S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 279–282 (2008) УДК 514.7
Краткие сообщения MSC 53A05

МОНОТОННЫЕ ИНДИКАТРИСЫ КРИВИЗНЫ ПОЛНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

В. В. ИВАНОВ

Abstract. A complete classification of bijective relations between principal curvatures of C^2 surfaces of revolution is given.

Keywords: surfaces of revolution, curvature indicatrix.

Предметом обсуждения в нашей заметке служат полные дважды гладкие ориентированные поверхности вращения, главные кривизны которых связаны биективной зависимостью. Мы укажем все виды таких зависимостей и в каждом случае опишем соответствующие поверхности. Инициатором этого исследования был Виктор Андреевич Топоногов.

Линиями кривизны поверхности вращения, как хорошо известно, служат параллели и меридианы. Пусть k_1 и k_2 означают соответствующие главные кривизны. *Индикатрисой кривизны* поверхности вращения назовем совокупность всех пар (k_1, k_2), посчитанных во всех точках поверхности. Будем говорить, что *главные кривизны поверхности вращения связаны биективной зависимостью*, если для любых двух точек P и Q, лежащих на этой поверхности, равенство $k_1(P) = k_1(Q)$ справедливо тогда и только тогда, когда $k_2(P) = k_2(Q)$. Как нетрудно понять, индикатриса кривизны такой поверхности либо сводится к одной точке, и тогда поверхность будет сферой, плоскостью или цилиндром, либо является графиком непрерывной строго монотонной функции, определенной на некотором числовом промежутке.

Теорема 1. *Возрастающая линия служит индикатрисой соответствующим образом ориентированной полной поверхности вращения тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из описанных ниже классов 1 — 6.*

Ivanov, V. V., Monotone curvature indicatrices of complete surfaces of revolution.

Представлена А.Д. Медных 15 июня 2008 г., опубликована 16 июня 2008 г.

Теорема 2. *Убывающая линия служит индикатрисой соответствующим образом ориентированной полной поверхности вращения тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из описанных ниже классов 7 — 9.*

Исследование, результаты которого представлены в этой работе, могло бы обрести больший смысл, если бы оказалась справедливой следующя гипотеза: *любая полная выпуклая поверхность, у которой главные кривизны связаны биективной зависимостью, есть поверхность вращения.* С учетом описываемой далее картины, это утверждение заключало бы в себе многое из того, что известно о выпуклых поверхностях, чьи главные кривизны подчиняются тем или иным специальным связям [1, 2].

1. Возрастающие индикатрисы. Во всех описываемых в этом разделе шести случаях индикатриса представляет собой график строго возрастающей непрерывной и ограниченной функции $k_2 = \varphi(k_1)$, определенной на ограниченном промежутке с концами a и b, всегда располагается над диагональю $k_1 = k_2$ и опирается на нее своим левым концом.

Класс 1. Областью определения функции φ служит отрезок $a \le k_1 \le b$, где $0 < a < b$. При этом $\varphi(a) = a$ и $\varphi(k_1) > k_1$, если $a < k_1 \le b$. Для каждой функции φ, обладающей указанными свойствами, существует единственная полная поверхность вращения. Эта поверхность замкнута, выпукла, обладает плоскостью симметрии, ортогональной оси вращения и напоминает сплющенный вдоль этой оси эллипсоид.

Класс 2. Функция φ здесь также определена на отрезке $a \le k_1 \le b$, только теперь $0 = a < b$. При этом, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(k_1) > k_1$, если $0 < k_1 \le b$. Для каждой функции φ, обладающей указанными свойствами, существует единственная полная поверхность вращения. Она тоже замкнута, симметрична в прежнем смысле и сохраняет выпуклость, но только сферические точки на оси вращения в данном случае превращаются в точки уплощения.

Класс 3. Отрезок $a \le k_1 \le b$, на котором задана функция φ, теперь содержит как положительные, так и отрицательные числа: $a < 0 < b$. Как и прежде, $\varphi(a) = a$ и $\varphi(k_1) > k_1$, если $a < k_1 \le b$. Для того чтобы график такой функции служил индикатрисой кривизны полной поверхности вращения, необходимо и достаточно выполнения дополнительного условия. А именно, то единственное решение $v = v(x)$ дифференциального уравнения $dv/dx = \varphi(v/x)$, которое определено на промежутке $0 < x \le 1/b$ и принимает значение 1 при $x = 1/b$, должно удовлетворять неравенствам $v > -1$ и

$$\int_0^{1/b} \frac{v\,dx}{\sqrt{1 - v^2}} > 0.$$

Полная поверхность вращения здесь тоже однозначно определяется своей индикатрисой. Как и ранее, она замкнута и симметрична, но утрачивает выпуклость, становясь похожей на эллипсоид, который сильно втянул щеки.

Класс 4. Здесь функция φ определена на отрезке $a \le k_1 \le b$, где $a < b < 0$, причем, $\varphi(a) = a$ и $k_1 < \varphi(k_1) < 0$, если $a < k_1 \le b$. Каждой такой функции соответствует единственная полная поверхность вращения. Эта поверхность замкнута, выпукла, обладает плоскостью симметрии, ортогональной оси вращения, но, в отличие от поверхностей класса 1, похожа на эллипсоид, вытянутый вдоль оси вращения.

