

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

*Том 4, стр. 85–102 (2007)*

УДК 512.5  
MSC 13A99

**ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ ГРУПП С ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ**

Н.В. БУСКИН

**ABSTRACT.** The goal of this work is to understand whether one-relator group  $G = \langle a, b | R(a, b) \rangle$ ,  $R(a, b)$  – relator of a special kind, is hyperbolic or not. There were applied combinatorial and geometric methods by S.Ivanov and P.Schupp, based on the use of the diagrams over a group. The result of this work consists of two theorems which classify group  $G$  for all the kinds of  $R(a, b)$  except two of them.

**Введение**

В статье [1] С. Иванов и П. Шупп доказали следующую теорему.

**Теорема.** Пусть группа  $G$  имеет представление  $\langle \mathcal{A} | aT_0aT_1aT_2aT_3 \rangle$ , где  $\mathcal{A}$  – конечный алфавит,  $a \in \mathcal{A}$  и  $T_0, T_1, T_2, T_3$  – попарно различные слова в свободной группе  $\mathcal{F}(\mathcal{A} \setminus \{a\})$ . Тогда группа  $G$  негиперболична в том и только том случае, когда для некоторого  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  в свободной группе  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  выполнено

$$T_i T_{i+1}^{-1} T_i T_{i+2}^{-1} = 1,$$

где индексы берутся по модулю 4.

В настоящей работе рассматриваются группы с представлением вида

$$\langle a, b | a^{-1}b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}ab^{n_3} \rangle.$$

Применив замену порождающих  $a \rightarrow ab^{-n_1}, b \rightarrow b$ , можно считать, что  $n_1 = 0$ . Если при этом  $n_0 = 0$  или  $n_3 = 0$ , то легко понять, когда группа с таким представлением гиперболична.

Таким образом, условия  $n_1 = 0, n_0 \neq 0, n_3 \neq 0$  в теоремах 1.1 и 1.2 главы 1 не являются ограничительными. В теореме 1.1 полностью разбирается случай  $n_2 = 0$ , а в теореме 1.2 – случай  $n_2 \neq 0$  с некоторым дополнительным условием.

BUSKIN, N.V., HYPERBOLICITY OF ONE-RELATOR GROUPS.

© 2007 Бускин Н.В.

Поступила 6 ноября 2006 г., опубликована 26 марта 2007 г.

Подчеркнем, что гиперболичность групп устанавливается здесь не с помощью действий групп на гиперболических или CAT(0)-пространствах, а с помощью комбинаторного исследования примыканий клеток друг к другу в диаграмме ван Кампена.

### §1. Формулировки основных теорем

В формулировках теорем 1.2 и 1.2' аббревиатура  $H$  произведена от английского слова hyperbolic, а  $NH$  – от слова nonhyperbolic.

**Теорема 1.1.** Пусть  $G = \langle a, b \mid a^{-1}b^k a^3 b^l \rangle$ , где  $k, l \neq 0$ . Тогда группа  $G$  гиперболична в том и только том случае, когда  $|k| \neq |l|$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $G = \langle a, b, | a^{-1}b^k a^2 b^l ab^m \rangle$ , причем  $k, l, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Рассмотрим следующую группу условий (здесь  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ):

- $$\begin{aligned} (0) \quad & k = l + m; \\ (1) \quad & m = -k \text{ и } l = 2m; \\ (NH)_1 \quad & k = -l, |m| > 1; \\ (NH)_2 \quad & l = m, |k| > 1; \\ (NH)_3 \quad & (k, l, m) = (-\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon); \\ (H)_1 \quad & l = -k, k \neq \varepsilon, m = \varepsilon; \\ (H)_2 \quad & k = \varepsilon, l \neq -\varepsilon, m = l. \end{aligned}$$

Если выполнено одно из условий  $(NH)_i$  или одно из условий (0), (1), то группа  $G$  негиперболична. Если выполнено одно из условий  $(H)_i$ , то  $G$  гиперболична. Если ни одно из условий (0), (1),  $(NH)_i$ ,  $(H)_i$  не выполняется и, кроме того,  $k \neq l$ ,  $m \neq -l$ , то группа  $G$  гиперболична.

Далее, для проведения доказательства удобнее иметь дело с эквивалентными формулировками.

**Теорема 1.1'.** Пусть  $G$  – группа, заданная порождающими  $a, b$  и одним определяющим соотношением  $a^{-1}b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}ab^{n_3}$ , где  $n_1 = 0$ , и  $n_0, n_3 \neq 0$ . Предположим  $n_2 = 0$ . Тогда группа  $G$  гиперболична в том и только том случае, когда  $|n_0| \neq |n_3|$ .

**Теорема 1.2'.** Пусть  $G$  – группа, заданная порождающими  $a, b$  и одним определяющим соотношением  $a^{-1}b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}ab^{n_3}$ , где  $n_1 = 0$ , и  $n_0, n_3 \neq 0$ . Предположим  $n_2 \neq 0$ . Рассмотрим следующие случаи для  $n_0, n_2, n_3$  (здесь  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ):

- $$\begin{aligned} (0) \quad & n_0 - n_2 - n_3 = 0; \\ (1) \quad & \begin{cases} 2n_0 + n_2 = 0, \\ 2n_3 - n_2 = 0; \end{cases} \\ (NH)_1 \quad & n_0 = -n_2, |n_3| > 1; \\ (NH)_2 \quad & n_2 = n_3, |n_0| > 1; \\ (NH)_3 \quad & (n_0, n_2, n_3) = (-\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon); \\ (H)_1 \quad & n_2 = -n_0, n_0 \neq \varepsilon, n_3 = \varepsilon; \\ (H)_2 \quad & n_0 = \varepsilon, n_2 \neq -\varepsilon, n_3 = n_2. \end{aligned}$$

Если тройка  $(n_1, n_2, n_3)$  удовлетворяет одному из условий  $(NH)_i$ , (0), (1), то  $G$  – негиперболична. Если  $(n_1, n_2, n_3)$  удовлетворяет одному из условий  $(H)_i$ , то группа  $G$  гиперболична. Если  $(n_1, n_2, n_3)$  не удовлетворяет ни одному из условий  $(NH)_i$ , (0), (1),  $(H)_i$  и, кроме того,  $n_0 \neq n_2$  и  $n_3 \neq -n_2$ , то группа  $G$  гиперболична.

## §2. Вспомогательные определения и утверждения

Пусть  $M$  – планарный клеточный комплекс,  $M^0, M^1, M^2$  – множества его вершин, ребер, клеток. Клетка из  $M$  называется внутренней, если никакое ее ребро не лежит в  $\partial M$ . Степень вершины  $v$ , т.е. число ребер из  $M^1$ , инцидентных  $v$ , обозначим через  $d(v)$ . Степень клетки  $\pi \in M^2$  – это число  $d(\pi)$  ее вершин  $v$  таких, что  $d(v) \geq 3$ . Тогда  $M$  называется  $(p, q)$ -картою, если выполнены следующие условия:

- (M1) для каждой внутренней клетки  $\pi \in M^2$  имеем  $d(\pi) \geq p$ ;
- (M2) для каждой внутренней вершины  $v$  из  $M^0$  имеем  $d(v) = 2$  или  $d(v) \geq q$ .

Карта  $M$  называется *регулярной*  $(p, q)$ -картою, если в пунктах (M1), (M2) вместо нестрогого неравенства можно поставить равенство. Радиус  $r(M)$  регулярной карты определяется как  $\max\{dist(v, \partial M) | v \in M^0\}$ . С. Иванов и П. Шупп доказали следующую теорему.

