S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 229–250 (2008) УДК 533+517.9
MSC 35L60, 58J70, 76N15

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИКИ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА, ПОСТРОЕННЫЕ ПО ТРЕХМЕРНЫМ АЛГЕБРАМ СИММЕТРИИ

А. И. ГОЛОД, А. П. ЧУПАХИН

Abstract. We consider group-theoretical solution of equations of politropic gas generated by three-dimentional algebras Lie of symmetry. We observe the 37 invariant submodels admitting algebras with large normalizer. The factor systems of these submodels can be integrated.

Keywords: dynamics of polytropic gas, invariant solution, algebra of symmetry.

1. Введение.

Точные решения математических моделей механики сплошных сред (МСС) приобретают все большую ценность по мере усложнения этих моделей, особенно при рассмотрении эффектов нелинейности в многомерных движениях [1]. Методы группового анализа дифференциальных уравнений, в принципе не зависящие от размерности модели, позволяют строить широкий спектр физически интересных инвариантных и частично инвариантных решений, описывающих трехмерные движения сплошной среды. Для модели идеальной газовой динамики в настоящее время изучены обширные классы точных решений, среди которых можно выделить барохронные [2], периодические [3], вихрь Овсянникова [4,5], "простые"решения [6]. Главной проблемой при исследовании подмоделей большой модели МСС является изучение качественных свойств решения факторуравнений, описывающих подмодель.

Golod, A.I., Chupakhin, A.P., Invariant solution of dynamics of polytropic gas generated by three-dimensional algebras of symmetry.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00080), Программы поддержки ведущих научных школ, грант №5245.2006.1, Интеграционного проекта СО РАН №2.15.

Поступила 12 декабря 2007 г., опубликована 19 мая 2008 г.

Продвижение в этой задаче обеспечивает содержательную физическую интерпретацию решения.

Важную роль при этом играет численный эксперимент, иллюстрирующий различные режимы движения. Однако он может быть эффективным лишь при условии достаточно глубокого аналитического исследования решения. Такой анализ определяет область существования решения, наличие сингулярностей, даёт информацию о числе решений.

Глубокое и разностороннее аналитическое исследование возможно, в частности, для решений, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть для инвариантных решений ранга один. Как правило, они порождаются трехмерными подалгебрами общей алгебры симметрии модели (речь идет о моделях МСС с четырьмя независимыми переменными: временем t и пространственными координатами $\mathbf{x} = (x, y, z)$). Эта факторсистема, в свою очередь, допускает некоторую алгебру симметрии. Оказывается, некоторая подалгебра этой алгебры симметрии может быть получена согласно общей теории группового анализа [7].

Пусть система уравнений E допускает группу Ли с алгеброй Ли L и рассматривается инвариантная подмодель E/H системы E, порожденная подалгеброй $H \subset L$. Тогда факторсистема E/Hдопускает факторалгебру $H_1 = Nor_L H/H$, где $Nor_L H$ есть нормализатор подалгебры H в алгебре L.

Напомним, что нормализатором подалгебры H в L называется полалгебра $H' \subset L$, такая что $H' \supset H$, причем H является идеалом в H' и H' является максимальной из подалгебр L, обладающих таким свойством [7].

Подчеркнем, что вычисление фактора нормализатора - подалгебры H_1 - является чисто алгебраической процедурой, для этого не нужно даже привлекать сами уравнения E.

Знание подалгебры H_1 позволяет строить точные решения факторуравнений E/H. Возникает иерархия подмоделей [8].

Особенно интересными являются подмодели E/H, имеющие достаточно широкую алгебру H_1 в качестве алгебры симметрии. В этих случаях можно рассчитывать на существование дополнительных интегралов в системе E/H.

2. Решения уравнений газовой динамики,построенные по трёхмерным алгебрам симметрий.

Уравнения динамики политропного газа с уравнением состояния $p = S\rho^\gamma$, при произвольном показателе адиабаты $\gamma > 1$, допускают алгебру Ли симметрии L_{13} [9]. Оптимальная система подалгебр ΘL_{13} построена в [10]. В [11] А.А.Черевко дал полное описание инвариантных и частично инвариантных подмоделей, построенных по трехмерным подалгебрам $L_{3,k} \in \Theta L_{13}$ (k=1,2,..,207). Им доказана следующая теорема:

Трехмерные подалгебры из оптимальной системы ΘL_{13} порождают точные решения уравнений газовой динамики следующих типов:

146 инвариантных решений, 61 частично инвариантное решение и 12 представителей барохронных решений.

Последний тип выделен, поскольку барохронные решения допускают полное аналитическое описание и имеют нетривиальные физические свойства, такие как коллапс плотности и звуковой коллапс [2].

Оптимальная система ΘL_{13} в [10] построена как нормализованная. Это означает, что для каждой подалгебры этой системы указан ее нормализатор, тем самым среди подмоделей можно выделять те, которые имеют достаточно широкую алгебру симметрии H_1.

В данной работе построены 37 инвариантных подмоделей, отвечающие трехмерным подалгебрам $L_{3,j} \in \Theta L_{13}$ (j=1,2,..,37), имеющим в качестве нормализаторов $H_j = Nor_{L_{13}} L_{3,j}$ подалгебры высокой размерности: $\dim H_j = 7, 8, 9$. Наличие у системы алгебры симметрии $H_{1j} = H_j/L_{3,j}$ (j=1,2,..,37) размерности от трех до шести обеспечивает существование нескольких интегралов факторсистемы, состоящей, в общем случае, из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что в этих 37 случаях подмоделей с нормализаторами большой размерности факторсистемы $E/L_{3,j}$ почти всегда либо интегрируются в конечном виде, либо сводятся к конечным формулам и одному неявному обыкновенному дифференциальному уравнению для вспомогательной функции. Эта функция играет роль своеобразного обобщенного потенциала решения, поскольку функции задающие решение – компоненты скорости, плотность – выражаются через эту функцию и через ее производные. Ситуация аналогична описанной в [12], при анализе регулярных частично инвариантных решений уравнений.

Разобьем подмодели на две группы. В первую, обозначим ее символом E, мы отнесем те, в которых инвариантной независимой переменной является время t, вторая S будет состоять из подмоделей, в которых инвариантная независимая переменная включает по крайней мере одну из пространственных координат. Такое разбиение обусловлено разницей в процедуре интегрирования соответствующих факторсистем для подмоделей из разных групп. Далее будет подробно описан процесс интегрирования для одной подмодели каждой из групп. Для последующих подмоделей приводятся только итоговые формулы.

Результаты исследования представлены в виде списка подмоделей, обозначаемых символом **E(3,k)**, **S(3,k)** где число k соответствует номеру трехмерной подалгебры $L_{3,k}$ в оптимальной системе ΘL_{13} в работе [10]. Указывается базис подалгебры $L_{3,k}$,ее нормализатор $H_k = Nor_{L_{13}} L_{3,k}$, система координат – одна из перечисленных ниже, инварианты подалгебры, причем первым указан инвариант, составленный из независимых переменных. Далее следует формула представления решения через инвариантные функции и факторсистема $E/L_{3,k}$: пять уравнений подмодели, получающихся из уравнений газовой динамики после подстановки в них представления решения. После факторсистемы приводятся результаты ее интегрирования.

3.Уравнения газовой динамики в различных системах координат:

Декартова система координат (D):

Пространственные координаты x, y, z, время t, компоненты вектора скорости u,v,w плотность ρ, давление p.

$$\begin{cases} Du + \rho^{-1} p_x = 0, \\ Dv + \rho^{-1} p_y = 0, \\ Dw + \rho^{-1} p_z = 0, \\ D\rho + \rho\, div\mathbf{u} = 0, \\ Dp + \gamma\, p\, div\mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$D = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z, div\mathbf{u} = u_x + v_y + w_z.$$

Операторы алгебры $\mathbf{L_{13}}$**:**

$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = \partial_z, X_4 = t\partial_x + \partial_u, X_5 = t\partial_y + \partial_v, X_6 = t\partial_z + \partial_w X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,$

$$X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, X_{10} = \partial_t, X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$$

$$X_{13} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p, X_{14} = \rho\partial_\rho + p\partial_p.$$

Цилиндрическая система координат с осью x (С):

$$q = \sqrt{z^2 + y^2}, \varphi = \arctan(z/y), M = \sqrt{v^2 + w^2}, \Phi = \arctan(w/v), \psi = \Phi - \varphi,$$

остальные переменные как в декартовой системе координат.

$$\begin{cases} Du + \rho^{-1}p_x = 0, \\ DM + \rho^{-1}M(p_q\cos\psi + q^{-1}p_\varphi\sin\psi) = 0, \\ D\Phi + \rho^{-1}M^{-1}(-p_q\sin\psi + q^{-1}p_\varphi\cos\psi) = 0, \\ D\rho + \rho\, div\mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ Dp + \gamma p\, div\mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$D = \partial_t + u\partial_x + M\cos\psi\partial_q + q^{-1}M\sin\psi\partial_\varphi,$$
$$div\mathbf{u} = u_x + (M_q + q^{-1}M\Phi_\varphi)\cos\psi + (q^{-1}M_\varphi - M\Phi_q)\sin\psi.$$

