S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 20–24 (2008) УДК 512.5
MSC 20D06

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЕ СТЕПЕНИ 10

А. М. СТАРОЛЕТОВ

Abstract. Let G be a finite group and $\omega(G)$ the set of all element orders of G. We prove that if $\omega(G) = \omega(A_{10})$ where G is a finite group, then G is not-soluble.

1. Введение

Пусть G — конечная группа. *Спектром* G называется множество $\omega(G)$, состоящее из всех порядков элементов группы G. Пусть $\mu(G)$ — множество максимальных по делимости чисел из $\omega(G)$. Две группы называются *изоспектральными*, если их спектры совпадают. Легко видеть, что множество $\mu(G)$ полностью определяет спектр G, поэтому группы G и H изоспектральны, тогда и только тогда, когда $\mu(G) = \mu(H)$.

В [1] доказано, что конечная простая группа, изоспектральная разрешимой, может быть изоморфна только одной из групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$, A_{10}. В [2] построены примеры разрешимых групп, изоспектральных $L_3(3)$ и $U_3(3)$. Для двух других групп вопрос о существовании изоспектральных им разрешимых групп в [3] отмечен, как нерешённый. Цель настоящей работы дать ответ на этот вопрос для группы A_{10}.

Теорема. *Конечная группа, изоспектральная A_{10}, неразрешима.*

2. Предварительные результаты

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей её порядка. По спектру группы строится граф Грюнберга-Кегеля $GK(G)$,

---

Staroletov, A.M., Insolubility of finite groups which are isospectral to the alternating group of degree 10.

Поступила 10 сентября 2008 г., опубликована 21 февраля 2008 г.

вершины которого — элементы из $\pi(G)$ и две вершины, соответствующие простым числам p, q соединены ребром, если в G есть элемент порядка pq. Пусть $s(G)$ — число связных компонент этого графа. Для групп с несвязным графом $GK(G)$ спаведливо следующее утверждение (доказательство см. в [4], здесь приводится упрощенная формулировка теоремы для разрешимых групп).

Лемма 1*(Грюнберг - Кегель). Если G — конечная разрешимая группа с несвязным графом $GK(G)$, то верно одно из следующих утверждений:*
1) $s(G) = 2$, G — группа Фробениуса, т.е. $G = AB$, где A — нормальная подгруппа G, при этом $bab^{-1} \neq a$ для любых неединичных элементов $a \in A$ и $b \in B$;
2) $s(G) = 2$, G — двойная группа Фробениуса, т.е. $G = ABC$, A и AB - нормальные подгруппы G, AB и BC - группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно.

Лемма 2. *Пусть G — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B. Тогда верны следующие утверждения:*
1) *$|B|$ делит $|A| - 1$.*
2) *A нильпотентна; если порядок B чётный, то A абелева.*
3) *Силовская p-подгруппа группы B является циклической для нечётного p и циклической или обощённой группой кватернионов для $p = 2$.*
4) *Любая подгруппа из B порядка pq, где p и q — простые числа, циклическая.*
5) *Если порядок B чётен, то B обладает единственной инволюцией, которая лежит в $Z(B)$.*

Доказательтво. см. в [5].

Лемма 3. *Пусть $G = ABC$ — двойная группа Фробениуса, где A, B, C такие же, как в лемме 2. Тогда B — циклическая подгруппа нечётного порядка.*

Доказательство. B — дополнение в группе Фробениуса AB, поэтому все силовские p-подгруппы из B — циклические для нечётного p по пункту 3) леммы 2. Так как B — ядро в группе Фробениуса BC, то по пункту 2) леммы 2 B — нильпотентная, значит, изоморфна прямому произведению своих силовских подгрупп. Поэтому достаточно доказать, что порядок B нечётен. Пусть это не так, тогда по пунтку 5) леммы 2 в B есть ровно одна инволюция. Значит, у B не может быть регулярных автоморфизмов, противоречие. Лемма доказана.

Делитель k натурального числа n называется холловым делителем, если $(n/k, k) = 1$.

Лемма 4*(Ф. Холл). Пусть k — холлов делитель порядка конечной разрешимой группы. Тогда в этой группе существует подгруппа порядка k, все подгруппы порядка k сопряжены, любая подгруппа порядка $n|k$ содержится в подгруппе порядка k.*

Доказательство. см. в [7].

Лемма 5. *Если A — нормальная подгруппа в конечной группе G, порядок которой взаимно прост с индексом, то A — характеристическая подгруппа в G.*

Доказательство. Пусть $|A| = m$, $|G : A| = n$, m и n — взаимно простые числа. Рассмотрим произвольный автоморфизм ϕ группы G. Тогда $K = A^{\phi}$ —

подгруппа, имеющая порядок m. Так как A нормальна в G, то AK — подгруппа в G. Пусть $d = |A \cap K|$. Тогда $d|m$, $|AK| = m^2/d$ делитель mn. Это возможно лишь, когда $m = d$, поэтому $A = K$. Следовательно, A — характеристическая подгруппа.