**Теорема 2.1** (см. [1]). *Существует такая функция  $L : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что выполнено следующее утверждение. Пусть  $M$  –  $(p, q)$ -карта, где  $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$ , и радиусы ее регулярных  $(p, q)$ -подкарт ограничены некоторым числом  $K$ . Тогда  $|M^2| \leq L(K)|\partial M|$ .*

Пусть группа  $G$  задается представлением  $G = \langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ , где  $\mathcal{A}$  – конечный алфавит,  $\mathcal{R}$  – множество соотношений группы  $G$ , которые являются циклически редуцированными словами над алфавитом  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ .

Карта  $N$  называется *диаграммой* (van Kampena) над группой  $G$ , заданной представлением  $\langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ , если ей поставлена в соответствие функция  $\varphi : N^1 \rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

- (L1) если  $\varphi(e) = a$ , то  $\varphi(\bar{e}) = a^{-1}$ ;
- (L2) если  $\pi \in N^2$  и  $\partial\pi = e_1 \dots e_l$  – граница клетки  $\pi$ , то слово  $\varphi(\partial\pi) = \varphi(e_1) \dots \varphi(e_l)$  является некоторой циклической перестановкой слова  $R^\varepsilon$ , где  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ,  $R \in \mathcal{R}$ .

Назовем ориентацию границы клетки из  $N^2$  *положительной*, если она соответствует обходу границы против часовой стрелки и отрицательной в противном случае. Положительно ориентированную границу клетки из  $N^2$  будем называть *контуром*.

Пусть  $\pi_1, \pi_2$  – различные клетки диаграммы  $N$  и  $v$  – вершина, содержащаяся в  $\partial\pi_1, \partial\pi_2$ . Пара клеток  $\pi_1, \pi_2$  называется *редуцируемой*, если  $\varphi(\partial\pi_1) = \varphi(\partial\pi_2)^{-1}$ , где обход каждого из контуров  $\partial\pi_i$  начинается и завершается в вершине  $v$ .

Диаграмма  $N$  называется *редуцированной*, если она не содержит редуцируемых пар клеток.

Будем говорить, что группа  $G$ , заданная представлением  $\langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ , удовлетворяет *условиям малых сокращений*  $C(p)$  и  $T(q)$ , если любая редуцированная диаграмма  $N$  над  $G$  является  $(p, q)$ -картою.

Дадим также алгебраическое определение условия  $C(p)$ , которое используется в §3. Пусть  $\mathcal{R}^*$  – множество всех циклических перестановок слов из  $\mathcal{R}$  и обратных к ним. Слово  $r$  над  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$  называется *куском* для представления  $\langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ , если  $r$  является начальным подсловом двух различных слов из  $\mathcal{R}^*$ . Представление  $\langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$  удовлетворяет условию  $C(p)$ , если каждое слово из  $\mathcal{R}^*$  не представимо в виде произведения более чем  $p$  кусков.

Диаграмма  $N$  над группой  $G$ , заданной представлением  $\langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ , называется *минимальной*, если для любой диаграммы  $M$  над  $G$  с тем же представлением и  $\varphi(\partial N) = \varphi(\partial M)$  число клеток  $M$  не меньше числа клеток  $N$ .

**Теорема 2.2** (см. [1]). *Конечно представленная группа с одним соотношением  $G = \langle \mathcal{A} | R \rangle$ , удовлетворяющая условиям малых сокращений  $C(p)$  и  $T(q)$ , где  $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$ , гиперболична в том и только том случае, когда существует число  $K$ , ограничивающее радиус каждой регулярной  $(p, q)$ -подкарты произвольной минимальной диаграммы  $N$  над заданным представлением группы  $G$ , в которой нет вершин степени 2.*

Далее мы будем использовать только достаточное условие этой теоремы. Сформулируем это условие в следующем виде.

**Теорема 2.3.** *Пусть группа  $G = \langle \mathcal{A} | R \rangle$  удовлетворяет условиям малых сокращений  $C(p)$  и  $T(q)$ , где  $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$ . Если существует число  $K$ , ограничивающее радиус любой редуцированной диаграммы над  $G$ , являющейся регулярной  $(p, q)$ -картой, то группа  $G$  гиперболична.*

**Лемма 2.4** (см. [3]). *Свободная абелева группа ранга 2 не может быть подгруппой гиперболической группы.*

**Лемма 2.5** (см. [2]). *Пусть  $G$  – группа с одним определяющим соотношением  $R$ . Тогда в  $G$  есть неединичные элементы конечного порядка в том и только том случае, когда слово  $R$  является степенью более короткого слова в свободной группе.*

**Лемма 2.6** (см. [3]). *Пусть  $G$  – гиперболическая группа без кручения,  $x, y \in G \setminus \{1\}$ . Тогда, если  $x^{-1}y^kx = y^l$  и  $k \neq 0$ , то  $x^{-1}yx = y$  и  $k = l$ .*

**Лемма 2.7.** *Пусть  $G$  – гиперболическая группа без кручения,  $x, y \in G \setminus \{1\}$ . Тогда, если  $y^k = x^k$  и  $k \neq 0$ , то  $x = y$ .*

Доказательство. Имеем,  $y^k = x^{-1}x^kx = x^{-1}y^kx$ . Отсюда и из леммы 2.6 следует, что  $y = x^{-1}yx$  и, значит,  $(xy^{-1})^k = 1$ . Так как  $G$  – группа без кручения, то  $xy^{-1} = 1$ .

**Теорема 2.8** (см. [1]). *Пусть  $G = \langle \mathcal{A} | R \rangle$  – группа над конечным алфавитом  $\mathcal{A}$  с одним соотношением вида  $R = aBaCa^{-1}D$ , где  $a \in \mathcal{A}$  и  $a$  не входит в слова  $B, C, D$ . Предположим, что группа  $\langle B^{-1}CB, D \rangle \leq F(\mathcal{A})$  является циклической с порождающим  $Z$ , так что  $B^{-1}CB = Z^s, D = Z^t$ . Тогда  $G$  негиперболична в том и только том случае, когда  $|s| = |t|$ , либо  $s = -2t$ , либо  $t = -2s$ .*

Пусть  $G = \langle a, b | a^{k_0}b^{n_0} \dots a^{k_s}b^{n_s} \rangle$ , где  $k_j \neq 0$ ,  $j = 0, \dots, s$ , и допускается, что  $n_i = 0$ , если  $k_i$  и  $k_{i+1}$  имеют одинаковый знак. Пусть  $N$  – редуцированная диаграмма над  $G$ . В центре каждой клетки диаграммы  $N$  ставим стрелку  $\circlearrowleft$  или  $\circlearrowright$  так, что при обходе клетки по указанному направлению читается циклическое слово  $a^{k_0}b^{n_0} \dots a^{k_s}b^{n_s}$ . Построим из нее диаграмму  $\bar{N}$ , стягивая в точку все ребра с метками  $b$  и  $b^{-1}$ . Если  $\pi$  – клетка в  $N$ ,  $\bar{\pi}$  – ее образ в  $\bar{N}$ , то в центр  $\bar{\pi}$  ставим такую же стрелку, что и в  $\pi$ , а в углы, соответствующие путям с меткой  $b^{n_i}$ , ставим числа  $i$ ,  $i \in \{0, \dots, s\}$ .