Специальная система координат (С56):

$$q = \sqrt{z^2 + y^2}, \varphi = \arctan(z/y), Q = \sqrt{(v - y/t)^2 + (w - z/t)^2}, \Phi = \arctan\frac{w - z/t}{v - y/t}, \psi = \Phi - \varphi,$$

$$\begin{cases} Du + \rho^{-1}p_x = 0, \\ DQ + \rho^{-1}(p_q\cos\psi + q^{-1}p_\varphi\sin\psi) = 0, \\ D\Phi + \rho^{-1}Q(-p_q\sin\psi + q^{-1}p_\varphi\cos\psi) = 0, \\ D\rho + \rho\, div\mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ Dp + \gamma p\, div\mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$D = \partial_t + u\partial_x + (t^{-1}q + Q\cos\psi)\partial_q + q^{-1}Q\sin\psi\partial_\varphi,$$
$$div\mathbf{u} = u_x + 2t^{-1} + (Q_q + q^{-1}Q\Phi_\varphi)\cos\psi + (q^{-1}Q_\varphi - Q\Phi_q)\sin\psi.$$

4.Подмодели типа S.

- **Подмодель S(3,56)D.**
  Базис подалгебры: $X_1, X_{10}, X_{11} + aX_{14}$.
  Нормализатор подалгебры: H(7,57) = <1, 4, 7, 10, 11, 13,14>.
  Инварианты: $\frac{z}{y}, u, v, w, \rho y^{-a}, p y^{-a}$.
  Представление решения: $u = U(\lambda), v = V(\lambda), w = W(\lambda), \rho = y^a R(\lambda)$, $p = y^a P(\lambda)$, где $\lambda = \frac{z}{y}$.
  Уравнения подмодели: $$\begin{cases} (W - \lambda V)U_\lambda = 0, \\ (W - \lambda V)V_\lambda + R^{-1}(aP - \lambda P_\lambda) = 0, \\ (W - \lambda V)W_\lambda + R^{-1}P_\lambda = 0, \\ (W - \lambda V)R_\lambda + R(aV + W_\lambda - \lambda V_\lambda) = 0, \\ (W - \lambda V)P_\lambda + P(aV + \gamma W_\lambda - \gamma\lambda V_\lambda) = 0. \end{cases}$$
- **Подмодель S(3,58)D.**
  Базис подалгебры: $X_1, X_{10}, X_3 + X_{14}$.
  Нормализатор подалгебры: H(7,78) = <1, 2, 3, 4, 10, a11+13, b11+14>.
  Инварианты: $y, u, v, w, \rho e^{-z}, p e^{-z}$.
  Представление решения : $u = U(y), v = V(y), w = W(y), \rho = e^z R(y)$, $p = e^z P(y)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} VU_y = 0, \\ VV_y + R^{-1}P_y = 0, \\ VW_y + R^{-1}P = 0, \\ VR_y + R(W + V_y) = 0, \\ VP_y + P(W + \gamma V_y) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная $\sigma = \sigma(y)$вводится по правилу ($V \neq 0$): $V\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\sigma}$,

Решение: $V = y_\sigma$,

$$\begin{aligned} &U = U_0, \\ &W = [a_0 y_\sigma^{\gamma+1} - \ln y_\sigma^\gamma]_\sigma, \\ &R = P_0 W_0^{-1} y_\sigma^{\gamma-1} e^{-a_0 y_\sigma^{\gamma+1}}, \\ &P = P_0 e^{-a_0} y_\sigma^{-(\gamma+1)}, \end{aligned}$$

где $a_0 = \frac{1}{W_0(\gamma+1)}, U_0, W_0, P_0$ - постоянные интегрирования.

Уравнение на y: $[a_0 y_\sigma^{\gamma+1} - \gamma \ln y_\sigma]_{\sigma\sigma} + W_0 y_\sigma^{\gamma-1} = 0$.

Здесь и почти во всех остпльных моделях группы S ключевым является неявное дифференциальное уравнение. Его решение определяет подмодель. Теория таких уравнений изложена в [13].

- **Подмодель S(3,87)D.**

Базис подалгебры: $X_5, X_6, X_{13} + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(9,13) = <1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13,14>.

Инварианты: $x, tu, tv - y, tw - z, \rho t^{-2-a}, pt^{-a}$.

Представление решения: $u = t^{-1}U(x), v = t^{-1}(V(x) + y)$, $w = t^{-1}(W(x) + z)$,$\rho = t^{2+a}R(x), p = t^a p(x)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} UU_x - U + R^{-1}P_x = 0, \\ UV_x = 0, \\ UW_x = 0, \\ UR_x + R(U_x + 4 + a) = 0, \\ UP_x + P(\gamma U_x + 2\gamma + a) = 0. \end{cases}$

Описание интегрирования:

Для интегрирования уравнений подмодели удобно ввести вместо переменной x новую независимую переменную σ, так что $U = x_\sigma$. Такой выбор объясняется тем, что в терминах σ производная Udf/dx, фигурирующая в факторсистеме, выпрямляется и переходит в производную $df/d\sigma$. Имеют место формулы: $U\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\sigma}; \frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{U}, U = x_\sigma, U \neq 0$.

Факторсистема переписывается в следующем виде:

$$\begin{cases} -x_\sigma + x_{\sigma\sigma} + x_\sigma^{-1}R^{-1}P_\sigma = 0, \\ V_\sigma = 0, \\ W_\sigma = 0, \\ (\ln R + \ln x_\sigma + \ln e^{(4+a)\sigma})_\sigma = 0, \\ (\ln P + \ln x_\sigma^\gamma + \ln e^{(2\gamma+a)\sigma})_\sigma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Интегрируем уравнения системы (1) со второго по пятое. Получаем следующие представления искомых функциий:

$$V = V_0,\quad W = W_0,\quad R = R_0 x_\sigma^{-1} e^{-(4+a)\sigma},\quad P = P_0 x_\sigma^{-\gamma} e^{-(2\gamma+a)\sigma}. \tag{2}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 - постоянные интегрирования.

Вычисляем выражение$\frac{P_\sigma}{R}$ в новых переменных.

$$\frac{P_\sigma}{R} = \frac{P_0}{R_0}\frac{e^{(4-2\gamma)\sigma}}{x_\sigma^\gamma}(\gamma x_{\sigma\sigma} + x_\sigma(2\gamma + a)). \tag{3}$$

Подставляем (3) в первое уравнение системы (1) и получаем уравнение на функцию x:

$$x_{\sigma\sigma}\left(1 - \gamma\frac{P_0}{R_0}\frac{e^{2(2-\gamma)\sigma}}{x_\sigma^{\gamma+1}}\right) - (2\gamma + a)\frac{P_0}{R_0}\frac{e^{2(2-\gamma)\sigma}}{x_\sigma^\gamma} - x_\sigma = 0. \tag{4}$$

Таким образом решение полностью описывается в терминах функции x независимой переменной σ и производной от нее.

Уравнение(4) допускает понижение порядка, поскольку его левая часть не зависит явно от переменной x. *Относится это и к другим подмоделям группы S.*

Другие подмодели серии S интегрируются по аналогичной схеме, поэтому в дальнейшем приводятся только конечные формулы.

- ***Подмодель S(3,88)D.***

Базис подалгебры: $X_5, X_6, X_{11} + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,60) = < 4, 5, 6, 7, 11, 13,14>.

Инварианты: $\frac{x}{t}, u, v - \frac{y}{t}, w - \frac{z}{t}, \rho t^{-a}, pt^{-a}$.

Представление решения: $u = U(\lambda), v = V(\lambda) + \frac{y}{t}, w = W(\lambda) + \frac{z}{t}, \rho = t^a R(\lambda), p = t^a P(\lambda)$, *где* $\lambda = \frac{x}{t}$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (U-\lambda)U_\lambda + R^{-1}P_\lambda = 0,\\ (U-\lambda)V_\lambda + V = 0,\\ (U-\lambda)W_\lambda + W = 0,\\ (U-\lambda)R_\lambda + R(U_\lambda + 2 + a) = 0,\\ (U-\lambda)P_\lambda + P(\gamma U_\lambda + 2\gamma + a) = 0.\end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ*:* $(U-\lambda)\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, U - \lambda \neq 0$.

