S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 14–19 (2008) УДК 512.5
MSC 13A99

О СТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП, НАСЫЩЕННЫХ ПОЛУДИЭДРАМИ

Л. Р. ТУХВАТУЛЛИНА

Abstract. Let $\Re$ be a set of finite groups. A group G is said to be saturated by $\Re$, if every finite subgroup of G is contained in a subgroup isomorphic to a group from $\Re$. We prove that a periodic group saturated by the set consisting of the semidihedral group is locally finite.

1. Введение

Пусть G — группа, а $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [1].

В работе [2] рассмотрен случай, когда множество $\Re$ состоит из конечных диэдров, т.е. конечных групп, порожденных двумя инволюциями. Там же доказана теорема о том, что если G — периодическая группа, насыщенная группами диэдра и S — её силовская 2-подгруппа, то либо S — группа порядка 2 и G — (локально) конечный диэдр (согласно [2] группа называется локально конечным диэдром, если она является объединением бесконечной возрастающей цепочки конечных диэдров), либо $G = ABC = ACB = BCA = CBA$, где A — централизатор некоторой инволюции z из центра S, $B = O(C_G(v))$, где v — произвольная инволюция из S, отличная от z и $C = O(C_G(zv))$. При этом A — (локально) конечный диэдр, а B, C — (локально) циклические группы. Пока ещё не известно, существуют ли не локально конечные группы, удовлетворяющие этой теореме.

В связи с этим интересно исследовать случай, когда группа насыщена полудиэдрами. Понятие полудиэдра обычно применяется для 2-групп и в

Tukhvatullina, L.R., On the structure of periodic groups saturated by semidihedral groups.

Поступила 1 января 2008 г., опубликована 21 февраля 2008 г.

соответствии с [3] 2-группа S называется полудиэдром, если она порождается двумя элементами x, y, удовлетворяющими соотношениям: $x^2 = y^{2^n} = 1$, $y^x = y^{2^{n-1}-1}$, $n \geq 3$. В данной работе мы расширяем понятие полудиэдра и на $2'$-группы и вводим следующее определение.

Определение 1. *Группа D называется конечным полудиэдром, если $D = \langle d \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$, $|d| = 4n$, i — инволюция такая, что $d^i = d^{2n-1}$. Будем называть группу локально конечным полудиэдром, если она является объединением бесконечной возрастающей цепочки конечных полудиэдров D_i:*

$$D_1 < D_2 < \cdots < D_i < \cdots ,$$

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i.$$

В статье доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Бесконечная периодическая группа, насыщенная конечными полудиэдрами, является локально конечным полудиэдром.*

2. Используемые результаты

Предложение 1 ([3], теорема Шункова)**.** *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна.*

Предложение 2 ([4, 5], теорема Санова)**.** *Произвольная 2-группа, порядки элементов которой не превосходят 4, локально конечна.*

Предложение 3. [6] *Бесконечная локально конечная группа содержит бесконечную абелеву подгруппу.*

3. Доказательство теоремы

Лемма 1. *Пусть $D = \langle d \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$ — конечный полудиэдр, $d^{4n} = i^2 = 1$, $d^i = d^{2n-1}$. Тогда:*

1. $z = d^{2n}$ — центральная инволюция. Если $n = 1$, то $D = \langle d \rangle \times \langle i \rangle$ — абелева группа порядка 8, в противном случае центр Z группы D содержится в $\langle d \rangle$, при этом, если $1 \neq n$ — нечетное число, то центр $Z = \langle d^n \rangle$ — подгруппа порядка 4, если n — четное число, то $Z = \langle z \rangle$.

2. Пусть $f \in \langle d \rangle$. Элементы вида fi имеет порядок либо 4 и $f = d^k$, где k — нечетное число, $(fi)^2 = z$, либо 2 и $f = d^k$, где k — четное число.

3. Имеет место разложение $D = (\langle v \rangle \times \langle h \rangle) \leftthreetimes \langle i \rangle$, где $V = \langle v \rangle$ — циклическая 2-группа, $H = \langle h \rangle$ — циклическая группа нечетного порядка. В частности, подгруппа $H \leftthreetimes \langle i \rangle$ является конечным диэдром, а подгруппа $V \leftthreetimes \langle i \rangle$ — конечным полудиэдром.