Класс 5. Первый случай нарушения единственности возникает, когда функция φ, определенная на том же отрезке $a \le k_1 \le b$, где $a < b < 0$, удовлетворяет почти тем же условиям: $\varphi(a) = a$ и $k_1 < \varphi(k_1) < 0$, если $a < k_1 < b$, только теперь $\varphi(b) = 0$. Для любой такой функции ее график является индикатрисой четырех полных поверхностей вращения. Все они выпуклы, причем, одна из них очень похожа на поверхность предыдущего класса. Отличие здесь только в том, что в максимально удаленную от оси вращения точку, лежащую на плоскости симметрии, она приходит с нулевой кривизной вдоль меридиана. Именно поэтому дальнейшее ее поведение не так жестко ограничено, как раньше. Поверхность уже не обязана отразиться от указанной плоскости, но может себе позволить сколь угодно долго быть цилиндром, а может и вовсе остаться им навсегда. Так возникают четыре варианта.

Класс 6. Последний случай возрастающей индикатрисы — это еще один пример нарушения единственности, но совсем иного рода по сравнению с предыдущим. Здесь функция φ определена на промежутке $a \le k_1 < 0$ и удовлетворяет условиям $\varphi(a) = a$ и $k_1 < \varphi(k_1) < 0$, а кроме того, в точке 0 имеет нулевой левосторонний предел. Для существования полной поверхности вращения, у которой индикатрисой является график функции φ такого вида, необходимо и достаточно, чтобы при каком–нибудь значении u_* из интервала $a < u_* < 0$ сходился интеграл

$$\int_{u_*}^{0} \frac{\varphi(u)}{\varphi(u) - u}\, e^{I(u)}\, d\,u, \quad \text{где} \quad I(u) = \int_{u_*}^{u} \frac{d\,t}{\varphi(t) - t}.$$

Любой такой функции соответствует целое семейство полных поверхностей вращения. Все они выпуклы и своей формой напоминают параболоиды. Каждая поверхность семейства уходит в бесконечность с определенным наклоном. Наклон либо выражается каким–нибудь числом, отличным от нуля, либо бесконечен, но при этом поперечные сечения поверхности все равно расширяются неограниченно. Для всякого наклона в семействе поверхностей, отвечающем данной индикатрисе, имеется ровно один представитель.

2. Убывающие индикатрисы. Совсем другая картина получается, когда индикатриса — убывающая линия. Во всех оставшихся примерах она представляет собой график функции φ, которая, кроме того, что будет сказано о ней в каждом конкретном случае, определена на ограниченном промежутке с концами $a < b \le 0$, всегда включающем точку a, непрерывна на нем и строго убывает. При этом весь график располагается над омбилической диагональю, иногда имея с ней одну общую точку.

Класс 7. Областью определения функции $k_2 = \varphi(k_1)$ здесь служит промежуток $a \le k_1 < 0$, так что на нем $\varphi > 0$. При этом в точке 0 левосторонний предел функции φ должен быть равен нулю. Любая такая функция задает единственную полную седловую поверхность вращения, гомеоморфную цилиндру, с симметричным выпуклым профилем и, в общем случае, по форме напоминающую катеноид. Важные черты поверхности зависят от характера асимптотики функции φ в нуле.

Класс 8. Поверхность, имеющая убывающую индикатрису, может быть периодической. Здесь мы рассмотрим именно такой случай. Пусть функция φ определена на отрезке от a до b, где $a < b < 0$, и удовлетворяет, помимо указанных выше общих требований, следующим условиям: $\varphi(a) > 0 > \varphi(b) > b$.

Для существования полной поверхности вращения, соотвнетствующей такой функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$I := \int\limits_a^b \frac{d\,u}{\varphi(u) - u} = \ln\frac{a}{b},$$

на наш взгляд, совершенно удивительное. При этом поверхность определяется индикатрисой однозначно. Ее профиль бесконечен в обе стороны и напоминает синусоиду, идущую вдоль оси вращения.

Класс 9. Последний случай, который нам остается обсудить, во многих отношениях похож на предыдущий, но отличается от него принципиальным моментом: он доставляет нам еще один пример нарушения единственности. Здесь функция φ также определена на отрезке от a до b, где $a < b < 0$, но удовлетворяет теперь немного другим условиям: $\varphi(a) > 0 > \varphi(b) = b$. График такой функции служит индикатрисой полной поверхности вращения тогда и только тогда, когда $I \le \ln(a/b)$, где I— только что рассмотренный интеграл. Но теперь эта поверхность уже далеко не единственна. Причина же заключается в следующем. Наиболее удаленная от оси вращения параллель состоит из омбилических точек, а в случае, когда $I < \ln(a/b)$, появляется целый омбилический слой. Но и одной его окружности достаточно, чтобы по ее достижении поверхность могла выбирать, как ей вести себя дальше. В каждый такой момент у нее два варианта — либо пройти еще один период, повторив предыдущую форму, либо свернуться сферой. Таким образом возникает бесконечная серия замкнутых поверхностей, похожих на стручки земляного ореха, заключающие в себе несколько зерен, причем число их может быть любым, но не менее двух. Если поверхность лишь один раз решает остановиться, получаются две поверхности параболоидного типа (т. е. гомеоморфные плоскости). Наконец, если поверхность без конца повторяет свою форму, она оказывается такой же периодически пульсирующей цилиндрической поверхностью, как в предыдущем классе, с той лишь разницей, что у нее теперь есть омбилические точки.

На этом заканчивается список биективных соотношений между главными кривизнами полных поверхностей вращения. Итак, мы завершили формулировки двух наших теорем. Для их обоснования требуется качественный анализ большого количества специальных дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] В. Бляшке, *Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. I. Элементарная дифференциальная геометия.* М. - Л., ОНТИ НКТП СССР, Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935.

[2] В. А. Топоногов, *Теорема единственности для поверхности, у которой главные кривизны связаны соотношением* $(1 - k_1 d)(1 - k_2 d) = -1$. // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, №4. С. 903 — 910.

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru