S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 334–338 (2008) УДК 519.65

MSC 65D

О НАХОЖДЕНИИ ПОЛНОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СПЛАЙНА ЧЕРЕЗ B-СПЛАЙНЫ

Ю. С. ВОЛКОВ

Abstract. We discuss a problem of interpolation by a complete spline of $2n-1$ degree given in B-spline representation. It is shown that the first n and the last n coefficients of B-spline decomposition are under explicit formulas and other coefficients can be found as a solution of a banded system of an equitype linear equations.

Keywords: complete spline, interpolation, B-splines.

В данной статье мы обсуждаем задачу интерполяции некоторых данных (x_i, y_i), $i = 0, \dots, N$, взятых в узлах сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ отрезка $[a, b]$ классическим полиномиальным сплайном нечётной степени $2n-1$ минимального дефекта.

Для однозначного определения сплайна обычно добавляют по $n-1$ краевых условий на каждом из концов отрезка $[a, b]$. Мы будем рассматривать один из наиболее распространённых типов краевых условий — задание в точках a и b по $n-1$ значений младших производных $y_a^{(\nu)}$, $y_b^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, n-1$, т.е. мы рассматриваем так называемую задачу интерполяции *полным* сплайном.

Решение данной задачи сводится к решению системы линейных уравнений относительно каких-либо параметров выбранного представления сплайна.

Наиболее просто получается система линейных уравнений при выборе представления сплайна $s(x)$ в виде разложения его по B-сплайнам. В этом случае требуется расширить некоторым, вообще говоря, произвольным образом сетку узлов Δ за пределы отрезка $[a, b]$.

Volkov, Yu.S., On complete interpolation spline finding via B-splines.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ-ННИО (проект 04-01-04003), Отделения математических наук РАН (проект 2006-1.3.1), Интеграционных проектов СО РАН (проект 2006-66).

Поступила 26 ноября 2007 г., опубликована 2 августа 2008 г.

Будем считать, что сетка Δ расширена необходимым количеством узлов

$$(1) \qquad \ldots \leqslant x_{-2} \leqslant x_{-1} \leqslant x_0 = a, \qquad b = x_N \leqslant x_{N+1} \leqslant x_{N+2} \leqslant \ldots$$

Функция $g[x; x_i, \ldots, x_{i+k}]$, являющаяся разделённой разностью от усечённой степенной функции $g(x,t) = (x_{i+k} - x_i)(t-x)_+^{k-1}$ по переменной t, взятой в точках $x_i, \ldots, x_{i+k}$ называется B-сплайном (нормализованным) $N_{ik}(x)$ порядка k (степени $k-1$). B-сплайны обладают рядом замечательных свойств [1], [2], среди которых

$$\operatorname{supp} N_{ik} = [x_i, x_{i+k}],$$

$$\sum_i N_{ik}(x) \equiv 1, \qquad x \in [a,b].$$

В силу того, что B-сплайны образуют базис в пространстве сплайнов, то любой сплайн может быть представлен в виде B-сплайн-разложения. Пусть для решения задачи интерполяции выбрано представление $s(x)$ именно в виде разложения по B-сплайнам

$$(2) \qquad s(x) = \sum_{j=1-2n}^{N-1} \alpha_j N_{j,2n}(x), \qquad x \in [a,b].$$

Тогда задача построения интерполяционного сплайна сводится к определению параметров α_j, $j = 1-2n, \ldots, N-1$.

Действительно, при таком представлении (2) сплайна $s(x)$ требуемая система уравнений получается довольно просто из интерполяционных и краевых условий и имеет вид

$$(3) \qquad \sum_{j=1-2n}^{-1} \alpha_j N_{j,2n}^{(\nu)}(x_0) = y_a^{(\nu)}, \qquad \nu = 1, \ldots, n-1,$$

$$(4) \qquad \sum_{j=1-2n}^{N-1} \alpha_j N_{j,2n}(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, N,$$

$$(5) \qquad \sum_{j=N-2n+1}^{N-1} \alpha_j N_{j,2n}^{(\nu)}(x_N) = y_b^{(\nu)}, \qquad \nu = 1, \ldots, n-1.$$

Однако, одно из неудобств использования полученной системы уравнений (3) – (5) состоит в том, что уравнения разнотипны, а именно, характер граничных уравнений (3) и (5) отличается от (4); в одном случае коэффициентами при неизвестных являются значения B-сплайнов, а в другом — производных. Кроме того, уравнения (3) и (5) нарушают ленточность системы, точнее происходит увеличение ширины ленты по сравнению с интерполяционными уравнениями (4), что нежелательно.