4. Любая циклическая подгруппа из D, порядок которой больше четырех, лежит в $\langle d \rangle$.

5. Пусть A — абелева подгруппа группы D порядка ≥ 4. Тогда A либо циклическая, либо элементарная абелева группа $\langle z \rangle \times \langle i \rangle$ порядка 4, либо, в случае, когда n — нечетное, абелева подгруппа $\langle d^n \rangle \times \langle i \rangle$ порядка 8.

6. Пусть D_1 и D_2 — полудиэдральные группы. Вложение $D_1 < D_2$ возможно только если $\frac{|D_2|}{|D_1|}$ — нечетное число. В частности, полудиэдральная 2-группа не содержит собственных полудиэдров.

Доказательство. 1. Так как $z^2 = (d^{2n})^2 = d^{4n} = 1$, то z — инволюция. Далее, $z^i = (d^{2n})^i = (d^i)^{2n} = (d^{2n-1})^{2n} = d^{4n^2-2n} = d^{-2n} = z^{-1} = z$ и $z \in Z(D)$.

Если $n = 1$ и $|d| = 4$, то $d^i = d$ и $D = \langle d\rangle \times \langle i\rangle$ — абелева группа порядка 8.

Если $1 \neq n$ — нечетное число, то $(d^n)^i = (d^i)^n = (d^{2n-1})^n = (d^{2n}d^{-1})^n = (zd^{-1})^n = zd^{-n} = d^{2n}d^{-n} = d^{2n-n} = d^n$. Т.е. элемент четвертого порядка $d^n \in Z(D)$.

Если n — четное, то $(d^n)^i = (d^i)^n = (d^{2n-1})^n = (d^{2n}d^{-1})^n = (zd^{-1})^n = d^{-n} = (d^n)^{-1}$ и элемент четвертого порядка $d^n \notin Z(D)$.

2. Пусть $f \in \langle d\rangle$. Тогда $f = d^k$ и $fifi = ff^i = d^k(d^k)^i = d^kid^ki = d^k(d^i)^k = d^k(d^{2n-1})^k = d^kd^{2kn-k} = d^{2kn} = z^k$. Т.е. Элементы вида fi имеет порядок либо 4 и $(fi)^2 = z$, либо 2.

3. Понятно, что $\langle d\rangle = \langle v\rangle \times \langle h\rangle$, где $|v| = 2^m \geq 4$, $|h| = k$ — нечетное число, $4n = 2^m \cdot k$. Тогда $v = d^k$, $h = d^{2^m}$ и выполняются следующие равенства:

$$v^i = (d^k)^i = (d^i)^k = (d^{2n-1})^k = (d^{2n}d^{-1})^k = (zd^{-1})^k = zd^{-k} =$$

$$= zv^{-1} = v^{2^{m-1}}v^{-1} = v^{2^{m-1}-1},$$

$$h^i = (d^{2^m})^i = (d^{2n-1})^{2^m} = (zd^{-1})^{2^m} = (d^{-1})^{2^m} = (d^{2^m})^{-1} = h^{-1}.$$

Следовательно, подгруппа $\langle h\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$ является конечным диэдром, а подгруппа $\langle v\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$ — конечным полудиэдром.

4. Поскольку порядок элементов вида fi, $f \in \langle d\rangle$ не превосходит числа 4, то элементы порядка > 4 содержатся в $\langle d\rangle$.

5. Пусть A — абелева нециклическая группа порядка ≥ 4. Если n — четное число, то A может быть только элементарной абелевой группой $\langle z\rangle \times \langle t\rangle$, где t — нецентральная инволюция из D. Если n — нечетное, то из пункта 1 следует, что в D есть абелева подгруппа $\langle f\rangle \times \langle t\rangle$ порядка 8, где $|f| = 4$, $\langle f\rangle \leq \langle d\rangle$, t — нецентральная инволюция из D, и $A \leq \langle f\rangle \times \langle t\rangle$.