Решение: $U = \lambda_\sigma + \lambda$,

$$V = V_0 e^{-\sigma},\quad W = W_0 e^{-\sigma},\quad R = R_0 \lambda_\sigma^{-1} e^{-(3+a)\sigma},\quad P = P_0 \lambda_\sigma^{-\gamma} e^{-(3\gamma+a)\sigma},$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на λ*:*

$\lambda_{\sigma\sigma}\left(\lambda_\sigma^{\gamma+1} - c_0^2 e^{3(1-\gamma)\sigma}\right) + \lambda_\sigma(\lambda_\sigma^{\gamma+1} - \gamma^{-1}c_0^2 e^{3(1-\gamma)\sigma}(a + 3\gamma)) = 0.$

- ***Подмодель S(3,92)D.***

Базис подалгебры: $X_5, X_6, aX_1 + X_2 + X_{13} + bX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,60) = < 4, 5, 6, 7, 11, 13,14>.

Инварианты: $x - a\ln(t), tu, tv - y + \ln(t), tw - z, \rho t^{-2-b}, pt^{-b}$.
Представление решения: $u = t^{-1}U(\lambda), v = t^{-1}(V(\lambda) + y - \ln(t))$,
$w = t^{-1}(W(\lambda) + z), \rho = t^{b+2}R(\lambda), p = t^b P(\lambda)$, *где* $\lambda = x - a\ln(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (U-a)U_\lambda - U + R^{-1}P_\lambda = 0, \\ (U-a)V_\lambda - 1 = 0, \\ (U-a)W_\lambda = 0, \\ (U-a)R_\lambda + R(U_\lambda + 4 + b) = 0, \\ (U-a)P_\lambda + P(\gamma U_\lambda + 2\gamma + b) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:
Новая независимая переменная σ: $(U-a)\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, U - a \neq 0$.
Решение: $U = \lambda_\sigma + a$,

$$\begin{aligned} &V = V_0 + \sigma, \\ &W = W_0, \\ &R = R_0\lambda_\sigma^{-1}e^{-(4+b)\sigma}, \\ &P = P_0\lambda_\sigma^{-\gamma}e^{-(2\gamma+b)\sigma}, \end{aligned}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 - *постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.
Уравнение на λ:
$\lambda_{\sigma\sigma}\left(\lambda_\sigma^{\gamma+1} - c_0^2 e^{(4-2\gamma)\sigma}\right) - \lambda_\sigma(\lambda_\sigma^{\gamma+1} + \gamma^{-1}c_0^2 e^{(4-2\gamma)\sigma}(b+2\gamma)) - a\lambda_\sigma^{\gamma+1} = 0$.

- ***Подмодель S(3,94)D.***
  Базис подалгебры: $X_5, X_6, X_1 + X_{13} + aX_{14}$.
  Нормализатор подалгебры: H(8,30) = < 1, 2, 3, 5, 6, 7+a11,b11+13,c11+14>.
  Инварианты: $x - \ln(t), tu, tv - y, tw - z, \rho t^{-2-a}, pt^{-a}$.
  Представление решения: $u = t^{-1}U(\lambda), v = t^{-1}(V(\lambda) + y)$,
  $w = t^{-1}(W(\lambda) + z), \rho = t^{a+2}R(\lambda), p = t^a P(\lambda)$, *где* $\lambda = x - \ln(t)$.

  Уравнения подмодели: $\begin{cases} (U-1)U_\lambda - U + R^{-1}P_\lambda = 0, \\ (U-1)V_\lambda = 0, \\ (U-1)W_\lambda = 0, \\ (U-1)R_\lambda + R(U_\lambda + 4 + a) = 0, \\ (U-1)P_\lambda + P(\gamma U_\lambda + 2\gamma + a) = 0. \end{cases}$

- ***Подмодель S(3,107)D.***
  Базис подалгебры: $aX_1 + X_2, X_6, X_{13} + bX_{14}$.
  Нормализатор подалгебры: H(7,91) = <1, 2, 3, 4, 11, 13, 14>.
  Инварианты: $z, tu - x + ay, tv, tw, \rho e^{-2-b}, pe^{-b}$.
  Представление решения: $u = t^{-1}(U(z) + x - ay), v = t^{-1}V(z)$,
  $w = t^{-1}W(z), \rho = e^{2+b}R(z), p = e^b P(z)$.

  Уравнения подмодели: $\begin{cases} WU_z - aV = 0, \\ WV_z - V = 0, \\ WW_z - W + R^{-1}P_z = 0, \\ WR_z + R(W_z + b + 3) = 0, \\ WP_z + P(\gamma W_z + b + \gamma) = 0. \end{cases}$

  Результаты интегрирования:
  Новая независимая переменная σ: $W\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\sigma}, W \neq 0$.

Решение: $W = z_\sigma$,

$$\begin{aligned} &V = V_0 e^{\sigma},\\ &U = aV_0 e^{\sigma} + U_0,\\ &R = R_0 z_\sigma^{-1} e^{-(3+b)\sigma},\\ &P = P_0 z_\sigma^{-\gamma} e^{-(\gamma+b)\sigma}, \end{aligned}$$

где U_0, V_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на z: $z_{\sigma\sigma} - z_\sigma + \gamma^{-1} c_0^2 e^{(3+b)\sigma}(z_\sigma^{-\gamma} e^{-(\gamma+b)\sigma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,108)D.***

Базис подалгебры: $X_1, aX_4 + X_6, X_{11} + bX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,84) = <1, 4, 5, 6, 11, 13,14>.

Инварианты: $\frac{y}{t}, u - \frac{az}{t}, v, w - \frac{z}{t}, \rho t^{-b}, pt^{-b}$.

Представление решения: $u = U(\lambda) + \frac{az}{t}, v = V(\lambda), w = W(\lambda) + \frac{z}{t}$, $\rho = t^b R(\lambda), p = t^b P(\lambda)$, *где* $\lambda = \frac{y}{t}$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (V-\lambda)U_\lambda + aW = 0,\\ (V-\lambda)V_\lambda + R^{-1}P_\lambda = 0,\\ (V-\lambda)W_\lambda + W = 0,\\ (V-\lambda)R_\lambda + R(V_\lambda + 1 + b) = 0,\\ (V-\lambda)P_\lambda + P(\gamma V_\lambda + \gamma + b) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $(V-\lambda)\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, V - \lambda \neq 0$.

Решение: $V = \lambda_\sigma + \lambda$,

$$\begin{aligned} &U = aW_0 e^{-\sigma} + U_0,\\ &W = W_0 e^{-\sigma},\\ &R = R_0 \lambda_\sigma^{-1} e^{-(2+b)\sigma},\\ &P = P_0 \lambda_\sigma^{-\gamma} e^{-(2\gamma+b)\sigma}, \end{aligned}$$

где U_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования.*

Уравнение на λ: $\lambda_{\sigma\sigma} + \frac{P_0}{R_0} e^{(b+2)\sigma}(\lambda_\sigma^{-\gamma} e^{-(2\gamma+b)\sigma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,115)D.***

Базис подалгебры: $X_1, X_2 + X_4, X_{10} + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,78) = <1, 2, 3, 4, 10, a11+13, b11+14>.

Инварианты: $z, u - y, v, w, \rho e^{-ta}, pe^{-ta}$.

Представление решения: $u = U(z) + y, v = V(z), w = W(z)$, $\rho = e^{ta} R(z), p = e^{ta} P(z)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} WU_z + V = 0,\\ WV_z = 0,\\ WW_z + R^{-1}P_z = 0,\\ WR_z + R(W_z + a) = 0,\\ WP_z + P(\gamma W_z + a) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $W\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\sigma}, W \neq 0$.

Решение: $W = z_\sigma$,

$$\begin{aligned} &V = V_0,\\ &U = -V_0\sigma + U_0,\\ &R = R_0 z_\sigma^{-1} e^{-a\sigma},\\ &P = P_0 z_\sigma^{-\gamma} e^{-a\sigma}, \end{aligned}$$

где U_0, V_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на z: $z_{\sigma\sigma} + z_\sigma\gamma^{-1}c_0^2 e^{a\sigma}(z_\sigma^{-\gamma}e^{-a\sigma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,143)D.***

Базис подалгебры: $X_1, X_3, X_{13} + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,63) = <1, 2, 3, 7, 11, 13,14>.

Инварианты: $x, tu, tv, tw, \rho t^{-2-a}, pt^{-a}$.

Представление решения: $u = t^{-1}U(x), v = t^{-1}V(x), w = t^{-1}W(x)$, $\rho = t^{2+a}R(x), p = t^a p(x)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} UU_x - U + R^{-1}P_x = 0, \\ UV_x - V = 0, \\ UW_x - W = 0, \\ UR_x + R(U_x + 2 + a) = 0, \\ UP_x + P(\gamma U_x + a) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ*:* $U\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\sigma}, U \neq 0$.

Решение: $U = x_\sigma$,

$$\begin{aligned} &V = V_0 e^\sigma, \\ &W = W_0 e^\sigma, \\ &R = R_0 x_\sigma^{-1} e^{-(2+a)\sigma}, \\ &P = P_0 x_\sigma^{-\gamma} e^{-a\sigma}, \end{aligned}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на x: $x_{\sigma\sigma} - x_\sigma + \gamma^{-1}c_0^2 e^{(a+2)\sigma}(x_\sigma^{-\gamma}e^{-a\sigma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,144)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_{11} + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(9,12) = <2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13,14>.

Инварианты: $\frac{x}{t}, u, v, w, \rho t^{-a}, pt^{-a}$.

Представлением: $u = U(\lambda), v = V(\lambda), w = W(\lambda), \rho = t^a R(\lambda)$, $p = t^a P(\lambda)$, *где* $\lambda = \frac{x}{t}$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (U-\lambda)U_\lambda + R^{-1}P_\lambda = 0, \\ (U-\lambda)V_\lambda = 0, \\ (U-\lambda)W_\lambda = 0, \\ (U-\lambda)R_\lambda + R(U_\lambda + a) = 0, \\ (U-\lambda)P_\lambda + P(\gamma U_\lambda + a) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ*:* $(U-\lambda)\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, U - \lambda \neq 0$.

Решение: $U = \lambda_\sigma + \lambda$,

$$\begin{aligned} &V = V_0, \\ &W = W_0, \\ &R = R_0 \lambda_\sigma^{-1} e^{-(1+a)\sigma}, \\ &P = P_0 \lambda_\sigma^{-\gamma} e^{-(\gamma+a)\sigma}, \end{aligned}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на λ*:* $\lambda_{\sigma\sigma} + \lambda_\sigma + \gamma^{-1}c_0^2 e^{(1+a)\sigma}(e^{-(a+\gamma)\sigma}\lambda_\sigma^{-\gamma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,150)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_{10} + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(9,11) = <1, 2, 3, 5, 6, 10, 7+a11, b11+13, c11+14>.

Инварианты: $x, u, v, w, \rho e^{-t}, pe^{-t}$.
Представление решения: $u = U(x), v = V(x), w = W(x), \rho = e^t R(x)$, $p = e^t p(x)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} UU_x + R^{-1}P_x = 0, \\ UV_x = 0, \\ UW_x = 0, \\ UR_x + R(U_x + 1) = 0, \\ UP_x + P(\gamma U_x + 1) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:
Новая независимая переменная σ: $U\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\sigma}, U \neq 0$.
Решение: $U = x_\sigma$,

$$\begin{aligned} &V = V_0, \\ &W = W_0, \\ &R = R_0 x_\sigma^{-1} e^{-\sigma}, \\ &P = P_0 x_\sigma^{-\gamma} e^{-\sigma}, \end{aligned}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 - *постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.
Уравнение на x: $x_{\sigma\sigma} + \gamma^{-1}c_0^2 e^\sigma (x_\sigma^{-\gamma} e^{-\sigma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,155)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, aX_4 + X_5 + X_{11} + bX_{14}$.
Нормализатор подалгебры: H(7,37) = <2, 3, 4, 5, 6, 11, a13+b14>.
Инварианты: $xt^{-1} - a\ln(t), u - a\ln(t), v - \ln(t), w, \rho t^{-b}, pt^{-b}$.
Представление решения: $u = U(\lambda) + a\ln(t), v = V(\lambda) + \ln(t)$, $w = W(\lambda), \rho = t^b R(\lambda), p = t^b P(\lambda)$, *где* $\lambda = xt^{-1} - a\ln(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (U - \lambda - a)U_\lambda + R^{-1}P_\lambda + a = 0, \\ (U - \lambda - a)V_\lambda + 1 = 0, \\ (U - \lambda - a)W_\lambda = 0, \\ (U - \lambda - a)R_\lambda + R(U_\lambda + b) = 0, \\ (U - \lambda - a)P_\lambda + P(\gamma U_\lambda + b) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:
Новая независимая переменная σ: $(U - \lambda - a)\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, U - \lambda - a \neq 0$.
Решение: $U = \lambda_\sigma + \lambda + a$,

$$\begin{aligned} &V = V_0 - \sigma, \\ &W = W_0, \\ &R = R_0 \lambda_\sigma^{-1} e^{-(1+b)\sigma}, \\ &P = P_0 \lambda_\sigma^{-\gamma} e^{-(\gamma+b)\sigma}, \end{aligned}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 - *постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.
Уравнение на λ: $\lambda_{\sigma\sigma} + (a+1)\lambda_\sigma + \gamma^{-1}c_0^2 e^{(1+b)\sigma}\lambda_\sigma (e^{-(b+\gamma)\sigma}\lambda_\sigma^{-\gamma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,156)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_4 + X_{11} + aX_{14}$.
Нормализатор подалгебры: H(8,53) = <2, 3, 4, 5, 6, 11, 7+a13, b13+14>.
Инварианты: $xt^{-1} - \ln(t), u - \ln(t), v, w, \rho t^{-a}, pt^{-a}$.
Представление решения: $u = U(\lambda) + \ln(t), v = V(\lambda), w = W(\lambda)$, $\rho = t^a R(\lambda), p = t^a P(\lambda)$, *где* $\lambda = xt^{-1} - \ln(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (U-\lambda-1)U_\lambda + R^{-1}P_\lambda + 1 = 0, \\ (U-\lambda-1)V_\lambda = 0, \\ (U-\lambda-1)W_\lambda = 0, \\ (U-\lambda-1)R_\lambda + R(U_\lambda + a) = 0, \\ (U-\lambda-1)P_\lambda + P(\gamma U_\lambda + a) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $(U-\lambda-1)\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, U-\lambda-1 \neq 0.$

Решение: $U = \lambda_\sigma + \lambda + 1,$

$$\begin{array}{l} V = V_0, \\ W = W_0, \\ R = R_0\lambda_\sigma^{-1}e^{-(1+a)\sigma}, \\ P = P_0\lambda_\sigma^{-\gamma}e^{-(\gamma+a)\sigma}, \end{array}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на λ: $\lambda_{\sigma\sigma} + \lambda_\sigma + \gamma^{-1}c_0^2 e^{(1+a)\sigma}\lambda_\sigma(e^{-(a+\gamma)\sigma}\lambda_\sigma^{-\gamma})_\sigma = 0.$

При $U = \lambda + 1$ *решение имеет вид* $V = V(\lambda), W = W(\lambda),$ $P = P(\lambda), R = -P_\lambda$ *с произвольными функциями* V, W, P *лишь при* $\gamma = 2$ *и* $a = -2$.

- ***Подмодель S(3,161)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, aX_4 + X_5 + aX_{10} + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,45) = <1, 2, 3, 5, 6, 4+10,14>.

Инварианты: $x - (1/2)t^2, u - t, v - a^{-1}t, w, \rho e^{-\frac{t}{a}}, pe^{-\frac{t}{a}}$.

Представление решения: $u = U(\lambda) + t, v = V(\lambda) + a^{-1}t, w = W(\lambda),$ $\rho = e^{\frac{t}{a}}R(\lambda), p = e^{\frac{t}{a}}P(\lambda),$ *где* $\lambda = x - (1/2)t^2$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} UU_\lambda + 1 + R^{-1}P_\lambda = 0, \\ UV_\lambda + a^{-1} = 0, \\ UW_\lambda = 0, \\ UR_\lambda + R(U_\lambda + a^{-1}) = 0, \\ UP_\lambda + P(\gamma U_\lambda + a^{-1}) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $U\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, U \neq 0.$

Решение: $U = \lambda_\sigma,$

$$\begin{array}{l} V = V_0 - \sigma/a, \\ W = W_0, \\ R = R_0\lambda_\sigma^{-1}e^{-\sigma/a}, \\ P = P_0\lambda_\sigma^{-\gamma}e^{-\sigma/a}, \end{array}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на λ: $\lambda_{\sigma\sigma} + \lambda_\sigma + \gamma^{-1}c_0^2 e^{\sigma/a}\lambda_\sigma(e^{-\sigma/a}\lambda_\sigma^{-\gamma})_\sigma = 0.$

- ***Подмодель S(3,162)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_4 + X_{10} + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(8,12) = <1, 2, 3, 5, 6, 7, 4+10,14>.

Инварианты: $x - (1/2)t^2, u - t, v, w, \rho e^{-t}, pe^{-t}$.

Представление решения: $u = U(\lambda) + t, v = V(\lambda), w = W(\lambda),$ $\rho = e^t R(\lambda), p = e^t P(\lambda),$ *где* $\lambda = x - (1/2)t^2$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} UU_\lambda + 1 + R^{-1}P_\lambda = 0, \\ UV_\lambda = 0, \\ UW_\lambda = 0, \\ UR_\lambda + R(U_\lambda + 1) = 0, \\ UP_\lambda + P(\gamma U_\lambda + 1) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $U\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\sigma}, U \neq 0$.