Лемма 6. *Пусть S — циклическая силовская 2-подгруппа конечной группы G. Тогда $G = N \rightthreetimes S$ для некоторой нормальной подгруппы N нечётного порядка.*

Доказательство. Индукция по $|S|$. В случае $|S| = 1$ утверждение очевидно. Пусть теперь $|S| = 2^n$, $n > 0$. Пусть элемент a является образующим для S. Рассмотрим регулярное подстановочное представление ψ группы G. Тогда в разложении на независимые циклы подстановки $(a)\psi$ все циклы имеет длину 2^n. Значит, количество этих циклов равно $|G|/2^n$ — нечётное число, поэтому $(a)\psi$ — нечётная подстановка. Таким образом все чётные подстановки в $(G)\psi$ образуют нормальную подгруппу K индекса 2. Её силовская 2-подгруппа V является циклической. По предположению индукции в K существует нормальная подгруппа A нечётного порядка, для которой $K = AV$. Так как A — характеристическая подгруппа в K, то она нормальна и в $(G)\psi$. Подгруппа $N = (A)\psi^{-1}$ искомая.

Лемма 7. *Если группа Фробениуса FC с ядром F и циклическим дополонением C = <c> порядка n дейстует точно на векторном пространстве V ненулевой характеристики p, взаимно простой с порядком группы F, то естественное полупрямое произведение VC содержит элемент порядка pn.*

Докозательство. см. лемму 2 в [6].

3. Доказательство основной теоремы

Предположим, что теорема неверна и G — разрешимая группа, изоспектральная A_{10}.

Лемма 8. *$\mu(G)$=* $\{8, 9, 10, 12, 15, 21\}$

Доказательство. непосредственная проверка.

Пусть H — холлова $\{2,\ 5,\ 7\}$-подгруппа G (т.е. есть ее порядок — холлов делитель порядка G с простыми делителями 2, 5, 7).

Лемма 9. (a) $\mu(H) = \{7, 8, 10\}$*;*
(b) *H — группа Фробениуса.*

Доказательство. Пункт (a) вытекает из леммы 8. Докажем (b). Допустим, что H не является группой Фробениуса. Так как граф *GK(H)* несвязен, то по лемме 1 группа H — двойная группа Фробениуса. Пусть $H = ABC$, где A и AB — нормальные подгруппы H, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно. В силу леммы 3 порядок B — нечётное число. Из пункта 2) леммы 2 следует, что B нильпотентна, поэтому $\pi(B) = \{5\}$ или $\pi(B) = \{7\}$. В обоих случаях по пункту 3) леммы 2 B — циклическая. Так как $|C|$ делит $|B|$-1 (4 или 6 в нашем случае), то порядок A делится на 2 и 7 или на 4 и 5. В силу нильпотентности группы A получаем, что 14 или 20 принадлежит спектру A, противоречие.

Лемма 10. *Ядро A группы H — 7-группа, дополнение B имеет порядок* 40 *и его силовские подгруппы — циклические. Порядок центра B равен* 2.

Доказательство. Отметим, что любая силовская подгруппа из A или B

является также силовской в H, так как порядки A и B — взаимно просты по пункту 1) леммы 2. Обозначим через Syl_p силовскую p-подгруппу из H

1) Пусть 7 делит порядок B. Тогда B содержит Syl_7. Пусть $B = Syl_7$, тогда $A = Syl_2 \times Syl_5$. Так как A нильпотентна по пункту 2) леммы 2, то в A есть элемент порядка 20. Пусть теперь $\pi(B) \neq \{7\}$. Если порядок B делится на 2, то по пункту 5) леммы 2 в центре группы B есть инволюция, значит, в группе B есть элемент порядка 14, противоречие. Если порядок B делится на 5, то силовские подгруппы Syl_7 и Syl_5 группы B являются циклическими по пункту 3) леммы 2. Значит, $|Syl_7| = 7$, $|Syl_5| = 5$ в силу леммы 8. Тогда $|B| = 35$. По пункту 4) леммы 2 B является циклической группой порядка 35, противоречие.