6. Пусть $D_1 = \langle d_1\rangle \leftthreetimes \langle t_1\rangle$, $D_2 = \langle d_2\rangle \leftthreetimes \langle t_2\rangle$ — полудиэдральные группы и $D_1 < D_2$. Пусть также $|d_1| = 4n_1$, $d_1^{t_1} = d_1^{2n_1-1}$, $|d_2| = 4n_2$, $d_2^{t_2} = d_2^{2n_2-1}$. Если $n_1 = 1$, то D_1 — абелева группа порядка 8 и из пункта 5 следует, что $\frac{D_2}{D_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_2$ — нечетное число. Поэтому можем считать, что $n_1 > 1$. Тогда из пункта 4 следует, что $\langle d_1\rangle \subseteq \langle d_2\rangle$, т.е $n_1|n_2$. Очевидно, что нецентральная инволюция t_1 из D_1 содержится в $D_2 \setminus Z(D_2)$. Следовательно, можно считать, что $D_2 = \langle d_2\rangle \leftthreetimes \langle t_1\rangle$ и $d_2^{t_1} = d_2^{2n_2-1}$. Обозначим $m = \frac{n_2}{n_1}$. Тогда $d_1 = d_2^m$,

$$d_1^{t_1} = (d_2^m)^{t_1} = (d_2^{t_1})^m = (d_2^{2n_2-1})^m = (d_2^{2mn_1-1})^m = d_1^{2mn_1-1} =$$

$$= \begin{cases} \text{если} \quad m = 2m_1, \text{ то} \quad d_1^{2\cdot 2m_1n_1-1} = (d_1^{4n_1})^{m_1}d_1^{-1} = d_1^{-1}; \\ \text{если} \quad m = 2m_1+1, \text{ то} \quad d_1^{2(2m_1+1)n_1-1} = (d_1^{4n_1})^{m_1}d_1^{2n_1-1} = d_1^{2n_1-1} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} d_1^{-1}, & \text{если m — четное число;} \\ d_1^{2n_1-1}, & \text{если m — нечетное число.} \end{cases}$$

Т.е. вложение $D_1 < D_2$ возможно только если $\frac{|D_2|}{|D_1|}$ — нечетное число. В частности, полудиэдральная 2-группа не содержит собственных полудиэдров. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть M — локально конечный полудиэдр. Тогда $M = B \leftthreetimes \langle i\rangle$, где $B = V \times H$, V — циклическая 2-группа, H — локально циклическая группа нечетного порядка, i — инволюция. Подгруппа $V \leftthreetimes \langle i\rangle$ является конечным* *полудиэдром, а подгруппа $H\leftthreetimes\langle i\rangle$ — локально конечным диэдром. В частности, если M — 2-группа, то она является конечным полудиэдром.*

Доказательство. По определению локально конечного полудиэдра $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$, где $D_1 < D_2 < \cdots < D_k < \cdots$ — бесконечная возрастающая цепочка конечных полудиэдров, $D_k = \langle d_k\rangle \leftthreetimes \langle i_k\rangle$, а i_k — инволюция такая, что, если $|d_k| = 4n_k$, то $d_k^{i_k} = d_k^{2n_k-1}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\langle d_k\rangle \subseteq \langle d_{k+1}\rangle$ (лемма 1) и для любой нецентральной в D_k инволюции i выполняется $d_{k+1}^i = d_{k+1}^{2n_{k+1}-1}$, где $|d_{k+1}| = 4n_{k+1}$, при этом $D_{k+1} = \langle d_{k+1}\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$.

По лемме 1 вложение $D_1 < D_2 < \cdots < D_k < \cdots$ возможно только если $|D_{k+1}| = |D_k|\cdot m_k$ и m_k — нечетное число. Отсюда, в частности, следует, что, если M — 2-группа, то она конечна.

