S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 200–210 (2008) УДК 517.1, 519.5

MSC 03C50, 03C52, 03C57, 03D35

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ

Е.Н. ПАВЛОВСКИЙ

Abstract. We prove that for every nontrivial language σ, the index set of the class of d–decidable prime computable models of σ is $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$–complete and that the index set of all prime computable models of σ is $\Pi^0_{\omega+2}$–complete.

Keywords: prime model, computable model, index sets, model-theoretic constructions, hyperarithmetic hierarchy.

1. Введение

При исследовании вопроса о существовании вычислимой характеризации классов моделей широко используется подход, предложенный Гончаровым и Найт [3]. В рамках этого похода в данной статье устанавливается алгоритмическая сложность следующих классов вычислимых моделей: простые и простые d-разрешимые модели, где d арифметическая Тьюрингова степень.

Известно [5], что для вычислимой предикатной сигнатуры существует универсальная вычислимая нумерация всех вычислимых моделей этой сигнатуры. Следует, однако, отметить, что под нумерацией для бесконечной сигнатуры здесь понимается такая нумерация, которая нумерует все вычислимые модели сигнатуры σ и конечные вычислимые модели конечных частей сигнатуры σ (о существовании такой нумерации см. [2, §1.4]). Пусть $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_n, \dots$ — указанная нумерация вычислимых моделей сигнатуры σ.

Pavlovsky, E.N., Index sets of prime models.

Исследования автора поддержаны Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ 4413.2006.1), программой "Университеты России" (код проекта УР.04.01.198).

Поступила 14 февраля 2008 г., опубликована 5 мая 2008 г.

Определение 1. *Индексным множеством* $I(K)$ класса вычислимых моделей K называется множество $I(K) = \{i \mid \mathcal{M}_i \in K\}$.

Задача работы заключается в определении точного уровня алгоритмической сложности следующих индексных множеств в соответствующих иерархиях:

$Prime_\sigma = \{i \mid \mathcal{M}_i$ — простая модель$\}$.
$Prime_\sigma^d = \{i \mid \mathcal{M}_i$ — простая d-разрешимая модель$\}$.

Назовём сигнатуру *нетривиальной*, если она содержит предикатный или функциональный символ местности $\geqslant 2$.

Пусть σ — вычислимая нетривиальная сигнатура. Основные результаты работы сформулируем в виде двух теорем:

Теорема 1. *Для любой арифметической Тьюринговой степени d индексное множество $Prime_\sigma^d$ всех d-разрешимых простых моделей вычислимой сигнатуры σ является m-полным $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$-множеством в универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей сигнатуры σ.*

Пусть теперь σ вычислимая сигнатура, содержащая бесконечное число предикатных символов местности $\geqslant 2$.

Теорема 2. *Индексное множество $Prime_\sigma$ всех простых вычислимых моделей сигнатуры σ является m-полным $\Pi_{\omega+2}^0$-множеством в универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей сигнатуры σ.*

Напомним, что модель $\mathcal{M}$ сигнатуры σ называется *простой*, если для любой модели $\mathcal{N}$ теории $Th(\mathcal{M})$ существует элементарное вложение $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Модель называется *вычислимой*, если её основное множество и базисные предикаты и функции вычислимы. Модель называем *разрешимой*, если её полная диаграмма вычислима. Через ω обозначим множество натуральных чисел. В качестве вычислимых моделей, без ограничения общности, будем рассматривать модели, базисное множество которых является подмножеством ω.

2. Сведение произвольной конечной сигнатуры к сигнатуре графов

Рассмотрим здесь конструкции сведения категории моделей с произвольной ограниченной сигнатурой к категории сигнатуры графов, сохраняющей вычислимость, и относительную разрешимость, предложенные С.С. Гончаровым [1] . Покажем здесь, что данные конструкции позволяют сохранить простоту модели.

Теорема 3. *Пусть σ — конечная вычислимая предикатная сигнатура. Тогда для любой модели $\mathcal{M}$ сигнатуры σ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов, для которой:*

(1) *$\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;*
(2) *$\mathcal{M}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ d-разрешима;*
(3) *$\mathcal{M}$ проста $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ проста.*

Доказательство теоремы опирается на несколько предложений.

Предложение 1. *Для любой конечной предикатной сигнатуры σ существует сигнатура σ_1, состоящая из единственного предикатного* *символа P, такая, что для любой модели $\mathcal{M}$ сигнатуры σ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры σ_1, для которой:*

(1) *$\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;*
(2) *$\mathcal{M}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ d-разрешима;*
(3) *$\mathcal{M}$ проста $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ проста.*

Доказательство. Рассмотрим конструкцию, описанную в доказательстве Предложения 7.4 [4].