Решение: $U = x_\sigma$,

$$V = V_0,\quad W = W_0,\quad R = R_0 x_\sigma^{-1} e^{-\sigma},\quad P = P_0 x_\sigma^{-\gamma} e^{-\sigma},$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 - *постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на x: $x_{\sigma\sigma} + \gamma^{-1}c_0^2 e^\sigma (x_\sigma^{-\gamma} e^{-\sigma})_\sigma + 1 = 0$.

- ***Подмодель S(3,163)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_5 + X_{10} + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7, 39) = <1, 2, 3, 5, 6, 10, a11+b14>.

Инварианты: $x, u, v - t, w, \rho e^{-t}, pe^{-t}$.

Представление решения: $u = U(x), v = V(x) + t, w = W(x)$, $\rho = e^t R(x), p = e^t p(x)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} UU_x + R^{-1}P_x = 0, \\ UV_x + 1 = 0, \\ UW_x = 0, \\ UR_x + R(U_x + 1) = 0, \\ UP_x + P(\gamma U_x + 1) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $U\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\sigma}, U \neq 0$.

Решение: $U = x_\sigma$,

$$V = V_0 - \sigma,\quad W = W_0,\quad R = R_0 x_\sigma^{-1} e^{-\sigma},\quad P = P_0 x_\sigma^{-\gamma} e^{-\sigma},$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 - *постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на x: $x_{\sigma\sigma} + \gamma^{-1}c_0^2 e^\sigma (x_\sigma^{-\gamma} e^{-\sigma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,138)C.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_7 + aX_{13} + bX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,63) = <1, 2, 3, 7, 11, 13,14>.

Инварианты: $x, tu, tm, \Phi - a^{-1}\ln(t), \rho t^{-2-\frac{b}{a}}, pt^{-\frac{b}{a}}$.

Представление решения: $u = t^{-1}U(x), m = t^{-1}M(x)$, $\Phi = \chi(x) + a^{-1}\ln(t), \rho = t^{\frac{2a+b}{a}} R(x), p = t^{\frac{b}{a}} p(x)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} UU_x + U + R^{-1}P_x = 0, \\ UM_x - M = 0, \\ U\chi_x + a^{-1} = 0, \\ UR_x + R(U_x + a^{-1}(2a + b)) = 0, \\ UP_x + P(\gamma U_x + a^{-1}b) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $U\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\sigma}, U \neq 0$.

Решение: $U = x_\sigma$,

$$\begin{aligned}&M = M_0 e^{-\sigma},\\&\chi = -a^{-1}\sigma + \chi_0,\\&R = R_0 x_\sigma^{-1} e^{-\frac{2a+b}{a}\sigma},\\&P = P_0 x_\sigma^{-\gamma} e^{-\frac{b}{a}\sigma},\end{aligned}$$

где M_0, χ_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma \frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на x: $x_{\sigma\sigma} + x_\sigma + \gamma^{-1} c_0^2 e^{\frac{2a+b}{a}\sigma} (x_\sigma^{-\gamma} e^{-\frac{b}{a}\sigma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,139)C.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_7 + aX_{11} + bX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,61) = <2, 3, 4, 7, 11, 13,14>.

Инварианты: $\frac{x}{t}, u, m, \Phi - a^{-1}\ln(t), \rho t^{-\frac{b}{a}}, pt^{-\frac{b}{a}}$.

Представление решения: $u = U(\lambda), m = M(\lambda), \Phi = \chi(\lambda) + a^{-1}\ln(t)$, $\rho = t^{\frac{b}{a}} R(\lambda), p = t^{\frac{b}{a}} P(\lambda)$, *где* $\lambda = \frac{x}{t}$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases}(U-\lambda)U_\lambda + R^{-1}P_\lambda = 0,\\(U-\lambda)M_\lambda = 0,\\(U-\lambda)\chi_\lambda + a^{-1} = 0,\\(U-\lambda)R_\lambda + R(U_\lambda + 1) = 0,\\(U-\lambda)P_\lambda + P(\gamma U_\lambda + 1) = 0.\end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $(U-\lambda)\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, U - \lambda \neq 0$.

Решение: $U = \lambda_\sigma + \lambda$,

$$\begin{aligned}&M = M_0,\\&\chi = -a^{-1}\sigma + \chi_0,\\&R = R_0 \lambda_\sigma^{-1} e^{-2\sigma},\\&P = P_0 \lambda_\sigma^{-\gamma} e^{-(1+\gamma)\sigma},\end{aligned}$$

где M_0, χ_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma \frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на x: $\lambda_{\sigma\sigma} + \lambda_\sigma + \gamma^{-1} c_0^2 e^{2\sigma} (e^{-(1+\gamma)\sigma} \lambda_\sigma^{-\gamma})_\sigma = 0$.

- ***Подмодель S(3,148)C.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_7 + X_{10} + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,59) = <1, 2, 3, 10, 7+a11, b11+13, c11+14>.

Инварианты: $x, u, m, \Phi - t, \rho e^{-at}, pe^{-at}$.

Представление решения: $u = U(x), m = M(x), \Phi = \chi(x) + t$, $\rho = e^{at} R(x), p = e^{at} p(x)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases}UU_x + R^{-1}P_x = 0,\\UM_x = 0,\\U\chi_x + 1 = 0,\\UR_x + R(U_x + a) = 0,\\UP_x + P(\gamma U_x + a) = 0.\end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $U\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\sigma}, U \neq 0$.

Решение: $U = x_\sigma$,

$$\begin{array}{l} M = M_0, \\ \chi = -\sigma + \chi_0, \\ R = R_0 x_\sigma^{-1} e^{-a\sigma}, \\ P = P_0 x_\sigma^{-\gamma} e^{-a\sigma}, \end{array}$$

где M_0, χ_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma \frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на x: $x_{\sigma\sigma} x_\sigma^{\gamma+1} - \gamma^{-1} c_0^2 (a x_\sigma + \gamma x_{\sigma\sigma}) = 0$.

- ***Подмодель S(3,84)C56.***

Базис подалгебры: $X_5, X_6, X_7 + aX_{13} + bX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,62) = <1, 5, 6, 7, 11, 13, 14>.

Инварианты: $x, ue^{\Phi a}, Qe^{\Phi a}, te^{\Phi a}, \rho e^{(-2a-b)\Phi}, pe^{-b\Phi}$.

Представление решения: $u = e^{-\Phi a} U(x), Q = e^{-\Phi a} Q(x)$,
$\Phi = a^{-1}[\ln t - \ln \chi(x)], \rho = e^{(2a+b)\Phi} R(x), p = e^{b\Phi} p(x)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} UU_x + R^{-1} P_x = 0, \\ UQ_x + \chi^{-1} Q = 0, \\ U\chi_x = 0, \\ UR_x + R(U_x + 2\chi^{-1}) = 0, \\ UP_x + \gamma P(U_x + 2\chi^{-1}) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $U \frac{df}{dx} = \frac{df}{d\sigma}, U \neq 0$.

Решение: $U = x_\sigma$,

$$\begin{array}{l} Q = \frac{Q_0}{\sigma + \chi_0}, \\ \chi = \sigma + \chi_0, \\ R = R_0 x_\sigma^{-1} (\sigma + \chi_0)^2, \\ P = P_0 x_\sigma^{-\gamma} (\sigma + \chi_0)^{2\gamma}, \end{array}$$

где Q_0, χ_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma \frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на x:
$x_{\sigma\sigma}(x_\sigma^{\gamma+1} - c_0^2 (\sigma + \chi_0)^{2-2\gamma}) - 2 x_\sigma c_0^2 (\sigma + \chi_0)^{2-4\gamma} \sigma^{2\gamma-1} = 0$.

- ***Подмодель S(3,85)C56.***

Базис подалгебры: $X_5, X_6, X_7 + aX_{11} + bX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,60) = <4, 5, 6, 7, 11, 13,14>.

Инварианты: $\frac{x}{t}, u, Q, te^{-\Phi a}, \rho e^{-b\Phi}, pe^{-b\Phi}$.

Представление решения: $u = U(\lambda), Q = Q(\lambda), \Phi = a^{-1}[\ln(t) - \ln \chi(\lambda)]$,
$\rho = e^{\Phi b} R(\lambda), p = e^{\Phi b} P(\lambda)$, *где* $\lambda = \frac{x}{t}$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (U - \lambda) U_\lambda + R^{-1} P_\lambda = 0, \\ (U - \lambda) Q_\lambda + Q = 0, \\ (U - \lambda) \chi_\lambda - a^{-1} \chi = 0, \\ (U - \lambda) R_\lambda + R(U_\lambda + 2) = 0, \\ (U - \lambda) P_\lambda + \gamma P(U_\lambda + 2) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $(U - \lambda) \frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{d\sigma}, U - \lambda \neq 0$.

Решение: $U = \lambda_\sigma + \lambda$,

$$\begin{array}{l} Q = Q_0 e^{-\sigma}, \\ \chi = \chi_0 e^{\frac{\sigma}{a}}, \\ R = R_0 \lambda_\sigma^{-1} e^{-3\sigma}, \\ P = P_0 \lambda_\sigma^{-\gamma} e^{-3\gamma\sigma}, \end{array}$$

где Q_0, χ_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma \frac{P_0}{R_0}$.