Пусть $D_1 = \langle d_1\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$ — минимальная по порядку полудиэдральная подгруппа в G и $\langle d_1\rangle = \langle v\rangle \times \langle h_1\rangle$, где $\langle v\rangle$ — циклическая 2-группа, $\langle h_1\rangle$ — циклическая группа нечетного порядка. Центр $Z(D_1)$ либо содержится в $\langle v\rangle$ и имеет порядок 2 или 4, либо $Z(D_1) = D_1$, если D_1 — абелева группа порядка 8. Пусть $D_2 = \langle d_2\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$ и $D_1 < D_2$. Ввиду вышесказанного, $\langle d_2\rangle = \langle v\rangle \times \langle h_2\rangle$, где $|h_2| = |h_1|\cdot m_1$, m_1 — нечетное число, $Z(D_2) \subset \langle v\rangle$. Рассуждая аналогично, получим, что $D_k = (\langle v\rangle \times \langle h_k\rangle) \leftthreetimes \langle i\rangle$, где $|h_k| = |h_1|\cdot m_1\cdot m_2\cdots m_{k-1}$ и центр $Z(D_k) \subset \langle v\rangle$ — группа порядка четыре, если $|v| = 4$, или порядка два, если $|v| > 4$ (лемма 1). При этом, $\langle v\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$ — полудиэдр, $\langle h_k\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$ — диэдр (лемма 1).

Положим $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k$, $V = \langle v\rangle$, $H = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ и пусть i — нецентральная инволюция. Тогда $M = B\leftthreetimes\langle i\rangle$, $B = V\times H$, $V\leftthreetimes\langle i\rangle$ — конечный полудиэдр, $H\leftthreetimes\langle i\rangle$ — локально конечный диэдр (поскольку является объединением бесконечной возрастающей цепочки конечных диэдров). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — из условия теоремы и является бесконечной локально конечной группой. Тогда G — локально конечный полудиэдр.*

Доказательство. Ввиду локальной конечности G любая её конечнопорожденная подгруппа K конечна и содержится в некоторой подгруппе M группы G, изоморфной конечной полудиэдральной группе $D = \langle d\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$. Без ограничения общности можем считать, что $M = D$. Так как G — бесконечная группа, то в G есть подгруппа K порядка >8 и $K \subset D = \langle d\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle \subset G$, где D — конечный полудиэдр, $|d| = \frac{|D|}{2} > 4$. Следовательно, в G есть элементы порядка >4. В свою очередь, подгруппа $\langle D, g\rangle$, $g \in G\setminus D$ тоже содержится в некотором полудиэдре $D_1 = \langle d_1\rangle\leftthreetimes\langle i_1\rangle \subset G$. При этом, по лемме 1 $\langle d\rangle < \langle d_1\rangle$ и $|d_1| = |d|\cdot m$, где m — нечетное число. Т.е. G не является 2-группой. Возьмем в G два различных элемента g_1, g_2 порядка >4 и элемент $g_3 \neq 1$ нечетного порядка. Тогда $\langle g_1, g_2, g_3\rangle$ — конечная подгруппа, и по условию насыщенности $\langle g_1, g_2, g_3\rangle \subset D < G$, где $D = \langle d\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$ — конечный полудиэдр. Отсюда по лемме 1 $g_1, g_2, g_3 \in \langle d\rangle$ и g_1, g_2, g_3 перестановочны между собой. Т.е. все элементы из G, порядок которых нечетен или больше четырех, порождают в G нормальную локально циклическую подгруппу B. Тогда множество $G \setminus B$ не пусто и состоит из инволюций и элементов порядка 4.

Пусть теперь t — фиксированная инволюция из $G \setminus B$, $g \in G \setminus B$, $b \in B$ и $|b| > 4$. Тогда $\langle t, b, g\rangle \subset D^* = \langle d^*\rangle \leftthreetimes \langle t\rangle$. Из определения B следует, что $b \in \langle d^*\rangle \subset B$, а по лемме 1 $g = b_1 t$ для некоторого $b_1 \in \langle d^*\rangle \subset B$. Т.е. все элементы из G лежат в $B \leftthreetimes \langle t\rangle$. Пусть теперь D_1 — конечный полудиэдр из G, $g \in G \setminus D_1$ — произвольный элемент. Тогда $\langle D_1, g\rangle < D_2$, где D_2 — полудиэдральная группа из G и $D_1 < D_2$. Действуя таким образом, получим бесконечно возрастающую цепочку конечных полудиэдров $D_1 < D_2 < \cdots < D_k < \cdots$, объединение которой, очевидно, и есть группа $G = B \leftthreetimes \langle t\rangle$. Итак, G — локально конечный полудиэдр. Лемма доказана.