Следующее замечание используется в доказательстве теоремы 1.2'.

Пусть  $W$  – циклически редуцированное слово из свободной группы  $F(a, b)$ ,  $\bar{W}$  – его образ при естественном гомоморфизме  $F(\mathcal{A}) \rightarrow G$ . Предположим, что  $\bar{W} = 1$ . Пусть  $N$  – редуцированная диаграмма над  $G$  такая, что по границе  $N$  читается  $W$ . Построим из нее диаграмму  $\bar{N}$  стягиванием в точку всех ребер с метками  $b$  и  $b^{-1}$ . Заметим, что  $|\bar{N}^2| = |N^2|$ ,  $|\partial \bar{N}| \leq |\partial N|$ . Далее с помощью

теоремы 2.1 будет выведено неравенство  $|\bar{N}^2| \leq L|\partial\bar{N}|$ , где  $L$  – некоторое число. Отсюда, непосредственно, будет следовать неравенство  $|N^2| \leq L|\partial N|$ .

### §3. Доказательство теоремы 1.1'

Разберем три случая.

*Случай 1.  $n_0 = -n_3$ .*

Тогда  $G = \langle a, b \mid b^{-n_0}a^{-1}b^{n_0} = a^{-3} \rangle$ . Так как по условию  $n_0 \neq 0$ , то по лемме 2.5 группа  $G$  без кручения. По лемме 2.6 эта группа негиперболична.

*Случай 2.  $n_0 = n_3$ .*

Тогда  $G = \langle a, b \mid b^{n_0}a^{-1}b^{n_0} = a^{-3} \rangle$ . Так как по условию  $n_0 \neq 0$ , то по лемме 2.5 группа  $G$  без кручения. Предположим, что группа  $G$  гиперболична. Так как  $(a^3b^{n_0})^2 = a^4$ , то из леммы 2.5 получаем, что  $a^3b^{n_0} = a^2$ . Тогда,  $a = b^{-n_0}$  и, значит,  $G \cong \mathbb{Z}$ . С другой стороны, абеллизация группы  $G$  – это группа

$$H = \langle a, b \mid [a, b] = 1, (ab^{n_0})^2 = 1 \rangle.$$

Произведем замену порождающих  $a_1 = ab^{n_0}, b_1 = b$ . Тогда видим, что  $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ . Противоречие.

*Случай 3.  $|n_0| \neq |n_3|$ .* Тогда  $G = \langle a, b \mid a^{-1}b^k a^3 b^n \rangle$ , где  $k = n_0, n = n_3$ ,  $|k| \neq |n|$ . Заменяя  $b$  на  $b^{-1}$ , если необходимо, можно считать, что  $n > 0$ . Рассмотрим определяющее соотношение  $R = a^{-1}b^k a^3 b^n$ . Перечислим куски, входящие в  $R$ :  $a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, b^{\pm t}, t \in \{1, \dots, \max(|k|, |n|) - 1\}$ . Несложно проверить, что  $R$  не может быть представлено в виде произведения менее чем 6 кусков. Таким образом, для  $R$  выполнено условие  $C(6)$ . Перечислим все способы представления  $R$  в виде произведения шести кусков:

a)  $n > k > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} R &= [a^{-1}][b^k][a^2][a][b^l][b^m], \\ R &= [a^{-1}][b^k][a][a^2][b^l][b^m], \end{aligned}$$

где  $l > 0, m > 0, l + m = n$ . Тогда

b)  $k > n > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} R &= [a^{-1}][b^l][b^m][a^2][a][b^n], \\ R &= [a^{-1}][b^l][b^m][a][a^2][b^n], \end{aligned}$$

где  $l > 0, m > 0, l + m = k$ .

c)  $n > 0 > k$  и  $n > |k|$ . Удобно переобозначить  $|k|$  через  $k$ , считая теперь, что

$k > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} R &= [a^{-1}][b^{-k}][a^2][a][b^l][b^m], \\ R &= [a^{-1}][b^{-k}][a][a^2][b^l][b^m], \end{aligned}$$

где  $l > 0, m > 0, l + m = n$ .

d)  $n > 0 > k$  и  $|k| > n$ . Тогда

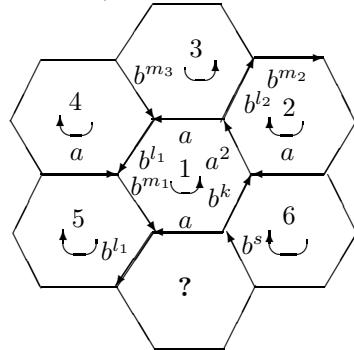
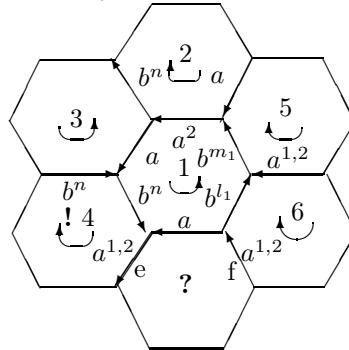
$$\begin{aligned} R &= [a^{-1}][b^{-l}][b^{-m}][a^2][a][b^n]; \\ R &= [a^{-1}][b^{-l}][b^{-m}][a][a^2][b^n]; \end{aligned}$$

где  $l > 0, m > 0, l + m = |k|$ .

Отметим, что в каждом случае a)–d) возможны два типа разбиения  $R$  на шесть кусков и для каждого из них возможно конечное число вариантов, соответствующих представлению чисел  $n$  и  $|k|$  в виде суммы  $l$  и  $m$ .

Условие  $T(3)$  выполнено для любого представления, где все определяющие соотношения являются несократимыми словами, так что  $G$  удовлетворяет условиям  $C(6)$  и  $T(3)$ . Далее мы показываем, что радиусы всех редуцированных регулярных  $(6,3)$ -диаграмм над  $G$  ограничены в совокупности одним и тем же числом  $K$ . Тогда по теореме 2.3 группа  $G$  гиперболична. Рисунки  $a)$ – $d)$  соответствуют попыткам строить регулярную  $(6,3)$ -карту, с помощью клеток, соответствующих разбиениям  $R$  на шесть кусков в случаях  $a)$ – $d)$  соответственно. В каждом случае процесс построения начинается с клетки с номером 1 (она соответствует другому из двух возможных разбиений  $R$  на куски). К этой клетке по ребру с меткой  $a^2$  можно присоединить лишь клетку, соответствующую второму типу разбиения  $R$  в рассматриваемом случае (так как диаграмма должна быть редуцированной). Далее присоединяя клетки в соответствии с нумерацией, как это показано на рисунке. Знак  $!$  означает, что для присоединения содержащей его клетки необходимо наложить дополнительное требование на числа  $l_i, m_i$ , соответствующие присоединяемой клетке, иначе процесс присоединения заканчивается и мы получаем ограниченную регулярную  $(6,3)$ -диаграмму. Знак  $?$  означает, что отмеченную им клетку невозможно разметить так, чтобы эта разметка соответствовала одному из разбиений  $R$  на куски. В центрах клеток указаны направления обхода, при которых по контуру клетки читается  $R$ . Каждый из изображенных случаев описывает обе возможные попытки построения диаграммы: первая и вторая клетки в порядке их присоединения соответствуют соотношениям с различными расположениями кусков  $a$  и  $a^2$ , так что случай, когда мы начинаем с клетки 2 (что соответствует другому возможному разбиению  $R$  на куски) можно считать рассмотренным. В случае  $b)$  в процессе присоединения клеток появляется неоднозначность: возникает ребро, которое может быть помечено как  $a$ , так и  $a^2$  (на рисунке мы пишем  $a^{1,2}$ ). Если, размечая клетку 5, на таком ребре поставить метку  $a^2$ , то клетка 6 не может обладать разметкой, соответствующей разбиению  $R$  на шесть кусков, то есть процесс построения завершается. При любом выборе меток  $a$  и  $a^2$  для ребер  $e$  и  $f$  клеток 4 и 6 разметить клетку со знаком  $?$  в соответствии с любым из двух типов в случае  $b)$  не удается.