Уравнение на x*:* $\lambda_{\sigma\sigma} + \lambda_\sigma + \gamma^{-1} c_0^2 e^{3\sigma}(e^{-3\gamma\sigma}\lambda_\sigma^{-\gamma})_\sigma = 0$.

5.Подмодели типа E.

- ***Подмодель E(3,93)D.***

Базис подалгебры: $X_5, X_6, aX_1 + X_3 + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(8,65) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, a11+13, b11+14>.

Инварианты: $t, u, v - \frac{y}{t}, w - \frac{z}{t} + \frac{x}{at}, \rho e^{-\frac{x}{a}}, pe^{-\frac{x}{a}}$.

Представление решения: $u = U(t), v = V(t) + \frac{y}{t}, w = W(t) + \frac{z}{t} - \frac{x}{at}$, $\rho = e^{\frac{x}{a}} R(t), p = e^{\frac{x}{a}} P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} U_t + a^{-1}R^{-1}P = 0, \\ tV_t + V = 0, \\ tW_t - a^{-1}U + W = 0, \\ tR_t + R(a^{-1}tU + 2) = 0, \\ tP_t + P(a^{-1}tU + 2\gamma) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ*:* $t\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma}, \sigma = \ln t$,

Решение:

$$\begin{aligned} &U = -\tfrac{c_0 t^{2\gamma-3}}{a(2\gamma-3)}, \\ &V = V_0 t^{-1}, \\ &W = W_0 t^{-1} - \tfrac{c_0 t^{2\gamma-3}}{a^2(2\gamma-3)(2\gamma-2)}, \\ &R = R_0 t^{-2} \exp\left\{\tfrac{c_0 t^{2\gamma-2}}{a(2\gamma-3)(2\gamma-2)}\right\}, \\ &P = P_0 t^{-2\gamma} \exp\left\{\tfrac{c_0 t^{2\gamma-2}}{a(2\gamma-3)(2\gamma-2)}\right\}, \end{aligned}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{R_0}, \gamma \neq \frac{3}{2}$.

- ***Подмодель E(3,95)D.***

Базис подалгебры: $X_5, X_6, X_1 + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(9,14) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 14>.

Инварианты: $t, u, v - \frac{y}{t}, w - \frac{z}{t}, \rho e^{-x}, pe^{-x}$.

Представление решения: $u = U(t), v = V(t) + \frac{y}{t}, w = W(t) + \frac{z}{t}$, $\rho = e^x R(t), p = e^x P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} U_t + R^{-1}P = 0, \\ tV_t + V = 0, \\ tW_t + W = 0, \\ tR_t + R(tU + 2) = 0, \\ tP_t + P(tU + 2\gamma) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ*:* $t\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma}, \sigma = \ln t$,

Решение:

$$\begin{aligned} &U = \tfrac{P_0 t^{(3-2\gamma)}}{2\gamma-3} + U_0, \\ &V = V_0 t^{-1}, \\ &W = W_0 t^{-1}, \\ &R = R_0 t^{-2} \exp\left\{\tfrac{P_0 t^{3\gamma-2}}{(2\gamma-3)^2} - U_0 t\right\}, \\ &P = P_0 t^{-2\gamma} \exp\left\{\tfrac{P_0 t^{3\gamma-2}}{(2\gamma-3)^2} - U_0 t\right\}, \end{aligned}$$

где U_0, V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $\gamma \neq \frac{3}{2}$.

- ***Подмодель E(3,99)D.***

Базис подалгебры: $X_5, X_6, X_4 + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(9,22) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 7+a14>.

Инварианты: $t, u - \frac{x}{t}, v - \frac{y}{t}, w - \frac{z}{t}, \rho e^{-\frac{x}{t}}, pe^{-\frac{x}{t}}$.

Представление решения: $u = U(t) + \frac{x}{t}, v = V(t) + \frac{y}{t}, w = W(t) + \frac{z}{t}$, $\rho = e^{\frac{x}{t}} R(t), p = e^{\frac{x}{t}} P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} tU_t + U + R^{-1}P = 0, \\ tV_t + V = 0, \\ tW_t + W = 0, \\ tR_t + R(U+3) = 0, \\ tP_t + P(U + 3\gamma) = 0. \end{cases}$

Описание интегрирования:

Для интегрирования уравнений подмодели удобно ввести вместо времени t *новую независимую переменную* $\sigma = \ln t$, *так что* $t = e^\sigma$. *Такой выбор объясняется тем, что в терминах* σ *производная* tdf/dt, *фигурирующая в факторсистеме, выпрямляется и переходит в производную* $df/d\sigma$. *Имеют место формулы:* $t\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma}; \frac{df}{dt} = e^{-\sigma}\frac{df}{d\sigma}, \sigma = \ln t$.

Факторсистема переписывается в следующем виде:

$$\begin{cases} U_\sigma + U + R^{-1}P = 0, \\ V_\sigma + V = 0, \\ W_\sigma + W = 0, \\ (\ln R)_\sigma + U + 3 = 0, \\ (\ln P)_\sigma + U + 3\gamma = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Составляя разность двух последних уравнений системы (5) получим уравнение:

$(\ln P)_\sigma - (\ln R)_\sigma + 3(\gamma - 1) = 0$,

которое интегрируется в следующем виде:

$$\frac{P}{R} = k_0 e^{-3(\gamma-1)\sigma}. \tag{6}$$

Подставим выражение (6) в первое уравнение системы (5) и получим представление: $U_\sigma + U + k_0 e^{-3(\gamma-1)\sigma} = 0$,

из которого следует выражение:

$U = U_0 e^{-\sigma} + \frac{k_0}{4-3\gamma} e^{-3(\gamma-1)\sigma}$,

если $\gamma \neq 4/3$

При $\gamma = 4/3$ *имеем:*

$$U = U_0 e^{-\sigma} - k_0 \sigma e^{-\sigma} \tag{7}$$

Из второго и третьего уравнения находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} V &= V_0 e^{-\sigma}, \\ W &= W_0 e^{-\sigma} \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляем найденные значения (7) для U *в четвертое и пятое уравнения системы (5).*

Решение представляется в виде:

$$R = R_0 e^{-3\sigma} Q(\sigma), P = P_0 e^{-3\gamma\sigma} Q(\sigma), \tag{9}$$

для $\gamma \neq 4/3$, $Q(\sigma) = \exp\left\{\frac{c_0 e^{3(1-\gamma)\sigma}}{(4-3\gamma)(3-3\gamma)} - U_0 e^{-\sigma}\right\}$

для $\gamma = 4/3$, $Q(\sigma) = \exp\{(U_0 - c_0 - \sigma)e^{-\sigma}\}$

В (7)-(9) U_0, V_0, W_0, P_0, R_0 *- постоянные интегрирования,* $c_0^2 = \gamma \frac{P_0}{R_0}$, $\gamma \neq 4/3$.

Приведем формулы решения в терминах переменной t.

$$U = U_0 t^{-1} - k_0 t^{-1} \ln t,$$
$$V = V_0 t^{-1},$$
$$W = W_0 t^{-1},$$
$$R = R_0 t^{-3} Q(t),$$
$$P = P_0 t^{-3\gamma} Q(t),$$
$$Q(t) = \exp\left\{\frac{c_0 t^{3(1-\gamma)}}{(4-3\gamma)(3-3\gamma)} - U_0 t^{-1}\right\}, \quad \gamma \neq 4/3.$$

- ***Подмодель E(3,111)D.***

Базис подалгебры: $X_1, aX_4 + X_6, bX_4 + cX_5 + X_{11} + dX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(8,65) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, a11+13, b11+14>.

Инварианты: $t, u - \frac{x}{t} + \frac{ay}{t} + \frac{bz}{tc}, v, w, \rho e^{-\frac{z}{c}}, pe^{-\frac{z}{c}}$.

Представление решения: $u = U(t) + \frac{x}{t} - \frac{ay}{t} - \frac{bz}{tc}, v = V(t)$, $w = W(t), \rho = e^{\frac{z}{c}} R(t), p = e^{\frac{z}{c}} P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} tU_t + U - aV - c^{-1}bW = 0, \\ V_t = 0, \\ W_t + c^{-1}R^{-1}P = 0, \\ tR_t + R(c^{-1}tW + 1) = 0, \\ tP_t + P(c^{-1}tW + \gamma) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $t\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma}, \sigma = \ln t$,

Решение:

$$U = aV_0 + \frac{b}{c}W_0 + \frac{U_1}{t} - \frac{bk_0 t^{2-\gamma}}{c^2(\gamma-2)(\gamma-3)},$$
$$V = V_0,$$
$$W = W_0 + \frac{k_0 t^{2-\gamma}}{c(\gamma-2)},$$
$$R = R_0 t^{-1} \exp\left\{\frac{k_0 t^{3-\gamma}}{(\gamma-2)(\gamma-3)}\right\},$$
$$P = P_0 t^{-\gamma} \exp\left\{\frac{k_0 t^{3-\gamma}}{(\gamma-2)(\gamma-3)}\right\},$$

где $U_0, U_1, V_0, W_0, R_0, P_0$ *- постоянные интегрирования,* $\gamma \neq 2, \gamma \neq 3$.

