S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 351–354 (2008) УДК 517.91
Краткие сообщения MSC 34C05

МОНОТОННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. В. ИВАНОВ, В. М. ЧЕРЕСИЗ

Abstract. We define the monotone functions of several real variables as well as describe the admissible operations over those and study their geometric structure. The suggested applications of our results to the stability theory of multidimensional dynamical systems are provided.

Keywords: monotone functions of several variables, first integrals and Lyapunov's functions of vector fields, Hamiltonian systems.

Здесь мы определяем понятие монотонной функции нескольких вещественных переменных, описываем свойства таких функций и допустимые операции над ними. Затем речь идет об устойчивости многомерных динамических систем, для которых монотонные функции служат их «первыми» интегралами или функциями Ляпунова. С одной стороны, динамическая картина для таких систем оказывается совершенно прозрачной благодаря простому геометрическому устройству монотонных функций, с другой же — функции Ляпунова, которые применяются для исследования устойчивости разнообразных автономных систем, на самом деле обычно не только положительны, но и монотонны.

1. Монотонные функции нескольких переменных. В дальнейшем U означает вещественную функцию, определенную в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 2$, звездной относительно начала координат. Будем считать, что эта функция гладкая всюду в D, кроме, возможно, нуля, где она непрерывна, причем $U(0) = 0$.

Функцию U назовем *монотонной* в области D, если $(\nabla U(x), x) > 0$ для всех точек $x \in D$, отличных от нуля. Геометрический смысл нашего условия

Ivanov, V. V., Cheresiz, V. M., Monotone integrals and stability of autonomous systems.

Представлена А. Д. Медных 28 августа 2008 г., опубликована 18 сентября 2008 г.

монотонности заключается в том, что функция растет с ненулевой скоростью вдоль любого луча, исходящего из начала координат.

Из этого замечания следует, что $U(x) > 0$ для всех отличных от нуля точек $x \in D$. С другой стороны, разумеется, далеко не каждая положительная функция монотонна. Однако в локальном смысле дело нередко обстоит именно так. Более точно, если функция U имеет невырожденный второй дифференциал в нуле, то монотонность этой функции вблизи начала координат равносильна каждому из следующих двух условий:

$$\text{(а)}\ \ U(x) > 0 \ \text{ при малых } \ x \neq 0; \qquad \text{(б)}\ \ dU(0) = 0 \ \text{ и } \ d^2U(0) > 0.$$

Заметим, что в случае, когда функция U дважды гладкая в окрестности нуля, из (б) можно получить более сильное следствие. А именно, если точки x и y расположены не слишком далеко от начала координат, то

$$(\nabla U(x) - \nabla U(y), x - y) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq y.$$

Это значит, что вблизи нуля градиент ∇U функции U представляет собой отображение, «строго» монотонное в смысле Браудера[1] и Минти[2]. Еще более общее понятие монотонности нелинейного оператора и примерно в то же самое время было предложено в работе [3].

Монотонные функции можно складывать, умножать на положительные числа, умножать одну на другую, возводить в любую положительную степень. Последнее утверждение нетрудно усилить. Интереснее другой вопрос — какие замены переменных сохраняют монотонность? Точнее, пусть G означает еще одну звездную окрестность нуля в пространстве $\mathbb{R}^n$, а φ отображает ее в область D. Предположим, что это отображение непрерывно в нуле и гладкое в остальных точках множества G. Наконец, мы будем считаь, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Отображение φ назовем *допустимым*, если для любой монотонной в области D функции U суперпозиция $U \circ \varphi$ монотонна в G.

Теорема 1. *Отображение φ допустимо тогда и только тогда, когда функция $\|\varphi\|$ монотонна, а «нормированное» отображение $\varphi/\|\varphi\|$ однородно.*

2. Геометрия монотонных функций. Теперь мы обсудим вопрос о геометрическом устройстве и взаимном расположении множеств уровня $\{U = c\}$ монотонной функции U при малых $c > 0$. Напомним, что у нас $U(0) = 0$, а тогда $dU(0) = 0$, если функция U дифференцируема в нуле. Если же функция U дважды гладкая вблизи начала координат, а ее второй дифференциал в нуле положительно определен, то, согласно «лемме» Морса [4], около нуля она гомеоморфной заменой переменных превращается в сумму квадратов новых переменных. Как известно [4], гомеоморфизм здесь можно заменить диффеоморфизмом, а значит, интересующие нас множества в подходящих гладких координатах представляют собой обыкновенные сферы с центром в нуле.

У монотонной функции может и не быть вторых производных, но даже в сколь угодно гладком случае ее второй дифференциал в нуле вовсе не обязан быть положительно определенным. Тем не менее, как мы сейчас увидим, геометрическая картина здесь такая же, как в «случае» Морса.

Пусть S будет стандартной сферой пространства $\mathbb{R}^n$, состоящей из всех его точек ξ, для которых $\|\xi\| = 1$. Каждая точка $x \neq 0$ однозначно записывается в виде $x = t\xi$, где $t > 0$ и $\xi \in S$. При этом те значения параметра t, для которых точка x оказывается в пределах области D, заполняют интервал вида $0 < t < t(\xi)$, где $0 < t(\xi) \leq +\infty$.