Лемма 4. *Группа G из условия теоремы локально конечна.*

Доказательство. Предположим противное и пусть G — бесконечная не локально конечная группа. По условию насыщенности в G есть конечная подгруппа $D_1 = \langle d_1\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$, где D_1 — конечный полудиэдр и пусть z — центральная в D_1 инволюция. Понятно, что $z \in \langle d_1\rangle$ и $D_1 \subset C = C_G(z)$, где C — бесконечная группа (иначе, по предложению 1 G — локально конечна). Таким образом, G содержит инволюцию $i \neq z$. Рассмотрим $C_1 = C_C(i)$. Пусть C_1 — бесконечная группа. Разберем следующие случаи.

1. Пусть C_1 не содержит элементов порядка >2. Тогда C_1 — элементарная абелева группа и в ней найдется конечная подгруппа $\langle i\rangle \times \langle z\rangle \times \langle k\rangle$ порядка >4, которая не вложима в конечную полудиэдральную группу (лемма 1), что противоречит условию насыщенности группы G конечными полудиэдрами.

2. Пусть C_1 содержит элементы порядка 4 и не содержит элементов порядка >4. Тогда по теореме Санова (предложение 2) C_1 — бесконечная локально конечная группа. Следовательно, по предложению 3 в C_1 есть абелева бесконечная локально конечная подгруппа A, в которой найдется конечная нециклическая абелева подгруппа $K = \langle a_1\rangle \times \cdots \times \langle a_k\rangle$, $k \geq 3$, которая не вложима в полудиэдральную группу (лемма 1).

3. Пусть теперь C_1 содержит элементы порядка >4. Тогда в C_1 найдется элемент a порядка >4, такой, что $K = \langle a, i, z\rangle$ — снова нециклическая абелева группа порядка > 8. С другой стороны, K лежит в некоторой конечной группе полудиэдра из G, и по лемме 1 $|K| = 4$ либо $|K| = 8$. Опять противоречие.

Следовательно, C_1 — конечная группа, а значит C — локально конечная подгруппа по предложению 2. Поскольку C насыщена конечными полудиэдрами, то по лемме 3 C — локально конечный полудиэдр.

Аналогично показывается, что $C^* = C_G(i)$ также локально конечный полудиэдр и $z \in C^*$. Пусть теперь x — элемент порядка 4 из C, y — элемент порядка 4 из C^*. Тогда $x^2 = z$, $y^2 = i$, $A = \langle z\rangle \times \langle i\rangle$ — элементарная абелева группа и $x, y \in N_G(A)$. Рассмотрим группу $\langle x, y\rangle$. Фактор-группа $\langle x, y\rangle/A$ — периодическая группа, порожденная двумя инволюциями $\overline{x} = xA$ и $\overline{y} = yA$, а значит, она конечна. По теореме Шмидта [6] конечной будет и группа $\langle x, y\rangle$. По условию насыщенности группа $\langle x, y\rangle$ содержится в конечном полудиэдре. Тогда $z = x^2 = y^2 = i$, поскольку квадраты всех элементов четвертого порядка равны центральной инволюции (лемма 1). Но это невозможно, так как i, z — различные инволюции. Противоречие. Следовательно, C^* — конечная подгруппа, по предложению 1 G — локально конечная группа и по лемме 3 G — локально конечный полудиэдр. Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

Список литературы

[1] Шлепкин А.К., *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы*// Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. – 23–28 августа 1993, Красноярск, С. 369.

[2] Рубашкин А.Г., *Группы, насыщенные заданными множествами конечных групп*: дис. ... канд. физ.-мат. наук, Красноярск, 2006.

[3] Шунков В.П., *О периодических группах с почти регулярной инволюцией*, Алгебра и логика, **4**:11 (1972), 470–494.

[4] Лыткина Д. В., *Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4*, Математические системы, **4** (2005), 602–617.

[5] Санов И.Н., *Решения проблем Бернсайда для периода 4*, Учен. записки ЛГУ. Сер. Матем., **10** (1940), 166–170.

[6] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.В., *Основы теории групп*, М.: Наука, 1982, С. 288.

Ляйсан Ринатовна Тухватуллина
Красноярский государственный аграрный университет,
пр. Мира, 90,
660049, Красноярск, Россия
E-mail address: `lyaisan_ 78@mail.ru, lyaisan@kgau.ru`