S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 383–386 (2008) УДК 517.51
MSC 42A30

ИСПРАВЛЕНИЕ К СТАТЬЕ "О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ПОЛИНОМАМИ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА"

Г. А. АКИШЕВ

Abstract. In this work a mistake in the paper is corrected.

В предлагаемом сообщении приведено исправление доказательства теоремы 1 в указанной в заголовке статье опубликованной в журнале "Сибирские электронные математические известия 2006 год , том 3, стр. 95 - 105.

В этой статье в доказательстве теоремы 1 (формула (6)) предложено применять лемму 1 и неравенство Гёльдера. В место этого в доказательстве формулы (6) нужно применять ниже доказанную лемму. Сначала напомним некоторые необходимые определения и обозначения из [1].

Функция $\psi(t)$ - называется Φ — функцией, если $\psi(t)$ непрерывная, неубывающая, вогнутая на отрезке $[0,1]$ функция, имеющая в каждой точке интервала $(0,1)$ конечную производную, причем $\psi(0)=0$.

Пусть $\bar{x}=(x_1,...,x_d)\in[0,1]^d\equiv I^d - -d$ – мерный единичный куб и даны числа $\theta_j\in(0,+\infty)$, $\quad j=1,...,d, \bar{\theta}=(\theta_1,...,\theta_d)$, Φ — функции $\psi_j(x_j)$, $x_j\in[0,1]$, $j=1,...,d$; $\bar{\psi}=(\psi_1,...,\psi_d)$.

Через $L^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}(I^d)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$ для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}=\left\{\int_0^1\psi_d^{\theta_d}(t_d)\left[\cdots\left[\int_0^1(\psi_1(t_1)\cdot f^{*_1,...,*_d}(t_1,...,t_d))^{\theta_1}\,\frac{dt_1}{t_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}\frac{dt_d}{t_d}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}}$$

Akishev G., Erratum to "On degree of approximation of classes polynomials with respect to generalized Haar system".

Поступила 19 сентября 2008 г., опубликована 24 сентября 2008 г.

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_d}(t_1,...,t_d) \equiv f^{*_1,\dots,*_d}(\bar{t})$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных.

Пусть даны $\{p_{n_j}^{(j)}\}$ – последовательности натуральных чисел $p_{n_j}^{(j)} \geq 2$; $n_j = 1,2,...$; $j = 1,2,...,d$ и $m_{n_j}^{(j)} = p_1^{(j)} \cdot ... \cdot p_{n_j}^{(j)}$.

Через $\{\chi_{\bar{n}}(\bar{x})\} = \left\{\prod\limits_{j=1}^{d} \chi_{n_j}(x_j)\right\}$ обозначим кратную обобщенную систему Хаара.

Лемма. *Пусть* $1 \leq \theta_j < +\infty$ *и даны* Φ — *функции* ψ_j, *удовлетворяющие условиям* $1 < \alpha_{\psi_j} \leq \beta_{\psi_j} < 2, j = 1,2,...,d$ *и даны произвольные измеримые множества* $E_j \subset [0,1], j = 1,...,d$. *Тогда для любого полинома вида*

$$T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x}) = \sum_{k_d=1}^{m_{n_d}^{(d)}} ... \sum_{k_1=1}^{m_{n_1}^{(1)}} a_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in I^d$$

имеет место неравенство

$$\int_{E_m} ... \int_{E_1} |T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x})| dx_1...dx_d \leq$$

$$\leq C(\psi,\theta,m) \cdot \prod_{j\in e} \frac{1}{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})} \cdot \prod_{j\in e} |E_j| \cdot \prod_{j\notin e} \frac{|E_j|}{\psi_j(|E_j|)} \|T_{\bar{m}_{n_d}}\|_{\bar{\psi},\bar{\theta}}^{*},$$

где $e \subset \{1,...,m\}$, $|E_j|$ *– мера Лебега множества* E_j.

Доказательство. Пусть e произвольное подмножество множества $\{1,...,m\}$. Положим $E_e = \prod_{j\in e} E_j$, $d^e\bar{x} = \prod_{j\in e} dx_j$

Известно,что для любого полинома $T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x})$ справедлива формула

$$T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x}) = \int_{I^{|e|}} T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{y}^e, \bar{x}^{\bar{e}}) \cdot \prod_{j\in e} D_{m_{n_j}}(x_j,y_j) d^e\bar{y},$$