Пусть $\sigma = \langle P_1^{n_1}, \dots, P_k^{n_k}\rangle$, $\sigma_1 = \langle P^n\rangle$, где $n = n_1 + \ldots + n_k$. Строим модель $\mathcal{M}'$ следующим образом. В качестве основного множества рассматриваем множество $M' = M \cup \{\infty\}$. На M' определяем P следующим образом. $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in P$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

а) $x_1 = x_1 = \ldots = x_n = \infty$;
б) существует $i \leqslant k$ и $y_1, \dots, y_n$ такие, что $x_{j+m_i} = y_j$ для всех $j \in \{1, \dots, n_i\}$ и $\mathcal{A} \models P_i(y_1, \dots, y_{n_i})$ и $x_j = \infty$ для всех $j \in \{j | 1 \leqslant j \leqslant m_i \vee m_i + n_i + 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Здесь $m_0 = 0$ и $m_i = \sum_{l=0}^{i-1} n_l$ для $i > 1$.

Доказательство пунктов 1 и 2 приведено в [7, предложение 4.1]. Докажем пункт 3.

Допустим, что $\mathcal{M}$ простая. Рассмотрим модель $\mathcal{M}'$, построенную по указанной конструкции. Возьмём произвольную модель $\mathcal{A} \models Th(\mathcal{M}')$. Построим по ней модель $\mathcal{A}^* = \langle A^*, P_1, \dots, P_k\rangle$ следующим образом. Определим $A^* = A \setminus \{\infty\}$, где ∞ определяется формулой $P(y, \dots, y)$ и положим $\mathcal{A}^* \vDash P_i(y_1, \dots, y_{n_i}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash P(x_1, \dots, x_n)$, где $x_j = \infty$ при $1 \leqslant j \leqslant m_i$ и $m_{i+1} + 1 \leqslant j \leqslant n$, а $y_j = x_{j+m_i}$ для всех j, что $1 \leqslant j \leqslant n_i$. Как было замечено в доказательстве предложения 4.1 [7], эта модель удовлетворяет теории $Th(\mathcal{M})$, поэтому, ввиду простоты $\mathcal{M}$, существует элементарное вложение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{A}^*$. Доопределим f до $f' = f \cup (\infty, \infty)$. Остаётся заметить, что данное отображение будет элементарным вложением модели $\mathcal{M}'$ в модель $\mathcal{A}$.

Действительно, рассмотрим формулу φ сигнатуры σ_1. Заменим в этой формуле все вхождения подформулы $P(x_1, \dots, x_n)$ для всевозможных x_i, входящих в формулу φ на следующую формулу, полагая $n_0 = 0$:

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} \big(P_i(x_{n_i+1}, \dots, x_{n_{i+1}}) \& \mathop{\&}_{j=n_{i+1}+1}^{n} x_j = c\big)$$

Получим формулу φ' сигнатуры $\sigma \cup \{c\}$. Заметим теперь, что модель $\mathcal{M}^c = \mathcal{M} \cup \langle \{c\}, c\rangle$ сигнатуры $\sigma \cup \{c\}$, полученная объединением моделей $\mathcal{M}$ и одноэлементной модели $\mathcal{C} = \langle \{c\}, c^{\mathcal{C}}\rangle$, является простой (считаем, что $c \notin |\mathcal{M}|$).

Допустим, что формула φ имеет m свободных переменных. Рассмотрим $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{M}'$ и отображение $h = id_{\mathcal{M}} \cup (\infty, c)$. Заметим, что

$$\mathcal{M}' \models \varphi(a_1, \dots, a_m) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}^c \models \varphi'(h(a_1), \dots, h(a_m)) \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*)^c \models \varphi'(h(f(a_1)), \dots, h(f(a_m))),$$

где $(\mathcal{A}^*)^c = \mathcal{A}^* \cup \mathcal{C}$. Делая обратное преобразование φ' в φ получим эквивалентность $(\mathcal{A}^*)^c \models \varphi'(h(f(a_1)), \dots, h(f(a_m))) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_m))$ ввиду того, что элемент c можно отобразить в элемент ∞ модели $\mathcal{A}$ с сохранением истинности формул.

Таким образом из простоты $\mathcal{M}$ следует простота $\mathcal{M}'$.

Легко проверить и обратное утверждение. Доказательство проводится аналогично с использованием следующего преобразования формулы ψ сигнатуры σ в формулу ψ' сигнатуры σ_1:

> заменяем каждую подформулу вида $P_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$ на формулу $\exists x(P(x, \ldots, x) \& P(x, \ldots, x, x_1, \ldots, x_{n_i}, x, \ldots, x))$ в соответствии с конструкцией, а также ограничиваем действие кванторов $(\exists x), (\forall x)$ на множество M формулой $\neg P(x, \ldots, x)$.