Цель настоящей заметки показать, что систему уравнений (3) – (5) можно преобразовать к более удобному виду и с сохранением ленточности.

Для достижения указанной цели распорядимся свободой выбора дополнительных узлов сетки Δ (см. (1)). Будем выбирать их кратными, т. е. совпадающими с крайними узлами x_0 и x_N:

$$(6) \qquad \ldots = x_{-2} = x_{-1} = x_0 = a, \qquad b = x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots$$

Заметим, что все B-сплайны $N_{ik}(x)$ с носителями, содержащими интервал (x_0, x_1), в точке x_0 имеют узел кратности $-i$, поэтому дефект в этом узле тоже равен $-i$. Аналогичная картина и на другом конце интервала $[a, b]$. Тогда справедлива следующая

Лемма 1. *При выборе дополнительных узлов сетки* Δ *в соответствии с* (6) *имеют место равенства*

$$N_{ik}(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = 1-k, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad N_{ik}(x_N) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = N-1, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

В силу леммы 1 уравнения (4) при $i = 0$ и $i = N$ будут иметь вид

$$\alpha_{1-2n} = y_0, \tag{7}$$

$$\alpha_{N-1} = y_N. \tag{8}$$

Уравнения (3) и (5), полученные из краевых условий, также как и (7), (8), задают значения в крайних точках интервала $[a, b]$, но только производных интерполируемой функции. Ясно, что такие уравнения также можно записать в виде (7) и (8), параметрами тогда будут выступать коэффициенты разложения производных сплайна $s(x)$ по B-сплайнам соответствующей степени.

Обозначим через α_i^ν коэффициенты разложения ν-ой производной искомого сплайна $s(x)$ по B-сплайнам $(2n-\nu)$-го порядка

$$s^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1-2n+\nu}^{N-1} \alpha_j^\nu N_{j,2n-\nu}(x), \qquad x \in [a, b].$$

Ясно, что α_j^0 суть искомые коэффициенты α_j. А уравнения, получаемые из краевых условий, по аналогии с равенствами (7), (8) можно переписать в виде

$$\alpha_{1-2n+\nu}^\nu = y_a^{(\nu)}, \qquad \nu = 1, \dots, n-1, \tag{9}$$

$$\alpha_{N-1}^\nu = y_b^{(\nu)}, \qquad \nu = 1, \dots, n-1. \tag{10}$$

Следующая лемма позволяет связать коэффициенты уравнений (9), (10) с искомыми параметрами α_j.

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$\alpha_i^\nu = \frac{2n-\nu}{x_{i+2n-\nu} - x_i} \left(\alpha_i^{\nu-1} - \alpha_{i-1}^{\nu-1}\right). \tag{11}$$

Доказательство непосредственно следует из свойства B-сплайнов (см., например, [1], [2])

$$N'_{i,k+1}(x) = \frac{k}{x_{i+k} - x_i} N_{ik}(x) - \frac{k}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} N_{i+1,k}(x).$$

Известные значения $\alpha_{1-2n}^0, \dots, \alpha_{-n}^{n-1}$ (см. (7), (9)) и лемма 2 позволяют рекуррентным образом определить нужные коэффициенты $\alpha_{2-2n}^0, \dots, \alpha_{-n}^0$, т. е. искомые параметры $\alpha_{2-2n}, \dots, \alpha_{-n}$, а именно,

$$\alpha_j^{\nu-1} = \alpha_{j-1}^{\nu-1} + \frac{x_{j+2n-1} - x_0}{2n-\nu} \alpha_j^\nu, \quad j = 2-2n, \dots, -n, \ \ \nu = 1, \dots, 1-n-j. \tag{12}$$

Аналогично, через известные значения $\alpha^0_{N-1}, \ldots, \alpha^{n-1}_{N-1}$ (см. (8), (10)) так же рекуррентно можем определить неизвестные $\alpha_{N-n}, \ldots, \alpha_{N-2}$:

$$(13)\quad \alpha^{\nu-1}_{N-j-1} = \alpha^{\nu-1}_{N-j} + \frac{x_{N-j} - x_N}{2n-\nu}\alpha^{\nu}_{N-j}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, n-j.$$

Введём обозначение для элементарных симметрических функций от k переменных

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sym}^k_0(t_1, \ldots, t_k) = 1,\\
&\mathrm{sym}^k_1(t_1, \ldots, t_k) = t_1 + \ldots + t_k,\\
&\mathrm{sym}^k_2(t_1, \ldots, t_k) = t_1 t_2 + t_1 t_3 + \ldots + t_{k-1} t_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathrm{sym}^k_k(t_1, \ldots, t_k) = t_1 \cdot \ldots \cdot t_k.
\end{aligned}$$

Практически очевидно следующее свойство симметрических функций.

