. е. системы дифференциальных уравнений, допускают содержательные группы симметрии [2].

Изучение групповых свойств математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений E, состоит из следующих этапов:

1) Вычисление группы Ли G непрерывных преобразований, допускаемых системой E. В дальнейшем имеют дело с соответствующей алгеброй Ли L группы G.

Lyubashevskaya, N.V., On group-theoretical properties of equation of dynamics of microsrtuctures.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00080), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5245.1-2006), Интеграционным проектом СО РАН № 2.15.

Поступила 9 января 2008 г., опубликована 10 марта 2008 г.

2) Построение оптимальной системы подалгебр ΘL алгебры L, т. е. перечисление всех подалгебр алгебры L с точностью до внутренних автоморфизмов. Это необходимо для построения классов существенно различных симметрийных решений [3].

3) Построение по оптимальной системе подалгебр ΘL списка подмоделей, задающих инвариантные, частично инвариантные решения системы E.

4) Исследование аналитических свойств факторсистем дифференциальных уравнений, построенных на этапе 3). Физическая интерпретация решений.

В данной работе выполнены первые три этапа исследования для уравнения Вальграфа, описывающего образование и развитие дефектов микроструктур [4]. Вычислена группа симметрии уравнения, построена оптимальная система подалгебр, построены факторуравнения, описывающие инвариантные подмодели рангов 3, 2, 1.

2. Алгебра симметрии

Рассматривается следующее уравнение [4]:

$$\tau_0 u_t(\vec{r},t) = \big(\alpha_0 + \beta_0\Delta_\perp + \gamma_0\Delta - \Delta^2\big)u + \kappa_0 u^2 - u^3, \tag{2.1}$$

где α_0, β_0, κ_0, τ_0 – произвольные постоянные, $\vec{r} = (x,y,z)$. В (2.1) Δ – трехмерный лапласиан, $\Delta_\perp$ – лапласиан по координатам (x,y). Уравнение (2.1) в подробной записи в декартовой системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} u_t - (\beta_0+\gamma_0)u_{xx} - (\beta_0+\gamma_0)u_{yy} - \gamma_0 u_{zz} + u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{zzzz} + \\ + 2u_{xxyy} + 2u_{xxzz} + 2u_{yyzz} - \alpha_0 u - \kappa_0 u^2 + u^3 = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В цилиндрической системе координат (r,θ,z), где $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, уравнение (2.2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t - \left(\frac{\beta_0+\gamma_0}{r} - \frac{1}{r^3}\right)u_r - \left(\beta_0+\gamma_0+\frac{1}{r^2}\right)u_{rr} - \left(\frac{\beta_0+\gamma_0}{r^2} - \frac{3}{r^5}\right)u_{\theta\theta} - \\ - \gamma_0 u_{zz} + \frac{2}{r}u_{rrr} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{4}{r^4}\right)u_{r\theta\theta} + \frac{1}{r}u_{rzz} + u_{rrrr} + \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)u_{rr\theta\theta} + \left(\frac{1}{r}+1\right)u_{rrzz} + \\ + \frac{1}{r^4}u_{\theta\theta\theta\theta} + \frac{2}{r^2}u_{\theta\theta zz} + u_{zzzz}\alpha_0 u - \kappa_0 u^2 + u^3 = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.1) допускает алгебру симметрии L_5, базис которой задается операторами:

$$X_1 = \partial_x;\quad X_2 = \partial_y;\quad X_3 = y\partial_x - x\partial_y;\quad X_4 = \partial_z;\quad X_5 = \partial_t. \tag{2.4}$$

Алгебра (2.4) имеет следующую таблицу коммутаторов:

(2.5)

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	$-X_2$
X_2	0	0	X_1
X_3	X_2	$-X_1$	0

Операторы X_4, X_5 образуют центр Z алгебры L_5 и потому не приведены в таблице (2.5).

Следует отметить, что неравноправность координат (x,y) и z существенно сужает алгебру инвариантности – в нее не входят операторы вращения, содержащие координату z, а также операторы инверсии. Эта особенность обусловлена наличием различных коэффициентов β_0 и γ_0 при плоском и трехмерном лапласианах (свойство анизотропности материала).

Построение оптимальной системы дает возможность получить и проанализировать существенно различные решения модели. Построение решений независимо от способа их представления (системы координат) эквивалентно описанию классов подалгебр алгебры симметрии с точностью до сопряжения (внутренних автоморфизмов).

Группа внутренних автоморфизмов $Int\, L_5$ алгебры L_5 задается тремя автоморфизмами, отвечающими операторам X_1, X_2, X_3:

$$
\begin{aligned}
&A_1(t_1): \overline{x^1} = x^1, \quad \overline{x^2} = x^3 t_1 + x^2, \quad \overline{x^3} = x^3;\\
&A_2(t_2): \overline{x^1} = -x^3 t_2 + x^1, \quad \overline{x^2} = x^2, \quad \overline{x^3} = x^3;\\
&A_3(t_3): \overline{x^1} = x^1 \cos t_3 + x^2 \sin t_3, \quad \overline{x^2} = -x^1 \sin t_3 + x^2 \cos t_3, \quad \overline{x^3} = x^3.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Имеет место следующее разложение алгебры $L_5 = \langle X_1, X_2, X_3\rangle \bigoplus \langle X_4, X_5\rangle$. Первое слагаемое задает идеал I подалгебры, второе – центр Z. Кроме того, заметим, что компоненты (x^4, x^5) инвариантны относительно автоморфизмов A_i.

3. Одномерные подалгебры

Рассмотрим одномерную подалгебру алгебры L_5 $H = x^1X_1 + x^2X_2 + x^3X_3 + x^4X_4 + x^5X_5$ и сопоставим ей вектор $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{pmatrix}$. Тогда для построения оптимальной системы одномерных подалгебр необходимо описать все такие неэквивалентные векторы. Поскольку компоненты (x^4, x^5) не преобразуются автоморфизмами (2.6), то требуется рассмотреть лишь возможные упрощения вектора $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ преобразованиями $Int\, L_5$, задаваемыми (2.6).

Итак, рассмотрим всевозможные случаи:
а) Пусть $x^3 \neq 0$.
Под действием автоморфизмов A_1 и A_2 (выбираем соответствующие параметры t_1 и t_2) компоненты x^1 и x^2 обращаются в нуль. Далее, применяя преобразование базиса в силу $x^3 \neq 0$, получаем вектор: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x^4 & x^5 \end{pmatrix}$, которому будет соответствовать подалгебра

$$L_{1.1} = \langle X_3 + \alpha X_4 + \beta X_5\rangle, \tag{3.1}$$

где α и β – произвольные числа.

б) Пусть $x^3 = 0$.
В этом случае автоморфизмы A_1, A_2 в (2.6) будут тождественными преобразованиями. Поэтому, используя автоморфизм A_3 (он осуществляет вращение), приведем вектор к одному из следующих видов: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x^4 & x^5 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x^4 & x^5 \end{pmatrix}$. Получаем еще две подалгебры:

$$L_{1.2} = \langle X_1 + \alpha X_4 + \beta X_5\rangle, \quad L_{1.3} = \langle \alpha X_4 + \beta X_5\rangle, \tag{3.2}$$

где α и β снова произвольны. В последнем случае на параметры α и β можно наложить условие $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Таким образом, оптимальная система $\Theta_1 L_5$ одномерных подалгебр алгебры L_5 состоит из трех представителей (3.1) и (3.2).

4. Двумерные подалгебры

В силу разбиения алгебры L_5 на идеал $\langle X_1, X_2, X_3\rangle$ и центр $\langle X_4, X_5\rangle$ для построения оптимальной системы двумерных подалгебр достаточно рассмотреть четыре случая:

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 1 & 0\\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 1 & 0\\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{4.2}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 0 & 1 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{4.3}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Действительно, центру $Z = \langle X_4, X_5 \rangle$ отвечает двумерная матрица $\begin{pmatrix} x^3 & x^5 \\ y^4 & y^5 \end{pmatrix}$, которая преобразованием базиса может быть приведена к одной из форм (4.1)—(4.4).

Возможность применения автоморфизмов A_1, A_2, A_3 для упрощения вида матрицы зависит от равенства или неравенства нулю компонент x^3 и y^3. Проводя анализ всех возможных случаев, получим следующий набор пар операторов $\langle H_1, H_2 \rangle$, где
$H_1 = x^1 X_1 + x^2 X_2 + x^3 X_3 + x^4 X_4 + x^5 X_5$,
$H_2 = y^1 X_1 + y^2 X_2 + y^3 X_3 + y^4 X_4 + y^5 X_5$.
Для каждой такой пары должно выполняться условие подалгебры

$$[H_1, H_2] = \lambda H_1 + \mu H_2. \tag{4.5}$$

Кроме того, ранг соответствующей матрицы (4.1)–(4.4) должен равняться 2. В результате такого анализа получен набор из 13 двумерных подалгебр:

$$\begin{array}{ll}
L_{2.1} = \langle \alpha X_3 + X_4, \beta X_3 + X_5 \rangle & L_{2.8} = \langle X_1 + X_4, \alpha X_1 + \beta X_2 \rangle \\
L_{2.2} = \langle X_1 + X_4, \alpha X_1 + \beta X_2 + X_5 \rangle & L_{2.9} = \langle X_3, X_5 \rangle \\
L_{2.3} = \langle X_4, \alpha X_1 + \beta X_2 + X_5 \rangle & L_{2.10} = \langle X_5, \alpha X_1 + \beta X_2 \rangle \\
L_{2.4} = \langle X_1 + X_5, \alpha X_1 + \beta X_2 + X_4 \rangle & L_{2.11} = \langle X_1 + X_5, \alpha X_1 + \beta X_2 \rangle \\
L_{2.5} = \langle X_5, \alpha X_1 + \beta X_2 + X_4 \rangle & L_{2.12} = \langle X_1, X_2 \rangle \\
L_{2.6} = \langle X_3, X_4 \rangle & L_{2.13} = \langle X_4, X_5 \rangle \\
L_{2.7} = \langle X_4, \alpha X_1 + \beta X_2 \rangle &
\end{array} \tag{4.6}$$

Таким образом, оптимальная система $\Theta_2 L_5$ двумерных подалгебр алгебры L_5 задается 13 представителями (4.6).

5. Трехмерные подалгебры

Оптимальная система $\Theta_3 L_5$ трехмерных подалгебр строится по аналогичной схеме. Требуется упростить автоморфизмами (2.6) следующие возможные матрицы, отвечающие различным структурам центра Z:

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 1 & 0 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 1 \\ z^1 & z^2 & z^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.1}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 1 & 0 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 0 \\ z^1 & z^2 & z^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.2}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 0 & 1 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 0 \\ z^1 & z^2 & z^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.3}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 0 \\ z^1 & z^2 & z^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Далее для каждого случая (5.1)–(5.4) необходимо анализировать варианты, когда:
$x^3 = 0$ или $x^3 \neq 0$,
$y^3 = 0$ или $x^3 \neq 0$,
$z^3 = 0$ или $x^3 \neq 0$;
После этого проверяются условия подалгебры (4.1)–(4.4)

$$[H_i, H_j] = \lambda H_1 + \mu H_2 + \nu H_3, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{5.5}$$

где
$H_1 = x^1 X_1 + x^2 X_2 + x^3 X_3 + x^4 X_4 + x^5 X_5$,
$H_2 = y^1 X_1 + y^2 X_2 + y^3 X_3 + y^4 X_4 + y^5 X_5$,
$H_3 = z^1 X_1 + z^2 X_2 + z^3 X_3 + z^4 X_4 + z^5 X_5$.
Ранг матриц (5.1)–(5.4) должен равняться 3. В результате получаем набор из 7 трехмерных подалгебр:

$$\begin{aligned}
&L_{3.1} = \langle X_1, \alpha X_2 + X_4, \beta X_2 + X_5 \rangle\\
&L_{3.2} = \langle X_1, X_2, \alpha X_3 + X_4 \rangle\\
&L_{3.3} = \langle X_1, X_2, \alpha X_3 + X_5 \rangle\\
&L_{3.4} = \langle X_1, X_2, X_4 \rangle\\
&L_{3.5} = \langle X_1, X_2, X_5 \rangle\\
&L_{3.6} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle\\
&L_{3.7} = \langle X_3, X_4, X_5 \rangle
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Объединяя результаты пп. 3–5, приходим к следующему утверждению:

Теорема 1. *Оптимальная система подалгебр ΘL_5 алгебры $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = y\partial_x - x\partial_y$, $X_4 = \partial_z$, $X_5 = \partial_t$ состоит из 23 представителей и содержит 3 одномерных* (3.1), (3.2), *13 двумерных* (4.6) *и 7 трехмерных* (5.6) *подалгебр.*

6. Инвариантные подмодели

Следующим этапом теоретико-группового анализа модели является построение факторуравнений для каждого представителя оптимальной системы.
1. $L_{1.1} = \langle \partial_\theta + \alpha\partial_z + \beta\partial_t \rangle$
Система координат: цилиндрическая.
Инварианты подалгебры: $r, \lambda = \beta z - \alpha t, \mu = \theta - \beta^{-1} t; u$.
Представление решения: $u = U(r, \lambda, \mu)$, ранг 3.
Фактор-уравнение:
$\alpha U_\lambda + \beta^{-1} U_\mu + \left(\dfrac{\beta_0 + \gamma_0}{r} - \dfrac{1}{r^3}\right) U_r + \left(\beta_0 + \gamma_0 + \dfrac{1}{r^2}\right) U_{rr} + \left(\dfrac{\beta_0 + \gamma_0}{r^2} - \dfrac{3}{r^5}\right) U_{\mu\mu} + \gamma_0 \beta^2 U_{\lambda\lambda} - \dfrac{2}{r} U_{rrr} - \left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{4}{r^4}\right) U_{r\mu\mu} - \dfrac{1}{r}\beta^2 U_{r\lambda\lambda} - U_{rrrr} - \left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^3}\right) U_{rr\mu\mu} - \left(\dfrac{1}{r} + 1\right) \beta^2 U_{rr\lambda\lambda} - \dfrac{1}{r^4} U_{\mu\mu\mu\mu} - \dfrac{2}{r^2}\beta^2 U_{\mu\mu\lambda\lambda} - \beta^4 U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + \alpha_0 U + \kappa_0 U^2 - U^3 = 0.$

2. $L_{1.2} = \langle \partial_x + \alpha\partial_z + \beta\partial_t \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $y, \lambda = x - \beta^{-1} t, \mu = \beta z - \alpha t; u$.
Представление решения: $u = U(y, \lambda, \mu)$, ранг 3.
Фактор-уравнение:
$-\beta^{-1} U_\lambda - \alpha U_\mu - (\beta_0 + \gamma_0) U_{\lambda\lambda} - (\beta_0 + \gamma_0) U_{yy} - \gamma_0 \beta^2 U_{\mu\mu} + U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + U_{yyyy} + \beta^4 U_{\mu\mu\mu\mu} + 2U_{\lambda\lambda yy} + 2\beta^2 U_{\lambda\lambda\mu\mu} + 2\beta^2 U_{yy\mu\mu} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

3. $L_{1.3} = \langle \alpha\partial_z + \beta\partial_t \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $x, y, \lambda = \beta z - \alpha t; u$.