□

Предложение 2. *Пусть σ сигнатура с одним предикатным символом местности $n \geqslant 3$. Тогда для любой модели $\mathcal{M}$ сигнатуры σ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов, для которой:*

(1) *$\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;*
(2) *$\mathcal{M}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ d-разрешима;*
(3) *$\mathcal{M}$ проста $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ проста.*

Доказательство. Рассмотрим конструкцию из доказательства Предложения 7.5 [4] сведения модели $\mathcal{M}$ сигнатуры σ к модели $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов. Пусть множество $I = \{0, 1, \ldots, n\}$ и

$$M' = I \times M^n \cup M \cup \{a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, \ldots, c_8\}.$$

Считаем, что все элементы a_i, b_j, c_k различные и новые. Эти элементы будут выделяться $\exists$-формулами. Определим предикат R на M' следующим образом. Пусть $x, y \in M'$, полагаем $(x, y) \in R$ если выполняется одно из условий:

(1) $x = a_i \& y = c_j$ и $(i = 0 \& j \in \{0, 1\}) \vee (i = 1 \& j \in \{2, 3, 4\}) \vee (i = 2 \& j \in \{5, 6, 7, 8\})$;
(2) $x = c_j \& y = b_i$ и $(i = 0 \& j \in \{0, 1\}) \vee (i = 1 \& j \in \{2, 3, 4\}) \vee (i = 2 \& j \in \{5, 6, 7, 8\})$;
(3) $x \in M \& y \in I \times M_n \& y = (i, x_1, \ldots, x_n) \& x = x_i$ и $1 \leqslant i \leqslant n$;
(4) $x, y \in I \times M_n \& x = (i, x_1, \ldots, x_n) \& y = (i + 1, x_1, \ldots, x_n)$ и $0 \leqslant i \leqslant n - 1$;
(5) $x = a_2 \& y = (0, y_1, \ldots, y_n) \in I \times M_n \& \mathcal{M} \nvDash P(y_1, \ldots, y_n)$;
(6) $x = a_1 \& y = (0, y_1, \ldots, y_n) \in I \times M_n \& \mathcal{M} \vDash P(y_1, \ldots, y_n)$;
(7) $x = a_0 \& y \in M$.

Пункты 1,2 доказаны в предложении 4.2 [7]. Докажем пункт 3. Определим на модели $\mathcal{M}' = \langle M', R \rangle$ двухместный предикат R в соответствии с конструкцией. Покажем, что $\mathcal{M}$ проста тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}'$ проста.

Замечание 1. *Заметим сначала, что для любого элемента $d \in M$ минимальное по включению определимое в $\mathcal{M}$ множество $D \subseteq M$, такое что $d \in D$, в модели $\mathcal{M}'$ также остаётся минимальным определимым множеством, содержащим d.*

Рассмотрим произвольный элемент $d \in M'$, покажем, что его тип главный. Если $d \in \{a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, \ldots, c_8\}$, то существуют формулы, однозначно определяющие d. Если $d \in I \times M^n$, то d имеет вид $(j, d_1, \ldots, d_n)$. Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — определимые в $\mathcal{M}$ множества, минимальные содержащие $d_1, \ldots, d_n$ соответственно. Найдём формулы, определяющие те же множества, но уже в модели $\mathcal{M}'$; пусть это будут $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Тогда формула

$$\psi(z) = (\exists y_0, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n)(y_0 R \ldots R y_n \& (\mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i R y_i \& \psi_i(x_i)) \&$$

$$\&z = y_j \& a_1 R y_0)$$

является полной для типа элемента d, т.к. любой другой элемент, удовлетворяющий этой формуле, будет иметь вид $(j, d'_1, \ldots, d'_n)$, где выполняется $d'_i \in D_i$. Ввиду минимальности множеств D_i минимальным определимым будет также и множество $\{j\} \times D_1 \times \ldots \times D_n$.

Для элемента $d \in M$ существование полной формулы следует непосредственно из замечания 1. □

Доказательство. (Теоремы 3) Следует из доказанных предложений. □

Конструкция Гончарова сведения бесконечной ограниченной сигнатуры к конечной сигнатуре в явном виде для сохранения простоты модели неприменима. Это вытекает из следующего замечания.

Замечание 2. *Функтор F_2, приведённый в конструкции Гончарова* [1, предложение 2] *не сохраняет свойство модели быть простой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \langle \omega, P_0, \ldots, P_n, \ldots \rangle$ — модель, где $P_i = \{0, i, i+1, \ldots\}$. Ясно, что $\mathcal{M}$ не является простой, т.к. элемент 0 определяет неглавный тип.

Рассмотрим модель $\mathcal{M}'$, полученную по приведённой конструкции. Рассмотрим элемент 0. Его тип будет являться главным, т.к. формула $\Phi(z) = \forall x(A(x) \rightarrow R(x, z))$ однозначно определяет этот элемент. Ясно, что типы остальных элементов будут главными, т.к. существуют формулы, однозначно определяющие эти элементы, например $P_i(z) \& \neg P_{i+1}(z)$ определяет однозначно элемент $i \geqslant 1$. □

3. Простые d-разрешимые модели

Цель данного параграфа состоит в оценке индексного множества $Prime^d_\sigma$ простых d-разрешимых моделей, для d — арифметической Тьюринговой степени.

Примем далее обозначение $\langle x, y \rangle$ для канторовской нумерации пар, если из контекста ясно, что x и y это натуральные числа.

Лемма 1. *Для каждого $A \in \Pi^0_3$ существует вычислимая последовательность разрешимых моделей $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n, \ldots$ сигнатуры $\sigma_0 = \langle R \rangle$ бинарного предикатного символа такая, что для каждого n:*
$n \in A \Rightarrow \mathcal{M}_n$– простая,
$n \notin A \Rightarrow \mathcal{M}_n$– не является простой.

Доказательство. По каждому натуральному n мы построим модель $\mathcal{M}_n$ удовлетворяющую условию леммы.

Рассмотрим представление $A = \{n \mid \forall x \exists y \forall z R(n, x, y, z)\}$, где R — вычислимое отношение. Тогда существует такое вычислимое Q, что $n \notin A$ тогда и только тогда, когда $\exists x \exists^\infty y Q(n, x, y)$.

Будем строить в сигнатуре $\sigma_0 = \langle R \rangle$ бинарного предиката модель $\mathcal{M}_n$ в виде дизъюнктного объединения $\bigcup\limits_{x \in \omega} \Big(\big(\sum\limits_{y \in \omega} \mathcal{B}^y_x \big) \cup \big(\bigcup\limits_{y \in \omega} \mathcal{C}^y_x \big) \Big)$ суммы моделей $\mathcal{B}^y_x$ и объединения моделей $\mathcal{C}^y_x$. Везде далее, R на моделях $\mathcal{B}^y_x$, $\mathcal{C}^y_x$ является линейным вычислимым порядком, под суммой моделей понимается линейный порядок, в котором все элементы первого слагаемого меньше всех элементов второго слагаемого. Под объединением моделей подразумевается дизъюнктное объединение. $\mathcal{B}_x^y$, $\mathcal{C}_x^y$ будем строить по шагам t. Обозначим L_{ω^n} разрешимую модель линейного порядка типа ω^n, L_η разрешимую модель плотного линейного порядка без концов (типа η).

Шаг $t = \langle x, 0\rangle$: Пусть $\mathcal{B}_x^0 := L_{\omega^2}$ для каждого $x \in \omega$. Полагаем $\mathcal{C}_x^0 := \emptyset$.

Шаг $t = \langle x, y\rangle$, $y > 0$:

Если на шаге $t = \langle x, y\rangle$ выполнен предикат $Q(n, x, y)$, тогда полагаем $\mathcal{B}_x^y := 1 + L_\eta + 1 + L_{\omega^{p_t}}$, где $p_t = p^q$, p — следующее простое число, которое не использовалось на предыдущих шагах вида $t' = \langle x, y'\rangle$, q — показатель степени такой, что p^q больше всех m, для которых L_{ω^m} было добавлено на предыдущих шагах вида t'. Определяем $\mathcal{C}_x^y := \sum\limits_{i\in\omega} \big(\mathcal{B}_x^{y-1} + 1 + L_\eta + 1\big)$.

Если выполнено $\neg Q(n, x, y)$, тогда полагаем $\mathcal{B}_x^y := 1 + L_\eta + 1 + L_{\omega^{q_t}}$, где $q_t = p^q$, p — простое число, которое использовалось на предыдущем шаге $t' = \langle x, y-1\rangle$, q — показатель степени, больший на единицу показателя предыдущего шага t'. Определяем $\mathcal{C}_x^y := \mathcal{C}_x^{y-1}$.

Конструкция завершена.

Ясно, что получившаяся модель $\mathcal{M}_n$ разрешима, т.к. состоит из дизъюнктного объединения разрешимых моделей. Действительно, модели $\mathcal{B}_x := \sum\limits_{y\in\omega} \mathcal{B}_x^y$ являются разрешимыми, т.к. представляют собой сумму разрешимых линейных порядков, также как и модели $\mathcal{C}_x^y$.

Заметим, что в случае, когда для некоторого x существует бесконечно много $y_0 < y_1 < \ldots < y_k < \ldots$ таких, что $Q(n, x, y_i)$, то отношение R на множестве B_x задаёт порядок типа $\omega^{n_0} + 1 + \eta + 1 + \omega^{n_1} + 1 + \eta + 1 + \omega^{n_2} + \ldots$ Заметим, что модель $\mathcal{B}_x \cup \bigcup\limits_{y\in\omega} \mathcal{C}_x^y$ не является простой. Действительно, если она была простой, тогда в частности для элемента m из начального отрезка типа ω в множестве ω^{n_1}, существовала бы полная формула, определяющая этот элемент. Но по построению модели $\mathcal{B}_x$ на каждом шаге y_i присоединяются линейные порядки всё возрастающей сложности, что гарантирует увеличение сложности формул, определяющих элементы добавляемых порядков. В то же время этими формулами будут определяться элементы из начальных отрезков типа ω моделей $\mathcal{C}_x^y$ и таких элементов будет бесконечно много. Из этого получается бесконечная последовательность формул возрастающей сложности, которые определяют убывающую цепочку определимых множеств. Эта убывающая цепочка гарантирует, что тип элемента начального отрезка типа ω не является главным.

Если же для каждого x у нас существует лишь конечное множество $\{y_0 < y_1 < \ldots < y_k\}$ таких элементов, что $Q(n, x, y_i), 0 \leqslant i \leqslant k$, тогда порядок R стабилизируется с некоторого шага, что гарантирует простоту модели $\mathcal{B}_x \cup \bigcup\limits_{y\in\omega} \mathcal{C}_x^y$.

Остаётся заметить, что модель $\mathcal{M}_n$ является дизъюнктным объединением моделей, поэтому если хотя бы одна $\mathcal{B}_x \cup \bigcup\limits_{y\in\omega} \mathcal{C}_x^y$ непростая, то и $\mathcal{M}_n$ непростая. Если же все $\mathcal{B}_x \cup \bigcup\limits_{y\in\omega} \mathcal{C}_x^y$ простые, то и $\mathcal{M}_n$ простая. □

Пусть d — некоторая арифметическая Тьюрингова степень и $m \in \omega$ такое, что $d \leqslant_T \emptyset^{(m)}$.

Лемма 2. *Для каждого* $A \in \Pi_3^{0,d}$ *существует вычислимая последовательность вычислимых* d*-разрешимых моделей* $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n, \ldots$ *сигнатуры* σ_0 *бинарного предикатного символа такая, что для каждого* n*:*
$n \in A \Rightarrow \mathcal{M}_n$ *— простая,*
$n \notin A \Rightarrow \mathcal{M}_n$ *— непростая.*

Доказательство. Релятивизуем конструкцию леммы 1 относительно степени d и получим последовательность $\{\mathcal{M}_i\}$ d-разрешимых моделей. Покажем, как по этой последовательности получить вычислимые модели. Заметим, что $\{\mathcal{M}_i\}$ удовлетворяет условиям применения конструкции Маркера-Гончарова-Хусаинова (см. [7, теорема 3.1]), т.е. для каждой $\mathcal{M}_i$ и $R \in \sigma_1$ существует равномерно вычислимое по i и R бесконечное вычислимое подмножество $S_{i,R}$ и $R \setminus S_{i,R}$ бесконечно.

Для каждого i строим последовательность моделей $\mathcal{M}_i^k$, $1 \geqslant k \geqslant m$ такую, что $\mathcal{M}_i^0 := \mathcal{M}_i$, а каждая модель $\mathcal{M}_i^k$ есть $\exists\forall$-расширение модели $\mathcal{M}_i^{k-1}$. Вновь полученные модели сохраняют простоту (непростоту) своих прообразов (см. [6, теорема 2]) и являются вычислимыми d-разрешимыми моделями новой конечной сигнатуры $(\sigma_0)_{(\exists\forall)^m}$ маркеровских расширений.

Применяем теперь к каждой модели $\mathcal{M}_i^m$ теорему 3. Полученная в результате последовательность моделей является искомой последовательностью в сигнатуре σ_0 с одним бинарным предикатом. □

Доказательство. (Теоремы 1) Множество $Prime_{\sigma_0}^d$ является $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$ множеством по алгоритму Тарского-Куратовского следующими рассуждениями: $n \in Prime_{\sigma_0}^d$ тогда и только тогда, когда

1. Существует функция φ_e, обладающая свойствами 1 - 4 из доказательства верхней оценки для d-разрешимых моделей [7, лемма 5.1].
2. Для любой функции $\varphi_{e'}$, обладающей теми же свойствами, что функция в пункте 1, для любого m, любого m-кортежа $\bar{a}$ элементов модели $\mathcal{M}_n$ существует такая формула ψ от m свободных переменных с номером k, такая, что $\varphi_{e'}(k) = 1$ и для любой другой формулы m переменных ψ' с номером k', для которой выполняется $\varphi_{e'}(k') = 1$, выполняется $\varphi_{e'}(l) = 1$, где l номер формулы $\forall\bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \psi'(\bar{x}))$.

Ясно теперь, что множество $Prime_{\sigma_0}^d$ имеет указанную сложность.

Чтобы доказать сводимость $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$-множеств к $Prime_{\sigma_0}^d$, рассмотрим произвольное $A \in \Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$.

Построим вычислимую последовательность моделей $\{\mathcal{M}_i\}$ такую, что $\mathcal{M}_i$ разрешима и проста тогда и только тогда, когда $i \in A$. Полагаем $\mathcal{M'}_i := \langle A_i \cup B_i, R_i^2, A_i^1, B_i^1 \rangle$, где множества A_i, B_i вычислимы и не пересекаются, на A_i с помощью R_i задаётся $\mathfrak{A}_i$ из леммы 5.4 [7] (т.к. теория $\mathfrak{A}_i$ счётно-категорична, то сама модель является простой), на B_i с помощью R_i задаётся $\mathcal{M}_i$ из леммы 2. Одноместные предикаты задают соответствующие множества. Тогда получившаяся модель проста и d-разрешима тогда и только тогда, когда $i \in A$.

Теперь, с помощью теоремы 3 выполним сведение к бинарной сигнатуре. Получим последовательность $\{\mathcal{M}''_i\}$. Для того, чтобы получить последовательность нужной нам сигнатуры σ найдём в ней предикатный или функциональный символ местности $n \geqslant 2$. Ясно, что бинарный предикат можно закодировать как в n-местном предикате, так и в n-местной функции, в случае, когда $n \geqslant 2$. □

4. Простые модели

Цель данного параграфа состоит в оценке индексного множества $Prime_\sigma$ простых моделей.

Зафиксируем сигнатуру $\sigma_R = \{R_0, R_1, \ldots\}$, где для каждого $n \in \omega$ R_n — предикат местности 2.

Лемма 3. *Для каждого $A \in \Pi^0_{\omega+2}$ существует вычислимая последовательность вычислимых моделей $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n, \ldots$ сигнатуры σ_R такая, что для каждого n:*
$n \in A \Rightarrow \mathcal{M}_n$– простая,
$n \notin A \Rightarrow \mathcal{M}_n$– непростая.

Доказательство. Рассмотрим вместо $A \in \Pi_3^{0,\emptyset^{(\omega)}}$ его дополнение $\overline{A}$ в виде $\{n \,|\, \exists x \exists^\infty y\, Q(n,x,y)\}$, где $Q(n,x,y)$ — $\emptyset^{(\omega)}$-вычислимый предикат и $Q(n,0,0)$ и $Q(n,0,1)$ ложны для всех n. Также, поскольку при вычислении предиката Q используется лишь конечная степень скачка, будем считать, что для вычисления предиката $Q(n,x,y)$ нам требуется оракул $\emptyset^{(g(n,x,y))}$, где $g(n,x,y)$ — вычислимая функция. Можно считать, что функция монотонно возрастает с ростом $\langle x,y\rangle$, а также для удобства положим $g(n,x,y) \geqslant 1$ для любых аргументов функции.

Построим по n модель $\mathcal{M}_n$ сигнатуры σ_R в виде дизъюнктного объединения $\bigcup\limits_{x\in\omega} \mathcal{A}^n_x$. А модели $\mathcal{A}^n_x = \bigcup\limits_{y\in\omega} \mathcal{B}^{n,x}_y$. Где каждая модель $\mathcal{B}^{n,x}_y$ расширяет предыдущую $\mathcal{B}^{n,x}_{y-1}$ и добавляет новый предикат R_y. Опишем эту конструкцию. Для начала зафиксируем, что для фиксированного x основные множества моделей $\mathcal{B}^{n,x}_y$ совпадают и равны $\bigcup\limits_{y\in\omega} B^x_y$, где B^x_y — счётные попарно непересекающиеся множества. В дальнейшем верхний индекс x опустим, чтобы не загромождать индексы, т.е. считаем $|\mathcal{A}^n_x| = \bigcup\limits_{y\in\omega} B_y$.

На шаге $t = \langle 0,0\rangle$ полагаем $\mathcal{B}^{n,0}_0$ модель, в которой предикат $R_{\langle 0,0\rangle}$ истинен всюду на $\left(\bigcup\limits_{y\in\omega} B_y\right)^2$, т.е. $R_{\langle 0,0\rangle} = \left(\bigcup\limits_{y\in\omega} B_y\right)^2$. Предикаты $R_{\langle 0,i\rangle}$, $i > 0$ ещё не определены.

На шагах $t = \langle x,y\rangle$, где $\langle x,y\rangle \geqslant 1$ модель $\mathcal{B}^{n,x}_y$ строим в зависимости от истинности $Q(n,x,y)$.

Если $Q(n,x,y)$ истинно, то полагаем $P_{\langle x,y\rangle} = B_0 \cup \bigcup\limits_{j\geqslant y} B_j$. Применяя конструкцию Маркера-Гончарова-Хусаинова $g(n,x,y)$-раз (см. [7, теорема 3.1]) для модели $\mathcal{C} = \left\langle \bigcup\limits_{j\in\omega} B_j, P_{\langle x,y\rangle} \right\rangle$ мы получим вычислимую модель $\mathcal{C}_{(\exists\forall)^{g(n,x,y)}}$ с $m+1$-местным предикатом $P_{\langle x,y\rangle}$, где $m = 2g(n,x,y)$. Применим теперь к этой модели теорему 3 и получим модель $\mathcal{C}'$ с бинарным предикатом $R_{\langle x,y\rangle}$. Теперь положим, что это и есть интерпретация соответствующего предиката в модели $\mathcal{B}_y^{n,x}$. Заметим сейчас, и это нам понадобится далее, что формула $P'_{\langle x,y\rangle}(a)$ с элементом $a \in \mathcal{C}$ истинна в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда в модели $\mathcal{C}_{(\exists\forall)^{g(n,x,y)}}$ истинна формула $\forall z_m \exists z_{m-1} \ldots \forall z_2 \exists z_1 (P_{\langle x,y\rangle})_{(\exists\forall)^m}(z_1, \ldots, z_m, a)$. Заменим в этой формуле подформулу $(P_{\langle x,y\rangle})_{(\exists\forall)^m}(z_1, \ldots, z_m, a)$ на формулу с предикатом R в соответствии с конструкцией, приведённой в доказательстве теоремы 3. Полученную формулу обозначим $\Phi_{\langle x,y\rangle}(a)$.

Если $Q(n,x,y)$ ложно, то полагаем $P_{\langle x,y\rangle} = \bigcup\limits_{j\in\omega} B_j$ и поступаем также, как в предыдущем абзаце.

Конструкция завершена.

Заметим теперь, что наша конструкция в случае, когда существует такое x, что $Q(n,x,y)$ выполняется для бесконечно многих $y_0 < y_1 < \ldots < y_n \ldots$, выдаёт модель $\mathcal{M}_n$ не являющейся простой. Это происходит потому, что последовательность формул $\Phi_0(z), \ldots, \Phi_n(z), \ldots$ определяет неглавный тип любого элемента из множества B_0 в соответствующей подмодели $\mathcal{A}_x^n$. Неглавность типа следует, в свою очередь, из того, что каждая из приведенных формул определяет собственное бесконечное подмножество в предыдущей ввиду определения предикатов $P_{\langle x,y_i\rangle}$. Действительно, как мы уже заметили, формула $\Phi_i(z)$ эквивалентна на элементах $\bigcup\limits_{j\in\omega} B_j$ формуле $P_{\langle x,y_i\rangle}(z)$. Но из конструкции следует, что $P_{\langle x,y_i\rangle} = B_0 \cup \bigcup\limits_{j\geqslant y_i} B_j$, и, таким образом, последовательность $\Phi_0(z), \ldots, \Phi_n(z), \ldots$ действительно образует убывающую цепочку бесконечных определимых множеств, содержащих все элементы B_0.

Если же $Q(n,x,y)$ для каждого x выполняется лишь на конечном множестве $Y := \{y_0 < \ldots < y_{k_x}\}$, простота модели $\mathcal{M}_n$ следует из простоты каждой $\mathcal{A}_x^n$, т.к. $\mathcal{M}_n$ является их дизъюнктным объединением. В свою очередь модели $\mathcal{A}_x^n$ являются простыми, т.к. являются объединением моделей $\left\langle \bigcup\limits_{j\in\omega} B_j, R_{\langle x,y\rangle} \right\rangle$, каждая из которых является простой ввиду того, что либо это модель с одноместным тождественно-истинным предикатом, либо является маркеровским расширением простой модели. Действительно, зафиксируем x, рассмотрим произвольный элемент из $a \in B_j$. Найдём полную формулу типа элемента a.

Рассмотрим случай, когда $j \geqslant y_k$, где y_k — наибольший $y \in Y$. Полной формулой для элемента a будет формула $\Phi_k(z)$. Так получается в следствие того, что данная формула определяет множество $B_0 \cup \bigcup\limits_{j\geqslant y_k} B_j$. На всех следующих шагах y конструкции при фиксированном x предикат $P_{\langle x,y\rangle}$ будет повторяться, т.к. $Q(n,x,y)$ ложно. И, поскольку маркеровские расширения предиката P' не определяют в нём собственных подмножеств, можно утверждать, что приведённая формула $\Phi_k(z)$ образует наименьшее определимое множество в модели $\mathcal{A}_x^n$, содержащее элемент a.

Рассмотрим теперь случай, когда $j < y_k$. Тогда полной формулой элемента a будет $\varphi_a(z) := \neg\Phi_i(z) \& \Phi_{i-1}(z)$ для наименьшего такого i, что $j < y_i$, где $y_i \in Y$ и $\Phi_{-1}(z) := \ z = z$. Действительно, формула $\varphi_a(z)$ определяет множество $B_{y_{i-1}} \cup \ldots \cup B_{y_i} \supset B_j$, где $y_{-1} := 0$. Оно, очевидно, определено булевой комбинацией предикатов $P_{\langle x,y_{i-1}\rangle}$ и $P_{\langle x,y_i\rangle}$. Остальные предикаты вида $P_{\langle x,y_{i-1}\rangle}$ и их булевы комбинации не определяют собственных подмножеств множества

$\varphi_a\big(\mathcal{A}_x^n\big)$. Поэтому, учитывая также, что маркеровские расширения предикатов P_l не определяют собственных подмножеств в них, получаем полноту формулы $\varphi_a(z)$.

Теперь заметим, что построенная нами последовательность моделей определена в сигнатуре σ_R бинарных предикатов. □

Доказательство. (Теоремы 2) Лемма 3 даёт нам нижнюю оценку множества $Prime_\sigma$. Покажем теперь справедливость верхней оценки.

Известно, что модель проста тогда и только тогда, когда она счётна и атомна. Таким образом, утверждение, что $\mathcal{M}_i$ является простой моделью, можно записать в виде $\Pi^0_{\omega+2}$ формулы:

$$\begin{aligned}\Phi(i) := (\forall n)(\forall\ \bar{a})\big(\ \bar{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in M_i^n \& \\ \&(\exists j)(fv(j) = n\ \&\ \mathcal{M}_i \models \varphi_j(\bar{a})\ \& \\ \&\ (\forall k)((fv(k) = n\ \&\ \mathcal{M}_i \models \varphi_k(\bar{a})) \\ \to \mathcal{M}_i \models \forall\bar{x}(\varphi_j(\bar{x}) \to \varphi_k(\bar{x})))))\big)\end{aligned}$$

где $fv(n)$ — примитивно рекурсивная функция, возвращающая по гёделевскому номеру формулы количество её свободных переменных; φ_j — формула сигнатуры σ с гёделевским номером j.

Перепишем эту формулу в таком виде:

$$\begin{aligned}(\forall n)(\forall\bar{a})(\exists j)(\forall k)\Big(\bar{a} \in M_i^n \& fv(j) = n \& \mathcal{M}_i \models \varphi_j(\bar{a}) \& \\ \&\ \big(fv(k) = n\ \&\ \mathcal{M}_i \models \varphi_k(\bar{a}) \\ \to \mathcal{M}_i \models \forall\bar{x}(\varphi_j(\bar{x}) \to \varphi_k(\bar{x}))\big)\Big)\end{aligned}$$

Поскольку формулы φ_i и φ_k могут иметь сколь угодно сложную кванторную приставку, то для установления их истинности потребуется оракул $\emptyset^{(\omega)}$. □

Замечание 3. *Верхняя оценка $\Pi^0_{\omega+2}$ множества $Prime_\sigma$ справедлива для любой вычислимой сигнатуры σ.*

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю С.С. Гончарову за постоянное внимание к работе и предложенные идеи, нашедшие воплощение в данной работе.

Список литературы

[1] Гончаров С.С., *Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций*, Алгебра и логика, **19**: 6 (1980), 621–639.

[2] С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов, *Конструктивные модели.* Новосибирск: Научная книга, 1999.

[3] С.С.Гончаров, Дж.Найт, *Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы*, Алгебра и логика, **41**: 6 (2002), 639–681.

[4] Goncharov S.S., *Computability and Computable Models, Mathematical problems from applied logic. II.* Logics for the XXIst century. Edited by Dov M. Gabbay, Sergey S. Goncharov and Michael Zakharyaschev. International Mathematical Series (New York), Springer, New York, 2006.

[5] Нуртазин А.Т., *Вычислимые классы и алгебраические критерии автоустойчивости.* Дисс. . . . канд.физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1974. 70с. (АН Казахской ССР. Ин-т математики и механики. Лаб. алгебры и логики.)

[6] Павловский Е.Н., *Оценка алгоритмической сложности классов вычислимых моделей*, Сиб.мат.журнал, **49**: 3 (2008), 635—649.
[7] Фокина Е.Б., *Индексные множества разрешимых моделей*, Сиб.мат.журнал, **48**: 5 (2007), 1167–1179.

Евгений Николаевич Павловский
Новосибирский Государственный Университет,
Механико-математический факультет
ул.Пирогова, 2а,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: eugene.pavlovsky@gmail.com