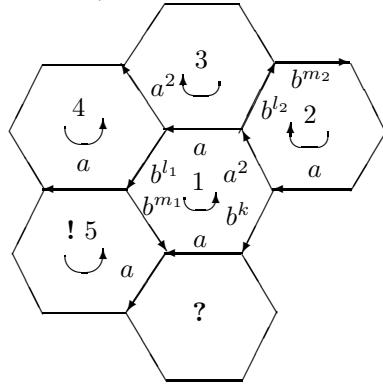
В этом смысле указанный процесс построения “почти” однозначен. Метки некоторых не интересующих нас ребер не указаны по той причине, что они могут быть помечены неоднозначно, но все возможные разметки таких ребер легко восстановить, зная направление обхода соответствующей клетки и ее уже отмеченные ребра.

Случай  $a)$ Случай  $b)$ 

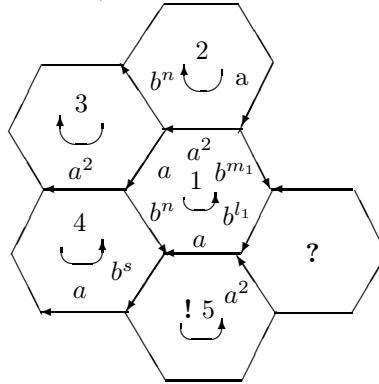
Пояснение к случаю б).

Клетки 1,2,3 присоединяются однозначно в указанном выше смысле. Для присоединения клетки 4 необходимо потребовать  $k = 2n$ . Клетку 5 можно присоединить только если потребовать  $m_1 = n$ . Клетку 6 можно присоединить только при условии, что  $l_1 = n$ , а это так из-за наложенных ранее условий  $k = 2n$ ,  $m_1 = n$  и исходного равенства  $l_1 + m_1 = k$ . На этом процесс построения завершается.

Случай c)



Случай d)



Эти случаи разбираются аналогично.

#### §4. Доказательство теоремы 1.2'

**Лемма 4.1.** Группа  $G = \langle a, b | u^{-1}b^n u \cdot v^{-1}a^m v \rangle$  негиперболична при  $|n|, |m| \geq 2$ .

*Доказательство.* Допустим, что  $G$  гиперболична. Тогда по лемме 2.4 в  $G$  коммутируют элементы  $x = v^{-1}av$  и  $y = u^{-1}bu$ .

Профакторизуем  $G$  по  $\langle\langle a^m \rangle\rangle$ , где  $\langle\langle a^m \rangle\rangle$  – нормальное замыкание элемента  $a^m$  в группе  $G$ . Тогда фактор-группа изоморфна свободному произведению  $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ . Образы  $x$  и  $y$  при естественном гомоморфизме  $G \rightarrow G/\langle\langle a^m \rangle\rangle$  порождают множители этого свободного произведения, поэтому они не коммутируют. Противоречие.  $\square$

Сначала разберем случаи  $(NH)_i$  и  $(H)_i$ .

*Случай*  $n_2 = -n_0, |n_3| > 1$  ( $NH$ )<sub>1</sub>.

В этом случае группа  $G$  имеет представление  $\langle a, b | (b^{n_0}ab^{-n_0})^2(ab)^{n_3} \rangle$  и по лемме 4.1 негиперболична.

*Случай*  $n_2 = -n_0, n_3 = \varepsilon$  (объединение случаев  $(NH)_3$  и  $(H)_1$ , в которых  $\varepsilon$  одно и то же).

Применяя замену  $b \mapsto b^{-1}$  в случае необходимости, можно считать, что  $\varepsilon = 1$ . В этом случае  $G = \langle a, b | a^{-1}b^{n_0}a^2b^{-n_0}ab \rangle$ . С помощью преобразования Титце введем новый порождающий  $c$ :

$$\begin{aligned} \langle a, b | a^{-1}b^{n_0}a^2b^{-n_0}ab \rangle &\mapsto \langle a, b, c | a^{-1}b^{n_0}a^2b^{-n_0}ab, c^{-1}a^{-1}b^{n_0}ab^{-n_0}a \rangle \cong \\ &\langle a, b, c | c^2b, c^{-1}a^{-1}b^{n_0}ab^{-n_0}a \rangle \cong \langle a, b, c | c^2b, c^{-1}a^{-1}c^{-2n_0}ac^{2n_0}a \rangle. \end{aligned}$$

Исключая порождающий  $b$ , получим  $G = \langle a, c | c^{-1}a^{-1}c^{-2n_0}ac^{2n_0}a \rangle$ . Теперь определяющее соотношение для  $G$  содержит ровно три вхождения символа

$a$  и мы можем воспользоваться теоремой 3 работы [1]. Из нее следует, что  $G$  негиперболична в том и только том случае, когда  $n_0 = -1$  (это условие  $(NH)_3$ ).

*Случай  $n_2 = n_3, |n_0| > 1$  ( $NH)_2$ .*

В этом случае группа  $G$  имеет представление  $\langle a, b \mid a^{-1}b^{n_0}a^2b^{n_3}ab^{n_3} \rangle$  и по лемме 4.1 негиперболична.

*Случай  $n_2 = n_3, n_0 = \varepsilon, n_3 \neq -\varepsilon$  (случай  $(H)_2$ ).*

Применяя замену  $b \mapsto b^{-1}$  в случае необходимости, можно считать, что  $\varepsilon = 1$ .

В этом случае  $G = \langle a, b \mid a^{-1}ba^2b^{n_3}ab^{n_3} \rangle$ . С помощью преобразования Титце введем новый порождающий  $c$ :

$$\begin{aligned} \langle a, b \mid a^{-1}ba^2b^{n_3}ab^{n_3} \rangle &\mapsto \langle a, b, c \mid a^{-1}ba^2b^{n_3}ab^{n_3}, c^{-1}a^2b^{n_3}a^{-1} \rangle \cong \\ &\langle a, b, c \mid bc^2, c^{-1}a^2b^{n_3}a^{-1} \rangle \cong \langle a, b, c \mid bc^2, c^{-1}a^2c^{-2n_3}a^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

Исключая порождающий  $b$ , получим  $G = \langle a, c \mid c^{-1}a^2c^{-2n_3}a^{-1} \rangle$ . Теперь определяющее соотношение для  $G$  содержит ровно три вхождения символа  $a$  и мы можем применить теорему 3 работы [1]. По этой теореме группа  $G$  гиперболична.

Итак, случаи  $(NH)_i$  и  $(H)_i$  уже разобраны. Заметим, что объединение всех этих случаев совпадает с объединением случаев

$$n_0 = -n_2 \text{ и } n_2 = n_3 \quad (*)$$

Теперь разберем случаи (0) и (1). Напомним, что мы условились обозначать через  $\bar{N}$  диаграмму, получаемую стягиванием  $b$ -путей в точку в диаграмме  $N$  над группой  $G$  (см. § 2).