Представление решения: $u = U(x, y, \lambda)$, ранг 3.
Фактор-уравнение:
$-\alpha U_\lambda - \big(\beta_0 + \gamma_0\big)U_{xx} - \big(\beta_0 + \gamma_0\big)U_{yy} - \gamma_0\beta^2 U_{\lambda\lambda} + U_{xxxx} + U_{yyyy} + \beta^4 U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + 2U_{xxyy} + 2\beta^2 U_{xx\lambda\lambda} + 2\beta^2 U_{yy\lambda\lambda} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

4. $L_{2.1} = \langle \alpha\partial_\theta + \partial_z, \beta\partial_\theta + \partial_t\rangle$
Система координат: цилиндрическая.
Инварианты подалгебры: $r, \lambda = \theta - \alpha z - \beta t; u$.
Представление решения: $u = U(r, \lambda)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$\beta U_\lambda + \left(\dfrac{\beta_0 + \gamma_0}{r} - \dfrac{1}{r^3}\right)U_r + \left(\beta_0 + \gamma_0 + \dfrac{1}{r^2}\right)U_{rr} + \left(\dfrac{\beta_0 + \gamma_0}{r^2} - \dfrac{3}{r^5} - \gamma_0\alpha^2\right)U_{\lambda\lambda} - \dfrac{2}{r}U_{rrr} - \left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{4}{r^4} - \dfrac{1}{r}\alpha^2\right)U_{r\lambda\lambda} - U_{rrrr} - \left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{r}\alpha^2 - 1\right)U_{rr\lambda\lambda} - \left(\dfrac{1}{r^4} - \dfrac{2}{r^2}\alpha^2 + \alpha^4\right)U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + \alpha_0 U + \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

5. $L_{2.2} = \langle \partial_x + \partial_z, \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \partial_t\rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = x - \alpha\beta^{-1}y - z, \mu = \beta^{-1}y - t; u$
Представление решения: $u = U(\lambda, \mu)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$-U_\mu - \big[\big(\beta_0 + \gamma_0\big)\alpha^2\beta^{-2} + \big(\beta_0 + 2\gamma_0\big)\big]U_{\lambda\lambda} - \big(\beta_0 + \gamma_0\big)\beta^{-2}U_{\mu\mu} + \big(4 + 4\alpha^2\beta^{-2} + \alpha^4\beta^{-4}\big)U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + 4\beta^{-2}U_{\lambda\lambda\mu\mu} + \beta^{-4}U_{\mu\mu\mu\mu} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

6. $L_{2.3} = \langle \partial_z, \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \partial_t\rangle$.
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = x - \alpha\beta^{-1}y, \mu = \beta^{-1}y - t; u$.
Представление решения: $u = U(\lambda, \mu)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$-U_\mu - \big(\beta_0 + \gamma_0\big)\big(1 + \alpha^2\beta^{-2} +\big)\big]U_{\lambda\lambda} - \big(\beta_0 + \gamma_0\big)U_{\mu\mu} + \big(4 + 2\alpha^2\beta^{-2} + \alpha^4\beta^{-4}\big)U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + 2\beta^{-2}U_{\lambda\lambda\mu\mu} + \beta^{-4}U_{\mu\mu\mu\mu} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

7. $L_{2.4} = \langle \partial_x + \partial_t, \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \partial_z\rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = x - \alpha\beta^{-1}y - t, \mu = \beta^{-1}y - z; u$.
Представление решения: $u = U(\lambda, \mu)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$-U_\lambda - \big(\beta_0 + \gamma_0\big)\big(1 + \alpha^2\beta^{-2}\big)U_{\lambda\lambda} - \big[\big(\beta_0 + \gamma_0\big)\beta^{-2} + \gamma_0\big]U_{\mu\mu} + \big(1 + 2\alpha^2\beta^{-2} + \alpha^4\beta^{-4}\big)U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + \big(1 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}\big)U_{\mu\mu\mu\mu} + 2\big(1 + \beta^{-2} + \alpha^2\beta^{-2}\big)U_{\lambda\lambda\mu\mu} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