Если функция U монотонна, то для любого $\xi \in S$ ее значения $U(t\xi)$ определены и растут, когда параметр t пробегает интервал от 0 до $t(\xi)$. Посчитаем предел $c(\xi)$ этих значений при $t \to t(\xi)$ слева. Пусть c_* означает точную нижнюю границу множества всех $c(\xi)$, где $\xi \in S$. Величина c_* может оказаться бесконечной, но всегда $c_* > 0$. Действительно, при достаточно малом $r > 0$ сфера rS содержится в области D, а функция U имеет на ней положительный минимум. Ясно, что c_* больше этого минимума.

Теорема 2. *Для любой монотонной функции U ее множествами уровня $\{U = c\}$, где $0 < c < c_*$, служат гладкие гиперповерхности, диффеоморфные сфере, окружающие начало координат и при $c \to 0$ стягивающиеся к нему.*

3. Устойчивость автономных систем. В области D, о которой говорилось выше, рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \tag{1}$$

где F означает гладкое в D векторное поле. Пусть $F(0) = 0$, так что наша система имеет решение, определенное на всей числовой оси и тождественно равное нулю. Обсудим вопрос об устойчивости этого решения.

Теорема 3. *Предположим, что нашлась такая монотонная в D функция U, что $(\nabla U, F) > 0$ всюду в области D, кроме начала координат. Тогда каждая траектория системы (1), проходящая через точку, в которой $0 < U < c_*$, трансверсально пересекает все поверхности $\{U = c\}$, где $0 < c < c_*$, причем, пересечения эти происходят «изнутри наружу». Если же $(\nabla U, F) < 0$ во всех отличных от нуля точках области D, вывод тот же самый с той лишь разницей, что теперь пересечения происходят «снаружи внутрь».*

В частности, описанная в теореме картина показывает, что в первом случае нулевое решение системы неустойчиво «при $t \to +\infty$» и асимптотически устойчиво «при $t \to -\infty$». Во втором же случае нулевое решение, напротив, неустойчиво «при $t \to -\infty$» и асимптотически устойчиво «при $t \to +\infty$».

Разумеется, эти утверждения об устойчивости и неустойчивости вытекают из классических теорем Ляпунова и того обстоятельства, что монотонная функция положительна. Однако надо признать, что при условии монотонности функции Ляпунова они становятся геометрически совершенно прозрачными. Заметим при этом, что функции Ляпунова, которые применяются для исследования вопроса об устойчивости разнообразных автономных систем, как правило, не только положительны, но и монотонны в обсуждаемом нами смысле. Наконец, подчеркнем, что в предыдущей теореме в случае устойчивости нулевого решения указана и «гарантированная» область его притяжения, а именно, множество $\{U < c_*\}$. Например, если $c_* = \infty$, областью притяжения оказывается все множество D, где задана система. Для системы, определенной во всем пространстве, — это известная теорема Барбашина — Красовского [5].

4. Монотонные «первые» интегралы. Функцию U назовем *интегралом* поля F, или системы (1), если $(\nabla U(x), F(x)) = 0$ для всех $x \neq 0$. Это значит, что на каждой траектории системы (1) функция U принимает постоянное значение.

Если система (1) имеет монотонный интеграл, ее нулевое решение, разумеется, устойчиво по Ляпунову. С другой стороны, само по себе существование монотонного интеграла, вообще говоря, предъявляет жесткое требование к размерности пространства, где рассматривается система.

Теорема 4. *Система (1), для которой начало координат служит изолированной точкой покоя, может обладать монотонным интегралом только в том случае, когда она имеет четный порядок.*

Интересно было бы выяснить, останется ли в силе эта теорема, если предположение о монотонности интеграла заменить условием его положительности.

5. Гамильтоновы системы и их возмущения. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, y), \qquad \dot{y} = G(x, y), \tag{2}$$

где F и G означают n-мерные вещественные отображения, зависящие от двух наборов n-мерных вещественных переменных x и y, считая эти отображения гладкими в некоторой звездной окрестности начала координат пространства $\mathbb{R}^{2n}$ и равными нулю при $x = y = 0$. Систему (2) мы называем *гамильтоновой*, если матрица Якоби отображения $(G, -F)$ симметрична.

В той же области, где задано векторное поле (F, G), рассмотрим еще одно гладкое поле (Φ, Ψ), так же равное нулю в начале координат, и порождаемую им «возмущенную» систему

$$\dot{x} = F + \Phi, \qquad \dot{y} = G + \Psi. \tag{3}$$

Теорема 5. *Пусть система (2) гамильтонова. Если $(x, G) > (y, F)$ всюду, кроме начала координат, нулевое решение системы (2) устойчиво по Ляпунову. Если при этом в каждой ненулевой точке $(G, \Phi) < (F, \Psi)$, нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво, а в случае противоположного строгого неравенства это же решение оказывается неустойчивым.*

Мы выражаем искреннюю признательность Е. П. Волокитину за обсуждение результатов нашей работы, которое было для нас приятным и полезным.

Список литературы

[1] Browder F., Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 858–861.
[2] Minty G. J., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **50** (1963), 1038–1041.
[3] Чересиз В. М., *О почти–периодических решениях нелинейных систем*, ДАН СССР, **165**: 2 (1965), 281–284.
[4] Morse M., Cairns S., *Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology. An introduction*, Academic press, New York and London, 1969.
[5] Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., *Об устойчивости движения в целом*, ДАН СССР, **86**: 3 (1952), 453–456.

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru

Владимир Михайлович Чересиз
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: fzagirova@yandex.ru