Предположим, что  $n_0, n_2, n_3$  удовлетворяют уравнению (0). По условию теоремы  $n_1 = 0$ . Тогда можно состыковать четыре клетки, образовав диаграмму  $N$ , так, что ее образ  $\bar{N}$  выглядит как на рис. 1.

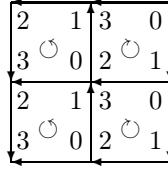


Рис. 1

Слово  $w$ , читаемое по границе диаграммы  $N$  против часовой стрелки, начиная с левого нижнего угла, имеет вид

$$w = a^{-1}b^{n_0-n_2}a^{-1}a^{-1}b^{-n_0}a^{-1}b^{-n_0}ab^{-n_3}ab^{n_2}ab^{n_3+n_2}ab^{n_3}.$$

Так как  $n_2 = n_0 - n_3$ , то после подстановки выражения для  $n_2$  в  $w$ , сопряжения  $w$  с помощью  $b^{-n_3}$  и подходящей группировкой множителей, получаем, что в группе  $G$  выполняется следующее соотношение:

$$(b^{n_3}a^{-1})^2(a^{-1}b^{-n_0})^2(b^{n_3}a^{-1})^{-2}(a^{-1}b^{-n_0})^{-2}.$$

Предположим, что  $G$  гиперболична. По лемме 2.5 группа  $G$  не имеет кручения. Ссылаясь, как и ранее, на лемму 2.6, получаем, что в  $G$  коммутируют элементы  $b^{n_3}a^{-1}$  и  $a^{-1}b^{-n_0}$ , то есть

$$(b^{n_3}a^{-1})(a^{-1}b^{-n_0})(ab^{-n_3})(b^{n_0}a) = b^{n_3}(a^{-2}b^{-n_0})ab^{n_2}a = 1. \quad (4.1)$$

Из исходного определяющего соотношения выводим  $a^{-2}b^{-n_0} = b^{n_2}ab^{n_3}a^{-1}$ . Подставляя  $b^{n_2}ab^{n_3}a^{-1}$  вместо  $a^{-2}b^{-n_0}$  в (4.1) и учитывая, что  $n_0 = n_2 + n_3$  получаем, что в  $G$  выполняется  $(b^{n_0}a)^2 = 1$ . Так как группа  $G$  не имеет кручения, то  $b^{n_0}a = 1$  в группе  $G$ .

Отсюда следует, что  $G/\langle\langle b \rangle\rangle = 1$ . С другой стороны, из вида определяющего соотношения следует, что  $G/\langle\langle b \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ . Противоречие.

Предположим, что  $n_0, n_2, n_3$  удовлетворяют уравнениям (1). Тогда определяющее соотношение может быть переписано в виде

$$\mathcal{R} = a^{-1}b^t a^2 b^{-2t} a b^{-t}, \text{ где } t = n_0.$$

Предположим, что группа  $G$  гиперболична. Рассмотрим слово  $b^{-t}\mathcal{R}b^t\mathcal{R}$ . После подходящей группировки множителей и сопряжения, получаем, что  $(a^{-1}b^t a b^{-t})^2 = (b^{2t}a^{-1})^2$ . По лемме 2.7 имеем  $a^{-1}b^t a b^{-t} a = b^{2t}a^{-1}$ . Переписывая это соотношение в виде

$$a^{-1}b^t a b^{-t} a^2 b^{-2t} = 1, \quad (4.2)$$

выражая  $a^2b^{-2t}$  из определяющего соотношения и подставляя это выражение в (4.2), получаем, что в группе  $G$  коммутируют элементы  $u = a^{-1}b^t$  и  $v = ab^{-t}$ . Поймем теперь, что это невозможно, что и даст противоречие с предположением о гиперболичности. Для этого произведем замену порождающих  $a \mapsto ab^t, b \mapsto b$ . Слово  $\tilde{\mathcal{R}}$ , полученное в результате соответствующего переписывания определяющего соотношения, содержит символ  $b$  в суммарной степени ноль. Вводя новые порождающие  $\{a_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$  по правилу  $a_s = b^s a b^{-s}$ , переписывая в этих порождающих слово  $\tilde{\mathcal{R}}$  и исключая преобразование Титце порождающий  $a$ , получаем новое представление для группы  $G$ :

$$G = \langle b, \{a_s\}_{s \in \mathbb{Z}} \mid \{a_{s+1} = ba_s b^{-1}\}_{s \in \mathbb{Z}}, a_0^{-1}a_t a_{2t} a_t \rangle. \quad (4.3)$$

Рассмотрим гомоморфизм  $G \rightarrow \mathbb{Z}$ , отображающий  $a$  в 0 и  $b$  в 1. Ядро  $K$  этого гомоморфизма имеет представление  $\langle \{a_s\}_{s \in \mathbb{Z}} \mid \{a_s^{-1}a_{s+t}a_{s+2t}a_{s+t}\}_{s \in \mathbb{Z}} \rangle$ . По теореме Магнуса о ступенчатом представлении (см. [4], Предложение 5.2, гл. II), подгруппа  $N$  группы  $K$ , порожденная элементами  $a_s$ , где  $s \in I = [\min\{0, 2t\}, \max\{0, 2t\}]$ , имеет представление

$$N = \langle \{a_s\}_{s \in I} \mid a_0^{-1}a_t a_{2t} a_t \rangle.$$

Очевидно, что  $N$  – свободная группа с базисом  $\{a_s\}_{s \in I \setminus \{2t\}}$ . Так как в  $G$  выполняются соотношения  $a_0 = a_t a_{2t} a_t$  и  $a_{-t} = b^{-t} a_0 b^t = a_0 a_t a_0$ , то  $a_{-t} \in N \leq G$ .

В представлении (4.3) слова  $u$  и  $v$  имеют вид  $a_{-t}$  и  $a_0$ . По доказанному слова  $u$  и  $v$  коммутируют, то есть  $a_{-t}a_0 = a_0a_{-t}$ . Подставляя слово  $a_0a_t a_0$  вместо  $a_{-t}$  в соотношение коммутации, получаем, что в  $N$  имеет место равенство  $a_0a_t a_0^2 = a_0^2 a_t a_0$ , что противоречит тому, что  $N$  – свободная группа. Итак, группа  $G$  негиперболична.

Осталось разобрать случай, когда тройка  $(n_0, n_2, n_3)$  не удовлетворяет системам (0), (1),  $(NH)_i$ ,  $(H)_i$  и выполнены неравенства  $n_0 \neq n_2, n_2 \neq -n_3$  из формулировки теоремы. Отсюда и из (\*) следует, что  $|n_2| \neq |n_0|, |n_2| \neq |n_3|$ .

**Лемма 4.2.** Пусть  $N$  – произвольная редуцированная диаграмма над группой  $G$ , заданной представлением  $\langle a, b \mid R \rangle$ , где  $R = a^{-1}b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}ab^{n_3}$ , и выполнены условия  $n_0, n_2, n_3 \neq 0$ ,  $n_1 = 0$  и  $|n_2| \neq |n_0|$ ,  $|n_2| \neq |n_3|$ . Тогда карта  $\bar{N}$  является  $(4, 4)$ -картой.