- ***Подмодель E(3,113)D.***

Базис подалгебры: $aX_1 + aX_2, X_4, bX_5 + cX_6 + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(8,20) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, 11,a13+b14>.

Инварианты: $t, u - \frac{x}{t} + \frac{ay}{t} - \frac{abz}{tc}, v - \frac{bz}{tc}, w - \frac{z}{t}, \rho e^{-\frac{z}{tc}}, pe^{-\frac{z}{tc}}$.

Представление решения: $u = U(t) + \frac{x}{t} - \frac{ay}{t} + \frac{abz}{tc}, v = V(t) + \frac{bz}{tc}$, $w = W(t) + \frac{z}{t}, \rho = e^{\frac{z}{tc}} R(t), p = e^{\frac{z}{tc}} P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} tU_t + U - aV + c^{-1}abW = 0, \\ tV_t + c^{-1}bW = 0, \\ tW_t + W + c^{-1}R^{-1}P = 0, \\ tR_t + R(c^{-1}W + 2) = 0, \\ tP_t + P(c^{-1}W + 2\gamma) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:
Новая независимая переменная σ: $t\frac{df}{dt}=\frac{df}{d\sigma},\sigma=\ln t,$
Решение:

$$\begin{aligned}
&U=aV_0+\tfrac{ab}{c}W_0\ln t+\tfrac{U_1}{t}-\tfrac{abc_0^2t^{3-2\gamma}}{c^2(2\gamma-3)^2},\\
&V=V_0-\tfrac{b}{c}W_0\ln t+\tfrac{bc_0^2t^{3-2\gamma}}{c^2(2\gamma-3)^2},\\
&W=\tfrac{W_0}{t}+\tfrac{c_0^2t^{2-2\gamma}}{c^2(2\gamma-3)},\\
&R=R_0t^{-2}\exp\left\{\tfrac{W_0}{ct}+\tfrac{c_0^2t^{2-2\gamma}}{c^2(2\gamma-3)(2\gamma-2)}\right\},\\
&P=P_0t^{-2\gamma}\exp\left\{\tfrac{W_0}{ct}+\tfrac{c_0^2t^{2-2\gamma}}{c^2(2\gamma-3)(2\gamma-2)}\right\},
\end{aligned}$$

где U_0,U_1,V_0,W_0,R_0,P_0 *- постоянные интегрирования,* $\gamma\neq\frac{3}{2}$.

- ***Подмодель E(3,118)D.***

Базис подалгебры: $X_1,X_3+X_4,aX_3+X_5+bX_6+X_{14}$.
Нормализатор подалгебры: H(7,53) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, a11-a13+b14>.
Инварианты: $t,u+yb-z+\frac{ay}{t},v-\frac{y}{t},w-\frac{yb}{t},\rho e^{-\frac{y}{t}},pe^{-\frac{y}{t}}$.
Представление решения: $u=U(t)+z-yb-\frac{ay}{t},v=V(t)+\frac{y}{t}$,
$w=W(t)+\frac{yb}{t},\rho=e^{\frac{y}{t}}R(t),p=e^{\frac{y}{t}}P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} tU_t-V(a+tb)+tW=0,\\ tV_t+V+R^{-1}P=0,\\ tW_t+bV=0,\\ tR_t+R(V+1)=0,\\ tP_t+P(V+\gamma)=0.\end{cases}$

- ***Подмодель E(3,119)D.***

Базис подалгебры: $X_1,X_3+X_4,aX_2+bX_3+X_{14}$.
Нормализатор подалгебры: H(8,22) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, a11+b13+14>.
Инварианты: $t,u-z+\frac{by}{b},v,w,\rho e^{-\frac{y}{a}},pe^{-\frac{y}{a}}$.
Представление решения: $u=U(t)+z-\frac{by}{a},v=V(t),w=W(t)$,
$\rho=e^{\frac{y}{a}}R(t),p=e^{\frac{y}{a}}P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} U_t-a^{-1}bV+W=0,\\ V_t+a^{-1}R^{-1}P=0,\\ W_t=0,\\ R_t+a^{-1}RV=0,\\ P_t+a^{-1}PV=0.\end{cases}$

Результаты интегрирования:
Новая независимая переменная σ: $t\frac{df}{dt}=\frac{df}{d\sigma},\sigma=\ln t,$
Решение:

$$\begin{aligned}
&U=\tfrac{P_0b}{a^2}\left(V_0t-\tfrac{t^2}{2}\right)-W_0t+U_0,\\
&V=\tfrac{P_0}{a}\left(V_0-t\right),\\
&W=W_0,\\
&R=R_0\exp\left\{\tfrac{P_0}{a^2}\left(\tfrac{t^2}{2}-V_0t\right)\right\},\\
&P=P_0R_0\exp\left\{\tfrac{P_0}{a^2}\left(\tfrac{t^2}{2}-V_0t\right)\right\},
\end{aligned}$$

где U_0,V_0,W_0,R_0,P_0 *- постоянные интегрирования.*

- ***Подмодель E(3,120)D.***

Базис подалгебры: $X_1, X_2 + X_4, aX_3 + X_5 + bX_6 + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,53) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, a11-a13+b14>.

Инварианты: $t, u - y + \frac{tz}{bt+a}, v - \frac{z}{bt+a}, w - \frac{bz}{bt+a}, \rho e^{-\frac{z}{bt+a}}, pe^{-\frac{z}{bt+a}}$.

Представление решения: $u = U(t) + y - \frac{tz}{b+at}, v = V(t) + \frac{z}{bt+a}$,
$w = W(t) + \frac{bz}{bt+a}, \rho = e^{\frac{z}{bt+a}} R(t), p = e^{\frac{z}{bt+a}} P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (bt+a)U_t + (bt+a)V - tW = 0, \\ V_t + W = 0, \\ (bt+a)W_t + (bt+a)W + R^{-1}P = 0, \\ (bt+a)R_t + R(W+b) = 0, \\ (bt+a)P_t + P(W+\gamma b) = 0. \end{cases}$

- ***Подмодель E(3,145)D.***

подалгебры: $X_2, X_3, X_{11} - X_{13} + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,58) = < 2, 3, 7, 10, 11, 13,14>.

Инварианты: $t, x^{-1}u, x^{-1}v, x^{-1}w, \rho x^{2-a}, px^{-a}$.

Представление решения: $u = xU(t), v = xV(t), w = xW(t), \rho = x^{a-2}R(t)$,
$p = x^a P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} U_t + U^2 + aR^{-1}P = 0, \\ V_t + UV = 0, \\ W_t + UW = 0, \\ R_t + RU(a-1) = 0, \\ P_t + PU(a+\gamma) = 0. \end{cases}$

- ***Подмодель E(3,157)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, aX_4 + bX_5 + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(8,20) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, a13+b14>.

Инварианты: $t, u - \frac{x}{t}, v - \frac{bx}{ta}, w, \rho e^{-\frac{x}{ta}}, pe^{-\frac{x}{ta}}$.

Представление решения: $u = U(t) + \frac{x}{t}, v = V(t) + \frac{bx}{ta}, w = W(t)$,
$\rho = e^{\frac{x}{ta}} R(t), p = e^{\frac{x}{ta}} P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} tU_t + U + a^{-1}R^{-1}P = 0, \\ tV_t + ba^{-1}U = 0, \\ W_t = 0, \\ tR_t + R(a^{-1}U + 1) = 0, \\ tP_t + P(a^{-1}U + \gamma) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $t\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma}, \sigma = \ln t$,

Решение:

$$\begin{array}{l} U = U_0 t^{-1} + (3-\gamma)^{-1} t^{2-\gamma}, \\ V = V_0 + ba^{-1}U_0 t^{-1} + ba^{-1}(3-\gamma)^{-2} t^{3-\gamma}, \\ W = W_0, \\ R = R_0 t^{-1} \exp\left\{ -\frac{U_0}{at} + \frac{t^{2-\gamma}}{a(3-\gamma)(2-\gamma)} \right\}, \\ P = P_0 t^{-\gamma} \exp\left\{ -\frac{U_0}{at} + \frac{t^{2-\gamma}}{a(3-\gamma)(2-\gamma)} \right\}, \end{array}$$

где V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $\gamma \neq 2, \gamma \neq 3$.

- ***Подмодель E(3,159)D.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_4 + X_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(9,22) = <1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 7+ a13, b13+14>.