2) Значит, $\pi(A) = \{7\}$, $\pi(B) = \{2, 5\}$ ($5 \notin \pi(A)$ и $2 \notin \pi(A)$ так как A — нильпотентная и в H нет элементов порядка 14 и 35). По пункту 3) леммы 2 Syl_5 — циклическая, следовательно, имеет порядок 5. Так как в H нет элементов порядка 16, но есть элемент порядка 8, то Syl_2 либо циклическая подгруппа порядка 8, либо обобщённая группа кватернионов порядка 16. Докажем, что второй случай невозможен. Пусть $D = B/Z(B)$. Порядок D равен 40, так как порядок центра B равен 2. По теореме Силова в D ровно одна силовская 5-подгруппа, поэтому прообраз этой подгруппы нормален в B и имеет порядок 10. По лемме 5 силовская 5-подгруппа в любой циклической группе порядка 10 — характеристическая подгруппа, значит, Syl_5 нормальна в B, поэтому $N_B(Syl_5) = B$. По пункту 5) леммы 2 элемент порядка 2 лежит в $C_B(Syl_5)$, следовательно $|C_B(Syl_5)| = 10$. Значит, порядок группы $N_B(Syl_5)/C_B(Syl_5)$ равен 80/10=8, но $N_B(Syl_5)/C_B(Syl_5)$ изоморфна некоторой подгруппе $Aut(Syl_5)$, при этом $Aut(Syl_5)$ имеет порядок 4, противоречие. Осталось единственная возможность для силовской подгруппы Syl_2 — она циклическая порядка 8. Лемма 7 доказана.

Рассмотрим теперь холлову {2, 3, 5}-подгруппу R группы G. Пусть $U = C_R(a)$, где a — инволюция из R. Далее Syl_p означает силовскую p-подгруппу группы R.

Лемма 11. (a) $\mu(U) \subseteq \{8, 9, 10, 12, 15\}$;
(b) *силовская* 3*-подгруппа* T *в* U *неединична и нормальна в* U.

Доказательство. Пункт (a) следует из леммы 8. Докажем пункт (b). В группе R есть элемент порядка 6, значит, некоторые два элемента порядка 2 и 3 перестановочны. Поскольку по лемме 10 во всех силовских подгруппах Syl_2 есть единственная инволюция, и все силовские 2-подгруппы сопряжены, то a коммутирует с некоторым элементом порядка 3. Кроме того, по лемме 10 в холловой {2, 5}-подгруппе в R, содержащей a, есть элемент порядка 5, перестановочный с a, поэтому $\pi(U)$={2, 3, 5}. Из леммы 10 получаем, что холлова {2, 5}-подгруппа в U имеет порядок 40, при этом силовская 2-подгруппа группы U циклическая. По лемме 6 она имеет нормальное дополнение — холлову подгруппу Q с простыми делителями порядка 3, 5. По теореме Силова T нормальна в Q, более того, по лемме 5 она характеристическая в Q , поэтому T нормальна в U. Лемма доказана.

Заметим, что в T нет элементов порядка 9, так эта группа централизует a и в U нет элементов порядка 18. Поэтому центр группы T — элементарная абелева группа Z. Пусть X — холлова {2, 5}-подгруппа U.

Лемма 12. *Пусть* $C = C_X(Z)$. *Тогда фактор группа* ZX/C *изоморфна группе VF, где V изомрфна Z, F — группа Фробениуса порядка* $5 \cdot 4$ *или* $5 \cdot 2$.

Доказательство. Так как a централизует Z и в G нет элементов порядка 30, то C — 2-группа, при этом её порядок не делится на 8. Получаем, что образ X — группа Фробениуса, действующая точно на образе Z, который мы обозначим за V. Лемма доказана.

Так как V — элементарная абелева группа, то ее можно рассматривать, как векторное пространство над полем из трёх элементов. На этом пространстве действует группа F. По лемме 7 получаем, что элемент x порядка 2 или 4 из F (если порядок C равен 4 или 2, соответственно) перестановочен с некоторым нееденичным элементом y из V. Значит, коммутатор прообразов x и y лежит в C. Так как Z нормальна в ZX, то этот коммутатор лежит и в Z, поэтому он равен 1. Прообраз элемента x — элемент порядка 8, значит, в ZX есть элемент порядка 24, что противоречит пункту (a) леммы 11. Это замечание заканчивает доказательство основной теоремы.

Список литературы

[1] Lucido M.S., Moghaddamfar A.R., *Groups with complete prime graph connected components*, J. Group Theory, **7**: 3 (2004), 373–384.

[2] Алеева М.Р., *О конечных простых группах с множеством порядков элементов как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса*, Матем. заметки, **73**: 3 (2003), 323–339.

[3] Мазуров В.Д., *Группы с заданным спектром // Известия Уральского государственного университета*, Математика и механика, **36**: N7 (2005), 119–138.

[4] Williams J.S. *Prime graph components of finite groups*, J. Algebra, **69**: 2 (1981), 487–513.

[5] Gorenstein D., *Finite Groups*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1980.

[6] Заварницин А.В., *Мазуров В.Д. О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременых групп*, Алгебра и логика. 1999.**38**:3 (1999), 296–315, 567–585.

[7] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И., *Основы теории групп* , 4-е изд., перераб. - М.: Наука. Физматлит, 1996, 288 с.

Алексей Михайлович Старолетов
ул. Пирогова 16, 408,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: gymnast@gorodok.net