*Доказательство.* Ясно, что  $|\partial\pi| = 4$  для каждой клетки  $\pi \in \bar{N}^2$ . Поэтому достаточно доказать, что в  $\bar{N}$  нет вершин степени 2 и 3. Допустим, в  $\bar{N}$  есть вершина  $\bar{v}$  степени 3. Возможны четыре случая для направленных ребер, помеченных буквой  $a$  и инцидентных этой вершине:

- одно ребро входит в  $\bar{v}$  и два выходят,
- два ребра входят в  $\bar{v}$  и одно выходит,
- все три ребра выходят из  $\bar{v}$ ,
- все три ребра входят в  $\bar{v}$ .

На рис. 2а изображены соответствующие случаи, но уже в диаграмме  $N$ . Треугольники изображают 0-клетки, соответствующие  $b$ -ребрам (более точным было бы изображать деревья, получающиеся из этих треугольников фолдингами  $b$ -ребер).

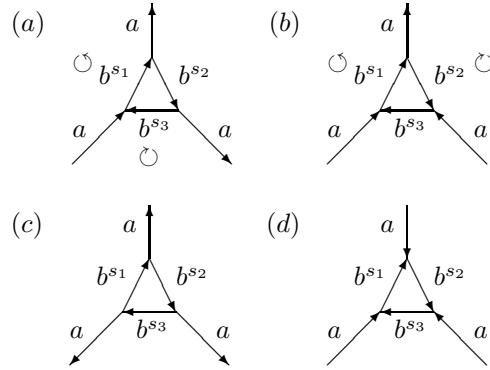


Рис. 2а

В каждом из случаев укажем, каким условиям удовлетворяют числа  $s_i$ .

*Случай (a).* Из вида соотношения  $\mathcal{R}$  следует, что  $s_1 \in \{n_1, n_2\}$ ,  $s_2 \in \{-n_0, n_0\}$ ,  $s_3 \in \{-n_1, -n_2\}$ . По условию теоремы  $n_1 = 0$ ,  $n_2, n_0 \neq 0$ , и диаграмма  $N$  редуцированная, следовательно,  $s_1 \neq -s_3$ .

*Случай (b).* Имеем  $s_1 \in \{n_1, n_2\}$ ,  $s_2 \in \{-n_1, -n_2\}$ ,  $s_3 \in \{-n_3, n_3\}$ . Здесь из-за редуцированности имеем  $s_1 \neq -s_2$ .

*Случай (c).* Имеем  $s_1, s_2, s_3 \in \{-n_0, n_0\}$ . Из редуцированности диаграммы следует, что  $s_1 = s_2 = s_3$  и это число не равно 0, т.к.  $n_0 \neq 0$ .

*Случай (d).* Имеем  $s_1, s_2, s_3 \in \{-n_3, n_3\}$ . Аналогично  $s_1 = s_2 = s_3 \neq 0$ .

Метка пути, обходящего 0-клетку, равна 1 в свободной группе  $F(b)$ , поэтому  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ . В случаях *c*) и *d*) отсюда непосредственно вытекает противоречие. В случаях *a*) и *b*) противоречие получается с помощью условий  $|n_2| \neq |n_0|$ ,  $|n_2| \neq |n_3|$  и  $n_1 = 0$ .

Если предположить, что в  $\bar{N}$  есть внутренняя точка степени 2, то в  $N$  имеет место следующая стыковка клеток (рис. 2б).

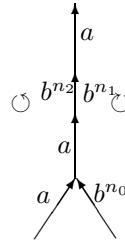


Рис. 2б

В этом случае получаем противоречие с условием  $n_2 \neq 0$ .  $\square$

Разобьем множество  $\{(n_0, n_2, n_3) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^3 \mid n_0 \neq \pm n_2, n_3 \neq \pm n_2\}$  на 9 непересекающихся подмножеств, удовлетворяющих следующим условиям (происхождение этих условий см. ниже):

$$(2) \begin{cases} 2n_0 + n_2 = 0, \\ 2n_3 + n_2 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2n_0 + n_2 = 0, \\ n_0 - n_2 + n_3 = 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2n_0 - n_2 = 0, \\ 2n_3 - n_2 = 0; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 2n_0 - n_2 = 0, \\ n_0 + n_2 + n_3 = 0; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} 2n_0 - n_2 = 0, \\ n_0 + n_2 - n_3 = 0; \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} 2n_3 + n_2 = 0, \\ n_0 - n_2 + n_3 = 0; \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} 2n_3 + n_2 = 0, \\ n_0 + n_2 - n_3 = 0; \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} 2n_3 - n_2 = 0, \\ n_0 + n_2 + n_3 = 0; \end{cases}$$

(10) Ни один из случаев (2)–(9) не выполнен.

Далее мы докажем, что в каждом из этих случаев существует число  $K > 0$  такое, что для любой редуцированной диаграммы  $N$  над группой  $G$  радиусы регулярных  $(4,4)$ -подкарт диаграмм  $\bar{N}$  не превосходят  $K$ .

Тогда, применяя теорему 2.1 и приведенные в §2 неравенства, связывающие площади и периметры диаграмм  $N$  и  $\bar{N}$ , получим, что группа  $G$  гиперболична.

Сначала поймем, откуда возникают случаи (2–9). Предположим, что имеется карта  $\bar{N}$ , содержащая регулярную  $(4,4)$ -подкарту радиуса  $r > 2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\bar{N}$  совпадает с этой регулярной подкартой.

Тогда в  $\bar{N}$  должна содержаться по крайней мере одна внутренняя точка. Пусть  $x$  – произвольная внутренняя вершина в  $\bar{N}$ . Рассмотрим ее прообраз в  $N$ . Он является замкнутым  $b$ -путем вида  $b^{k_0}b^{k_1}b^{k_2}b^{k_3}$ , где  $k_i \in \{\pm n_0, \pm n_1, \pm n_2, \pm n_3\}$  (напоминаем, что  $n_1 = 0$ ; знак для  $k_i$  выбирается с учетом направления обхода соответствующей клетки). Так как замкнутый

$b$ -путь, стягиваемый в точку, есть тривиальное слово в  $\mathcal{F}(a,b)$ , то получаем условие  $k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 0$ . Таким образом, точка  $x$  дает нам уравнение на  $n_0, n_2, n_3$ . Перечислим все возможные такие уравнения и соответствующие им картинки с точностью до отражений и поворотов.

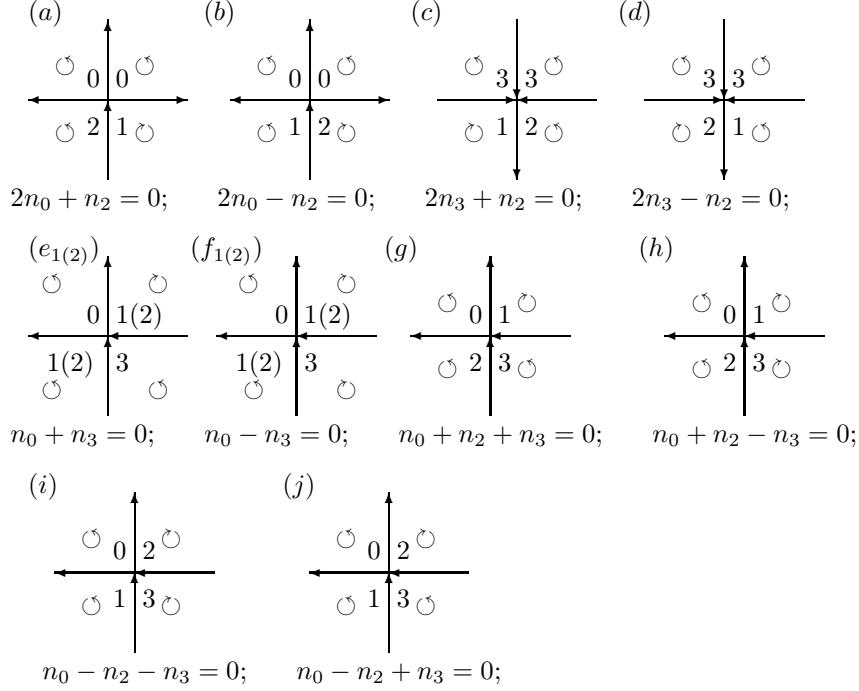


Рис. 3

Если в каждом из четырех углов, примыкающих к вершине  $x$ , не стоит 0, то возможны лишь случаи (c) и (d). Если же в некотором из этих углов стоит 0, то мы получаем один из остальных случаев, изображенных на рисунке 3. В случаях  $(f_{1(2)})$  и  $(e_{1(2)})$  на одном рисунке изображаются две различные возможности разметки углов примыкающих клеток.