8. $L_{2.5} = \langle \partial_t, \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \partial_z\rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = x - \alpha\beta^{-1}y, \mu = \beta^{-1}y - z; u$.
Представление решения: $u = U(\lambda, \mu)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$-\big(\beta_0 + \gamma_0\big)\big(1 + \alpha^2\beta^{-2}\big)U_{\lambda\lambda} - \big[\big(\beta_0 + \gamma_0\big)\beta^{-2} + \gamma_0\big]U_{\mu\mu} + \big(1 + 2\alpha^2\beta^{-2} + \alpha^4\beta^{-4}\big)U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + \big(1 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}\big)U_{\mu\mu\mu\mu} + 2\big(1 + \beta^{-2} + \alpha^2\beta^{-2}\big)U_{\lambda\lambda\mu\mu} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

9. $L_{2.6} = \langle \partial_\theta, \partial_t\rangle$
Система координат: цилиндрическая.
Инварианты подалгебры: $r, t; u$.
Представление решения: $u = U(r, t)$, ранг 2.

Фактор-уравнение:
$U_t - \left(\frac{\beta_0+\gamma_0}{r} - \frac{1}{r^3}\right)U_r - \left(\beta_0+\gamma_0+\frac{1}{r^2}\right)U_{rr} + \frac{2}{r}U_{rrr} + U_{rrrr} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

10. $L_{2.7} = \langle \partial_z, \alpha\partial_x + \beta\partial_y \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = x - \alpha\beta^{-1}y, t; u$.
Представление решения: $u = U(\lambda, t)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$U_t - (\beta_0+\gamma_0)(1+\alpha^2\beta^{-2})U_{\lambda\lambda} + (1+2\alpha^2\beta^{-2}+\alpha^4\beta^{-4})U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

11. $L_{2.8} = \langle \partial_x + \partial_z, \alpha\partial_x + \beta\partial_y \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = x - \alpha\beta^{-1}y - z, t; u$.
Представление решения: $u = U(\lambda, t)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$U_t - \left[(\beta_0+\gamma_0)\alpha^2\beta^{-2} + (\beta_0+2\gamma_0)\right]U_{\lambda\lambda} + (4+4\alpha^2\beta^{-2}+\alpha^4\beta^{-4})U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

12. $L_{2.9} = \langle \partial_\theta, \partial_z \rangle$
Система координат: цилиндрическая.
Инварианты подалгебры: $r, z; u$.
Представление решения: $u = U(r, z)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$-\left(\frac{\beta_0+\gamma_0}{r} - \frac{1}{r^3}\right)U_r - \left(\beta_0+\gamma_0+\frac{1}{r^2}\right)U_{rr} - \gamma_0 U_{zz} + \frac{2}{r}U_{rrr} + \frac{1}{r}U_{rzz} + U_{rrrr} + \left(\frac{1}{r} + 1\right)U_{rrzz} + U_{zzzz} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

13. $L_{2.10} = \langle \partial_t, \alpha\partial_x + \beta\partial_y \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = x - \alpha\beta^{-1}y, z; u$.
Представление решения: $u = U(\lambda, z)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$-(\beta_0+\gamma_0)(1+\alpha^2\beta^{-2})U_{\lambda\lambda} - \gamma_0 U_{zz} + (1+2\alpha^2\beta^{-2}+\alpha^4\beta^{-4})U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + U_{zzzz} + 2(1+\alpha^2\beta^{-2})U_{\lambda\lambda zz} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

14. $L_{2.11} = \langle \partial_x + \partial_t, \alpha\partial_x + \beta\partial_y \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = x - \alpha\beta^{-1}y - t, z; u$.
Представление решения: $u = U(\lambda, z)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$U_\lambda - (\beta_0+\gamma_0)(1+\alpha^2\beta^{-2})U_{\lambda\lambda} - \gamma_0 U_{zz} + (1+2\alpha^2\beta^{-2}+\alpha^4\beta^{-4})U_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + U_{zzzz} + 2(1+\alpha^2\beta^{-2})U_{\lambda\lambda zz} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

15. $L_{2.12} = \langle \partial_x, \partial_y \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $z, t; u$.
Представление решения: $u = U(z, t)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$U_t - \gamma_0 U_{zz} + U_{zzzz} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

16. $L_{2.12} = \langle \partial_z, \partial_t \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $x, y; u$.