Инварианты: $t, u-\frac{x}{t}, v, w, \rho e^{-\frac{x}{t}}, pe^{-\frac{x}{t}}$.

Представление решения: $u = U(t)+\frac{x}{t}, v = V(t), w = W(t)$, $\rho = e^{\frac{x}{t}}R(t), p = e^{\frac{x}{t}}P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} tU_t + U + R^{-1}P = 0, \\ V_t = 0, \\ W_t = 0, \\ tR_t + R(U+1) = 0, \\ tP_t + P(U+\gamma) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ: $t\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma}, \sigma = \ln t$,

Решение:

$$\begin{array}{l} U = U_0 t^{-1} - k_0(3-\gamma)^{-1}t^{2-\gamma}, \\ V = V_0, \\ W = W_0, \\ R = R_0 t^{-1}\exp\left\{\frac{U_0}{t} + \frac{k_0 t^{3-\gamma}}{(3-\gamma)^2}\right\}, \\ P = P_0 t^{-\gamma}\exp\left\{\frac{U_0}{t} + \frac{k_0 t^{3-\gamma}}{(3-\gamma)^2}\right\}, \end{array}$$

где k_0, V_0, W_0, R_0, P_0 *- постоянные интегрирования,* $\gamma \neq 3$.

- ***Подмодель E(3,140)C.***

  Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_7 + aX_{11} - aX_{13} + bX_{14}$.

  Нормализатор подалгебры: H(7,58) = < 2, 3, 7, 10, 11, 13,14>.

  Инварианты: $t, x^{-1}u, x^{-1}m, \Phi - a^{-1}\ln(x), \rho x^{\frac{2a-b}{a}}, px^{-\frac{b}{a}}$.

  Представление решения: $u = xU(t), m = xM(t), \Phi = \chi(t) + a^{-1}\ln(x)$, $\rho = x^{\frac{b-2a}{a}}R(t), p = x^{\frac{b}{a}}P(t)$.

  Уравнения подмодели: $\begin{cases} U_t + U^2 + a^{-1}bR^{-1}P = 0, \\ M_t + UM = 0, \\ \chi_t + a^{-1}U = 0, \\ R_t + a^{-1}RU(b-a) = 0, \\ P_t + a^{-1}PU(b+a\gamma) = 0. \end{cases}$

- ***Подмодель E(3,152)C.***

  Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_1 + X_7 + aX_{14}$.

  Нормализатор подалгебры: H(8,25) = <1, 2, 3, 4, 10, 7+a11, b11+13, c11+14>.

  Инварианты: $t, u, m, \Phi - x, \rho e^{-xa}, pe^{-xa}$.

  Представление решения: $u = U(t), m = M(t), \Phi = \chi(t) + x$, $\rho = e^{xa}R(t), p = e^{xa}P(t)$.

  Уравнения подмодели: $\begin{cases} U_t + aR^{-1}P = 0, \\ M_t = 0, \\ \chi_t + U = 0, \\ R_t + aRU = 0, \\ P_t + aPU = 0. \end{cases}$

  Результаты интегрирования:

  Новая независимая переменная σ: $t\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma}, \sigma = \ln t$, *Решение:*

$$\begin{array}{l} U = -a\frac{P_0}{R_0}t + U_0, \\ \chi = a\frac{P_0}{2R_0}t^2 + U_0 t + \chi_0, \\ M = M_0, \\ R = R_0 e^{a\chi}, \\ P = P_0 e^{a\chi}, \end{array}$$

где $U_0, \chi_0, M_0, R_0, P_0$ *- постоянные интегрирования.*

- ***Подмодель E(3,154)C.***

Базис подалгебры: $X_2, X_3, X_4 + X_7 + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,89) = <1, 2, 3, 4, 11, 7+a13, b13+14>.

Инварианты: $t, u - \frac{x}{t}, m, \Phi - \frac{x}{t}, \rho e^{-\frac{xa}{t}}, p e^{-\frac{xa}{t}}$.

Представление : $u = U(t) + \frac{x}{t}, m = M(t), \Phi = \chi(t) + \frac{x}{t}, \rho = e^{\frac{xa}{t}} R(t)$, $p = e^{\frac{xa}{t}} P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} U_t + U + aR^{-1}P = 0, \\ M_t = 0, \\ t\chi_t + U = 0, \\ tR_t + R(aU + 1) = 0, \\ tP_t + P(aU + \gamma) = 0. \end{cases}$

Результаты интегрирования:

Новая независимая переменная σ*:* $t\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma}, \sigma = \ln t$,

Решение:

$$\begin{array}{l} U = \frac{(\chi_0 \ln t - \chi_0 - U_0)}{t} - \frac{aP_0}{R_0(2-\gamma)}t^{1-\gamma}, \\ \chi = \frac{(\chi_0 \ln t + U_0)}{t} + \frac{aP_0}{R_0(1-\gamma)(2-\gamma)}t^{1-\gamma}, \\ M = M_0, \\ R = R_0 t^{-1} e^{a\chi}, \\ P = P_0 t^{-\gamma} e^{a\chi}, \end{array}$$

где $U_0, \chi_0, M_0, R_0, P_0$ *- постоянные интегрирования,* $\gamma \neq 2$.

- ***Подмодель E(3,97)C56.***

Базис подалгебры: $X_5, X_6, X_4 + X_7 + aX_{14}$.

Нормализатор подалгебры: H(7,82) = <1, 4, 5, 6, 11, 7+a13, b13+14>.

Инварианты: $t, u - \Phi, Q, x - \Phi t, \rho e^{-a\Phi}, p e^{-a\Phi}$.

Представление решения: $u = U(t) + \frac{x}{t} - \frac{\chi(t)}{t}, Q = Q(t), \Phi = \frac{x}{t} - \frac{\chi(t)}{t}$, $\rho = e^{a\Phi} R(t), p = e^{a\Phi} P(t)$.

Уравнения подмодели: $\begin{cases} (t\chi + tU)_t + aR^{-1}P = 0, \\ tQ_t + Q = 0, \\ (t\chi)_t + U = 0, \\ tR_t + R(a\chi + aU + at\chi_t + 3) = 0, \\ tP_t + P(a\chi + aU + at\chi_t + 3\gamma) = 0. \end{cases}$

Как видно из приведенных формул большинство описанных моделей допускают содержательную физическую интерпретацию. Некоторые модели группы E описывают решения с линейным полем скоростей. Это известный в газовой динамике класс решений [15,16], но описанные представители дают конкретные решения достаточно простого вида, которые можно использовать для склейки решени уравнений газовой динамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №05-01-00080, Программы поддержки ведущих научных школ, грант №5245.2006.1, Интеграционного проекта СО РАН №2.15.

Список литературы

[1] Л.В. Овсянников, *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика*, Прикладная математика и механика, **58**: 4 (1994), 30–55.

[2] А.П. Чупахин, *Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1)*, Новосибирск, 1998 (Препр. / СО РАН, Ин-т гидродинамики; № 4-98).

[3] Л.В. Овсянников *О периодических движениях газа*, ПММ,**65**: 4 (2001),567–577.

[4] Л.В. Овсянников *Особый вихрь*, ПМТФ, **36**: 3 (1995), 45–52.

[5] А.А. Черевко, А.П. Чупахин *Стационарный вихрь Овсянникова*, Новосибирск, 2005 (Препр./ СО РАН, Ин-т гидродинамики, № 1-2005).

[6] Л.В. Овсянников *О "простых" решениях уравнений динамики политропного газа*, ПМТФ, **40**: 2 (1999).

[7] Л.В. Овсянников *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1978, 400с.

[8] Л.В. Овсянников *Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений*, Докл. РАН, **361**:6 (1998), 740–742.

[9] Л.В. Овсянников *Групповые свойства дифференциальных уравнений*, Новосибирск: Издательство СО АН СССР, 1962, 239с.

[10] С.В. Головин *Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа*, Новосибирск, 1996 (Препр. / СО РАН, Ин-т гидродинамики, № 5-96).

[11] А.А. Черевко *Теоретико-групповые решения уравнений газовой динамики, порожденные трехмерными подалгебрами симметрии. Тез. Межд. Конф. Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения посвященной 100-летию со дня рождения И.Н.Векуа*, Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007; НГУ, с.353, 2007.

[12] А.П. Чупахин *Небарохронные подмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики*, Новосибирск, 1999 (Препр. / СО РАН, Ин-т гидродинамики; № 1-99).

[13] В.И. Арнольд *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 2000.

[14] Л.И. Седов *Методы подобия и размерности в механике*, М.: Наука, 1981.

[15] А.Ф. Сидоров *Избранные труды. Математика. Механика.*, М.: Физматлит., 2001.

Анна Игоревна Голод
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, НГУ,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: lion18@list.ru

Александр Павлович Чупахин
Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН,
пр. Лаврентьева, 15, УГиЛ СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: chupakhin@hidro.nsc.ru