где $D_n(t,u)$ – ядро Дирихле для обобщенной системы Хаара, $\bar{y}^e$ – вектор с координатами y_j, если $j \in e$, а $\bar{x}^{\bar{e}}$ – вектор с координатами x_j если $j \in \bar{e}$ – дополнение множества e и |e| – количество элементов e. По свойству интеграла Лебега имеем

$$\int_{E_{\bar{e}}} |T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x})| d^{\bar{e}}\bar{x} = \int_{E_{\bar{e}}} |\int_{I^{|e|}} T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{y}^e, \bar{x}^{\bar{e}}) \cdot \prod_{j\in e} D_{n_j}(x_j,y_j) d^e\bar{y}| d^{\bar{e}}\bar{x} \leq$$

$$\leq \int_{E_{\bar{e}}} \int_{I^{|e|}} |T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{y}^e, \bar{x}^{\bar{e}})| \cdot \prod_{j\in e} |D_{n_j}(x_j,y_j)| d^e\bar{y} d^{\bar{e}}\bar{x} =$$

$$= \int_{I^d} |T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{y}^e, \bar{x}^{\bar{e}})| \cdot \prod_{j\in e} |D_{n_j}(x_j,y_j)| \cdot \prod_{j\in \bar{e}} X_{E_j}(x_j) d^e\bar{y} d^{\bar{e}}\bar{x},$$

где X_E – характеристическая функция множества E.

К интегралам в правой части этого соотношения применяем неравенство Гёльдера. Тогда

$$\int_{E_{\bar{e}}} |T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x})| d^{\bar{e}}\bar{x} \leq \|T_{\bar{m}_{n_d}}\|_{\bar{\psi},\bar{\theta}}^{*} \cdot \| \prod_{j\in e} |D_{m_{n_j}^{(j)}}(x_j, \bullet)| \cdot \prod_{j\in \bar{e}} X_{E_j} \|_{\bar{\bar{\psi}},\bar{\theta}'}^{*} =$$

$$= \|T_{\bar{m}_{n_d}}\|^*_{\tilde{\psi},\bar{\theta}} \cdot \prod_{j\in e} \|D_{m^{(j)}_{n_j}}(x_j,\bullet)\|^*_{\tilde{\psi}_j,\theta'_j} \cdot \prod_{j\in\bar{e}} \|X_{E_j}\|^*_{\tilde{\psi}_j,\theta'_j}, \tag{1}$$

где $\tilde{\psi}_j(t) = \frac{t}{\psi_j(t)}, \theta'_j = \frac{\theta_j}{\theta_j - 1}, \quad j = 1, ..., d.$

Так как (см. [1], лемма Б)

$$\|X_{E_j}\|^*_{\tilde{\psi}_j,\theta'_j} = \left\{ \int_0^{|E_j|} \left(\tilde{\psi}_j(t_j)\right)^{\theta'_j} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta'_j}} \le C(\theta)\cdot\tilde{\psi}_j(|E_j|), \;\; j\in\bar{e},$$

то из неравенства (1) получим

$$\int_{E_{\bar{e}}} |T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x})| d^{\bar{e}}\bar{x} \le \|T_{\bar{m}_{n_d}}\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{j\in\bar{e}} \tilde{\psi}_j(|E_j|) \cdot \prod_{j\in e} \sup_{x_j} \|D_{m^{(j)}_{n_j}}(x_j,\bullet)\|^*_{\tilde{\psi}_j,\theta'_j}.$$

Отсюда учитывая оценку (см. [2], лемма 1)

$$\sup_{x_j} \|D_{m^{(j)}_{n_j}}(x_j,\bullet)\|^*_{\tilde{\psi}_j,\theta'_j} \le C(\theta,d)\cdot m^{(j)}_{n_j}\tilde{\psi}_j((m^{(j)}_{n_j})^{-1})$$

будем иметь

$$\int_{E_{\bar{e}}} |T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x})| d^{\bar{e}}\bar{x} \le C(d,\theta)\|T_{\bar{m}_{n_d}}\|^*_{\tilde{\psi},\bar{\theta}} \cdot \prod_{j\notin e} \tilde{\psi}_j(|E_j|) \cdot \prod_{j\in e} m^{(j)}_{n_j}\tilde{\psi}_j((m^{(j)}_{n_j})^{-1})$$

при фиксированных $x_j, j \in e$. Обе части этого неравенства интегрируя по переменным $x_j, j \in e$ получим

$$\int_{E_{\bar{e}}}\int_{E_e} |T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x})| d^{e}\bar{x} d^{\bar{e}}\bar{x} \le C(d,\theta)\|T_{\bar{m}_{n_d}}\|^*_{\tilde{\psi},\bar{\theta}} \cdot \prod_{j\in e}|E_j| \prod_{j\in\bar{e}} \tilde{\psi}_j(|E_j|) \cdot \prod_{j\in e} m^{(j)}_{n_j}\tilde{\psi}_j((m^{(j)}_{n_j})^{-1}).$$

Этим лемма доказана.

Список литературы

[1] Акишев Г.А., *О порядках приближения классов полиномами по обобщенной системе Хаара*, Сибирские электронные математические известия, **3** (2006), 95–105.

[2] Акишев Г.А., *Обобщенная система Хаара и теоремы вложения в симметричные пространства*, Фундаментальная и прикладная математика, **8** (2002), 319–334.

Габдолла Акишевич Акишев
Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова,
проспект Республики 24, кв.116,
100024, Караганда, Казахстан
E-mail address: akishev@ksu.kz