Лемма 3. *Имеют место соотношения*

$$(14)\qquad \mathrm{sym}^{k+1}_j(t_1, \ldots, t_{k+1}) = \mathrm{sym}^k_j(t_1, \ldots, t_k) + t_{k+1} \cdot \mathrm{sym}^k_{j-1}(t_1, \ldots, t_k).$$

Считаем, что $\mathrm{sym}^0_0 = 1$.

Симметрические функции и их свойство (14) позволяют от рекуррентных формул (12) и (13) перейти к явным:

Теорема. *Справедливы равенства*

$$(15)\qquad \alpha_{j-2n} = \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(2n-1-\nu)!}{(2n-1)!}\,\mathrm{sym}^{j-1}_{\nu}(x_1 - x_0, \ldots, x_j - x_0)\, y^{(\nu)}_a,$$

$$(16)\qquad \alpha_{N-j} = \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(2n-1-\nu)!}{(2n-1)!}\,\mathrm{sym}^{j-1}_{\nu}(x_{N-1} - x_N, \ldots, x_{N-j} - x_N)\, y^{(\nu)}_b,$$

где $j = 1, \ldots, n$ *и* $y^{(0)}_a = y_0$, $y^{(0)}_b = y_N$.

Наконец исключим найденные параметры $\alpha_{1-2n}, \ldots, \alpha_{-n}$ и $\alpha_{N-n}, \ldots, \alpha_{N-1}$ из уравнений (4) при $i = 1, \ldots, N-1$, получая при этом $(2n-1)$-диагональную систему $N-1$ уравнений относительно лишь неизвестных $\alpha_{-n+1}, \ldots, \alpha_{N-n-1}$.

Итак, для коэффициентов $\alpha_{1-2n}, \ldots, \alpha_{-n}$ и $\alpha_{N-n}, \ldots, \alpha_{N-1}$ выбранного представления (2) искомого сплайна получены явные формулы (15) и (16), а остальные коэффициенты $\alpha_{-n+1}, \ldots, \alpha_{N-n-1}$ находятся из ленточной системы уравнений с минимально возможной шириной ленты $2n-1$.

В заключение приведём конкретный вид получаемой системы для наиболее распространённого случая кубических сплайнов ($n = 2$). Поскольку в практических задачах кубические B-сплайны обычно принято нумеровать по индексу среднего узла носителя, состоящего из четырёх интервалов, то B-сплайн $N_{i-2,4}(x)$ с носителем $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, соответствующий узлу x_i, обозначим $B_i(x)$ для всех $i = -1, \ldots, N+1$. Нумерацию коэффициентов разложения (2) так же сдвинем на две единицы для соответствия новой нумерации B-сплайнов, т. е.

$$s(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} b_j B_j(x),$$

где $b_j = \alpha_{j-2}$, $j = -1, \dots, N+1$. Теперь неизвестными, подлежащими определению, являются $b_{-1}, \dots, b_{N+1}$. Из формул (15), (16) имеем

$$b_{-1} = y_0, \qquad b_0 = y_0 + \frac{h_0}{3} y'_a,$$
$$b_{N+1} = y_N \qquad b_N = y_N - \frac{h_{N-1}}{3} y'_b,$$

(как обычно шаг сетки обозначен $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N-1$), а для остальных неизвестных $b_1, \dots, b_{N-1}$ записываем систему

$$B_1(x_1)b_1 + B_2(x_1)b_2 = y_1 - \frac{h_1^2}{(h_1+h_0)^2}\Big(y_0 + \frac{h_0}{3} y'_a\Big),$$
$$B_{i-1}(x_i)b_{i-1} + B_i(x_i)b_i + B_{i+1}(x_i)b_{i+1} = y_i, \quad i = 2, \dots, N-2\,,$$
$$B_{N-2}(x_{N-1})b_{N-2} + B_{N-1}(x_{N-1})b_{N-1} = y_{N-1} - \frac{h_{N-2}^2}{(h_{N-2}+h_{N-1})^2}\Big(y_N - \frac{h_{N-1}}{3} y'_b\Big).$$

Отметим, что такой же подход можно применить и для построения интерполяционного сплайна, выбирая параметрами коэффициенты разложения какой-либо производной искомого сплайна [3].

Список литературы

[1] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, Москва, 1980.

[2] L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*, Wiley, New York, 1981.

[3] Ю. С. Волков, *Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечётной степени*, Математические труды, **7**:2 (2004), 3–34.

Юрий Степанович Волков
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: volkov@math.nsc.ru