В случае (i) на рисунке 3 числа  $n_0, n_2, n_3$  удовлетворяют уравнению (0), и этот случай уже разобран. Докажем, что в остальных случаях на рисунке 3 в карте  $\bar{N}$  найдется внутренняя вершина, дающая уравнение, непропорциональное уравнению для точки  $x$ . Из-за идеальной простоты и технической сложности такой проверки ограничимся лишь примером. Пусть  $x$  – такая внутренняя вершина карты  $\bar{N}$ , что  $dist(x, \partial\bar{N}) \geq 2$  и для нее выполняется случай (a), в котором  $2n_0 + n_2 = 0$ . Тогда подкарта, состоящая из четырех клеток, примыкающих к вершине  $x$ , имеет следующий вид (с точностью до отражения и поворота).

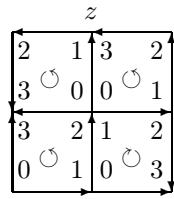


Рис. 4

Видно, что в одном из углов, примыкающих к вершине  $z$ , стоит число 3, поэтому для вершины  $z$  не выполняется случай (а) (для  $z$  выполняется один из случаев (d), (h), (j), (e<sub>1</sub>), (f<sub>1</sub>)). Таким образом, вершина  $z$  дает еще одно уравнение непропорциональное уравнению, возникающему для вершины  $x$ . Непосредственно проверяется, что система из этих двух уравнений эквивалентна одной из систем (1 – 9). Например, если для вершины  $z$  выполняется случай (h), то возникает система уравнений

$$\begin{cases} 2n_0 + n_2 = 0, \\ n_0 + n_2 - n_3 = 0, \end{cases}$$

эквивалентная системе (1).

Аналогично показывается, что если  $x$  – такая внутренняя вершина подкарты  $\bar{N}$ , что  $dist(x, \partial\bar{N}) \geq 2$  и для нее выполняется один из случаев (b) – (j), кроме случая (i) (т.е. уравнение для вершины  $x$  не совпадает с (0) – этот случай уже разобран, поэтому его можно не рассматривать), то числа  $n_0, n_2, n_3$  удовлетворяют одной из систем (1-9). Следовательно, в случае (10) радиус любой регулярной подкарты в  $\bar{N}$  не превосходит 1. Поэтому, в силу теоремы 2.1, в случае системы (10) группа  $G$  является гиперболической.

Теперь мы рассмотрим случаи (2)–(9) и в каждом из них будем пытаться строить регулярную (4,4)-карту максимального радиуса, начиная с некоторой **стартовой карты**, состоящей из четырех примыкающих друг к другу клеток, и присоединяя к ней новые клетки по **правилу змейки** (см. ниже). В процессе присоединения клеток будут возникать новые внутренние вершины, дающие уравнения на  $n_0, n_2, n_3$ . В итоге мы докажем, что на некотором шаге возникнет такое уравнение, которое вместе с исходными приведет к равенствам  $n_0 = n_2 = n_3 = 0$ , что противоречит условию. Таким образом, мы покажем, что регулярные карты “большого” радиуса построить невозможно. Тогда из теоремы 2.1 будет следовать, что группа  $G$  является гиперболической.

**Стартовая карта.** Для данной системы (2)–(9) в качестве стартовой карты будем брать последовательно те карты (а)– (j) (кроме, как уже говорилось, карты (i)), под которыми написаны уравнения, являющиеся следствиями данной системы. Если взять карту, под которой написано уравнение, не являющееся следствием данной системы, то это уравнение вместе с данной системой приведет к равенствам  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ . Например, в случае системы (2) следствиями будут уравнения

$$2n_0 + n_2 = 0,$$

$$2n_3 + n_2 = 0,$$

$$n_0 - n_3 = 0,$$

$$n_0 + n_2 + n_3 = 0.$$

Первому из уравнений соответствует тип стартовой карты (а), второму – (c), третьему – (f<sub>1</sub>) и (f<sub>2</sub>), четвертому – (g).

Итак, всего имеется пять возможностей при выборе стартовой карты.

**Правило змейки.** При построении карты мы будем присоединять клетки либо по одной, либо по две (блоком) сразу, так, чтобы одна из вершин, принадлежащая на предыдущем шаге границе карты, после присоединения была бы внутренней вершиной расширенной карты. Процесс построения новых внутренних вершин описывается следующей “змейкой”:

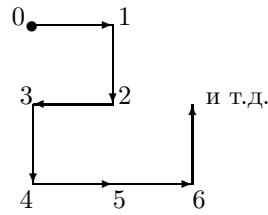


Рис. 5

Первые три шага построения карты иллюстрируются следующим рисунком (присоединяемые на данном шаге клетки заштрихованы).

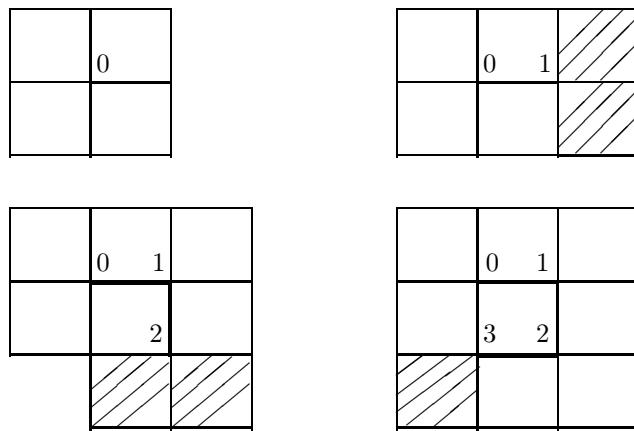


Рис.6

Далее приводится графический разбор случаев (2-9). Для того чтобы понимать, как ниже конструируются  $(4,4)$ -карты, нужно помнить о редуцированности исходных диаграмм. Редуцированность влечет отсутствие таких, например, фрагментов как **A** и **B**.

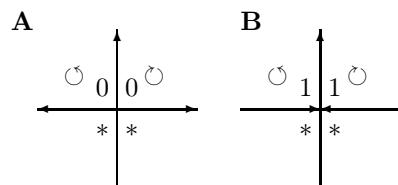


Рис. 7

При разборе каждого случая (2-9) выписываются уравнения самой системы и те из уравнений  $(a)-(j)$ , которые являются ее следствиями (кроме уравнения  $(i)$ ). Рядом с уравнением пишется соответствующий ему тип внутренней вершины  $((a)-(j))$ . Каждый отдельный рисунок описывает процесс построения карты “змейкой”, звенья которой показывают в каком направлении в данный момент расширяется карта. Ориентации ребер на изображениях карт не указаны, но легко восстанавливаются.