Представление решения: $u = U(x, y)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$-\big(\beta_0 + \gamma_0\big)U_{xx} - \big(\beta_0 + \gamma_0\big)U_{yy} + U_{xxxx} + U_{yyyy} + 2U_{xxyy} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

17. $L_{3.1} = \langle \partial_x, a\partial_y + \partial_z, b\partial_y + \partial_t \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $\lambda = y - az - bt; u$.
Представление решения: $u = U(\lambda)$, ранг 1.
Фактор-уравнение:
$-bU' - \big[\beta_0 + \gamma_0\big(1 + a^2\big)\big]U'' + \big(1 + 2a^2 + a^4\big)U'''' - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

18. $L_{3.2} = \langle \partial_x, \partial_y, ay\partial_x - ax\partial_y + \partial_t \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $t; u$.
Представление решения: $u = U(t)$.
Фактор-уравнение:
$U_t = 0$, ранг 1.
Решение: $u = U_0 = const$ - тривиально.

19. $L_{3.3} = \langle \partial_x, \partial_y, ay\partial_x - ax\partial_y + \partial_t \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $z; u$.
Представление решения: $u = U(z)$, ранг 1.
Фактор-уравнение:
$-\gamma_0 U'' + U'''' - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

20. $L_{3.4} = \langle \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: t, u.
Представление решения: $u = U(t)$, ранг 1.
Фактор-уравнение:
$U_t = 0.$
Решение: $u = U_0 = const$ - тривиально.

21. $L_{3.5} = \langle \partial_x, \partial_y, \partial_t \rangle$
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $z; u$.
Представление решения: $u = U(z)$, ранг 1.
Фактор-уравнение:
$-\gamma_0 U'' + U'''' - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

22. $L_{3.6} = \langle \partial_x, \partial_y, y\partial_x - x\partial_y \rangle$ (операторы линейно связаны, будем иметь решение ранга 2)
Система координат: декартова.
Инварианты подалгебры: $t, z; u$.
Представление решения: $u = U(z, t)$, ранг 2.
Фактор-уравнение:
$U_t - \gamma_0 U_{zz} + U_{zzzz} - \alpha_0 U - \kappa_0 U^2 + U^3 = 0.$

23. $L_{3.7} = \langle \partial_\theta, \partial_z \partial_t \rangle$
Система координат: цилиндрическая.
Инварианты подалгебры: $r; u$.
Представление решения: $u = U(r)$, ранг 1.

Фактор-уравнение:

$$-\left(\frac{\beta_0+\gamma_0}{r}-\frac{1}{r}\right)U'-\left(\beta_0+\gamma_0+\frac{1}{r^2}\right)U''+\frac{2}{r}U'''+U''''-\alpha_0U-\kappa_0U^2+U^3=0.$$

Особый интерес представляет изучение класса трехмерных подалгебр. В этом случае факторуравнение есть дифференциальное уравнение четвертого порядка с одной неизвестной функцией, которая в свою очередь зависит лишь от одной переменной.

Групповые свойства уравнения (2.1) определяют содержательный список инвариантных решений, которые описывают физически интересные явления.

Список литературы

[1] Л.В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Москва, Наука, 1978.

[2] Л.В. Овсянников, *Программа ПОДМОДЕЛИ.Газовая динамика*, ПММ, **58**: 4 (1994), 30–55.

[3] Л.В. Овсянников, *Об оптимальных системах подалгебр*, Доклады РАН, **333** : 6 (1994), 702–704.

[4] N.M. Ghoniem, D. Walgraef, *Evolution dynamics of 3D periodic microstructures in irradiated materials*, Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., **1** (1993), 569–590.

Наталья Викторовна Любашевская
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: natti@gorodok.net