Над строящейся картой указывается тип стартовой карты  $((a)-(j))$ , которому она соответствует. Знак “.” ставится вместо не особо интересующих нас меток углов, пусть даже они определены. Знак “?”, стоящий вместо метки какого-либо угла, означает, что вершина этого угла не может быть внутренней вершиной, дающей одно из следствий рассматриваемой системы. Следовательно, данная карта является ограниченной регулярной (4,4)-картой.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Случай (2)} \\ 2n_0 + n_2 = 0 & (a) \\ 2n_3 + n_2 = 0 & (c) \\ n_3 - n_0 = 0 & (f) \\ n_0 + n_2 + n_3 = 0 & (g) \end{array} \right.$$

(a)			
2	1	3	2
3	0	0	1
3	2	1	2
0	1	0	3
0	3	1	2
1	2	0	3
0	3	2	3
.	.	.	.

(c)			
1	0	2	1
2	3	3	0
0	1	2	1
3	2	3	0
2	1	3	2
3	0	0	1
3	2	1	2
.	.	.	.

Пояснение к подслучаю (a). Учитывая ориентации ребер, входящих в вершину, один из углов при которой помечен ?, видим, что на месте ? можно поставить только 1, что приведет к добавлению уравнения  $2n_3 - n_2 = 0$ , которое вместе с системой (2) приводит к тому, что  $n_0 = n_2 = n_3 = 0$ , поэтому вершина с номером 5 змейки не может быть внутренней. Следовательно вся карта в этом случае ограничена.

(f <sub>1</sub> )			
2	1	2	3
3	0	1	0
2	1	3	0
3	0	2	1
.	?	1	0
.	.	.	.

(f<sub>2</sub>)

2	1	3	0	2	.
3	0	2	1	3	.
3	2	3	0	1	.
0	1	2	1	2	.
.	?	1	0	0	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

(g)

2	1	2	3	3	.
3	0	1	0	2	.
3	2	3	2	3	.
0	1	0	1	0	.
.	?	2	3	1	.
.	.	.	.	.	.

Случай (3)

$$\begin{cases} 2n_0 + n_2 = 0 & (a) \\ n_0 - n_2 + n_3 = 0 & (j) \end{cases}$$

(a)

2	1	3	2	1	.
3	0	0	1	0	.
3	2	1	2	0	.
0	1	0	3	3	.
.	.	.	?	?	.
.	.	.	.	.	.

(j)

2	1	3	0	.	.
3	0	2	1	?	.
2	1	3	2	?	.
3	0	0	1	.	.

Случай (4)

$$\begin{cases} 2n_0 - n_2 = 0 & (b) \\ 2n_3 - n_2 = 0 & (d) \\ n_3 - n_0 = 0 & (f) \\ n_0 - n_2 + n_3 = 0 & (j) \end{cases}$$

(d)

1	0	2	1	3	.	.	.
2	3	3	0	2	.	.	.
1	2	1	0	1	.	.	.
0	3	2	3	2	.	.	.
2	3	1	2	0	.	.	.
1	0	0	3	3	.	.	.
3	2	1	2	?	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

(f<sub>1</sub>)

2	1	2	3	2	.	.	.
3	0	1	0	1	.	.	.
2	1	3	0	2	.	.	.
3	0	2	1	3	.	.	.
3	2	3	0	1	.	.	.
0	1	2	1	2	.	.	.
0	3	3	2	?	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

(b)

2	1	3	2	3	.
3	0	0	1	0	.
2	1	2	3	1	.
3	0	1	0	0	.
.	?	3	2	1	.
.	.	.	.	.	.

(f<sub>2</sub>)

1	0	1	0	0	.
2	3	2	3	1	.
1	2	0	1	0	.
0	3	3	2	3	.
.	?	1	0	2	.
.	.	.	.	.	.

(j)

1	2	1	0	0	.
0	3	2	3	1	.
0	1	0	1	0	.
3	2	3	2	3	.
.	?	1	0	2	.
.	.	.	.	.	.

Случай (5)			
$\begin{cases} 2n_0 - n_2 = 0 & (b) \\ n_0 + n_2 + n_3 = 0 & (g) \end{cases}$			
(b)		(g)	
2 1   3 2   1 .		1 2   0 3   1 .	
3 0   0 1   0 .		0 3   1 2   0 .	
2 1   2 3   2 .		1 2   0 1   0 .	
3 0   1 0   1 .		0 3   3 2   3 .	
. ?   3 0   2 1		. ?   3 0   1 0	
. .   2 1   3 0		. .   2 1   2 3	

Случай (6)			
$\begin{cases} 2n_0 - n_2 = 0 & (b) \\ n_0 + n_2 - n_3 = 0 & (h) \end{cases}$			
(b)		(h)	
2 1   3 2   . .		2 1   2 3   2 .	
3 0   0 1   ? .		3 0   1 0   1 .	
2 1   2 3   ? .		3 2   3 0   2 .	
3 0   1 0   . .		0 1   2 1   3 .	
		. .   . ?   ? .	
		. .   . .   . .	

Случай (7)			
$\begin{cases} 2n_3 + n_2 = 0 & (c) \\ n_0 - n_2 + n_3 = 0 & (j) \end{cases}$			
(c)		(j)	
1 0   2 1   3 .		2 1   3 0   2 .	
2 3   3 0   2 .		3 0   2 1   3 .	
0 1   2 1   3 .		2 1   3 2   3 .	
3 2   3 0   0 .		3 0   0 1   0 .	
. .   . ?   ? .		. ?   0 3   2 3	
. .   . .   . .		. .   . .   1 0	

Случай (8)			
$\begin{cases} 2n_3 + n_2 = 0 & (c) \\ n_0 + n_2 - n_3 = 0 & (h) \end{cases}$			
(c)		(h)	
1 0   2 1   . .		2 1   2 3   . .	
2 3   3 0   ? .		3 0   1 0   ? .	
0 1   2 1   ? .		3 2   3 0   ? .	
3 2   3 0   . .		0 1   2 1   . .	

$$\begin{array}{c}
 \text{Случай (9)} \\
 \left\{ \begin{array}{ll} 2n_3 - n_2 = 0 & (d) \\ n_0 + n_2 + n_3 = 0 & (g) \end{array} \right. \\
 (d) \quad (g) \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \ldots \quad \ldots
 \end{array}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.V. Ivanov and P.E. Shupp, *On the hyperbolicity of small cancellation groups and one-relator groups*, TAMS, v. 350, n. 5, (1998), 1851-1894.
- [2] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп*, М: Наука, 1974.
- [3] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in Essays in Group Theory, ed. S.M. Gersten, M.S.R.I. Publ. 8, Springer, 1987, 75-263.
- [4] Р. Линдон, П. Шупп *Комбинаторная теория групп*. М.: Мир, 1980.
- [5] H. Servatius, *Automorphisms of graph groups*.
- [6] O. Bogopolski, A. Martino, E. Ventura, *The automorphism group of a free-by-cyclic group in rank 2*, preprint Nr.640, Centre de Reserca Matematica, Bellaterra, July 2005. Available at <http://www.crm.es> .

Бускин Николай Владиславович  
 Новосибирский государственный университет  
 630090, Новосибирск, Россия  
*E-mail address:* buskin1983@mail.ru