S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 64–84 (2007) УДК 512.55
MSC 13C99

Q-ИДЕАЛЫ В КОЛЬЦАХ МНОГОЧЛЕНОВ И Q-МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ МНОГОЧЛЕНОВ

Э. Ю. ДАНИЯРОВА

Abstract. In this paper we introduce the new categories of ideals in commutative rings of polynomials and of modules over rings of polynomials. This material proposes the definitions of linear ideal, Q-ideal of ring of commutative polynomials over a field, Q-radical, linear homomorphism between rings of polynomials and investigates the features of such objects. We cast the definition of Q-module over a ring of polynomials and examine the structure of such modules. In particular, it is developed the theory of primary decomposition of Q-modules. Also we prove that arbitrary Q-module can be decomposed in direct sum of torsion-free modules.

Содержание

Daniyarova E.Yu., The Q-ideals in polynomial rings and the Q-modules over polynomial rings.

Работа поддержана научной программой "Университеты России"(ур.04.01.231).

Поступила 14 февраля 2006 г., опубликована 15 марта 2007 г.

Введение

Данная работа написана в рамках проекта по созданию алгебраической геометрии над метабелевыми алгебрами Ли (см. [1, 2, 3, 4, 5]). Как известно, основной задачей алгебраической геометрии над фиксированной алгебраической системой $\mathcal{A}$ является классификация алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ и соответствующих им координатных алгебр. Оказалось, что задача описания и классификации координатных алгебр над свободной метабелевой алгеброй Ли F над полем k требует глубокого погружения в теорию коммутативной алгебры колец многочленов над полем k и модулей над кольцами многочленов. Приходится использовать не только известные методы коммутативной алгебры, а также создавать новые. С этой целью и была написана данная работа, в которой мы вводим две новые категории: категорию Q-идеалов в кольцах многочленов и категорию Q-модулей над кольцами многочленов. Несмотря на то, что работа носит вспомогательный характер для решения проблем описания алгебраических множеств и координатных алгебр над алгеброй F, полученные здесь результаты можно рассматривать, как независимый законченный материал. Включенные в работу результаты ранее были изложены в препринте [4] в виде дополнительной главы и частично в препринте [5].

Работа состоит из двух параграфов: Q-идеалы и Q-модули. Объектом исследования первого параграфа являются коммутативные кольца многочленов над полем k и некоторые специальные идеалы в них. В разделах 1.1 и 1.2 мы вводим определения линейного идеала и Q-идеала, как конечного пересечения линейных идеалов, а также определяем понятие Q-радикала произвольного подмножества кольца многочленов. Далее, в разделе 1.3 мы приводим определение линейного гомоморфизма колец многочленов и исследуем действие линейных гомоморфизмов на линейных идеалах и Q-идеалах (предложение 1.4). Используемые нами обозначения стандартны: если R – это кольцо многочленов над полем k и X – произвольное подмножество кольца R, то через $\mathrm{lin}_k\{X\}$ мы обозначаем k-линейную оболочку множества X в R, а через $\mathrm{id}\langle X\rangle$ – идеал, порождённый множеством X в R.

Второй параграф построен на изучении структуры так называемых Q-модулей, определение которых дано в разделе 2.1. На протяжении этого раздела мы рассматриваем различные примеры Q-модулей, их свойства и способы построения новых Q-модулей из уже имеющихся (предложение 2.6). В следующем разделе 2.2 построена теория примарного разложения в категории Q-модулей по аналогии с классической теорией примарного разложения в нётеровых модулях. В том числе, доказана теорема 2.13 о том, что произвольный Q-модуль вкладывается в прямую сумму модулей без кручения. Разделы 2.3 и 2.4 посвящены более детальному изучению структуры специальных Q-модулей, так называемых изолированных и вырожденных Q-модулей.

Выбор приставки “Q” во введённых нами определениях обосновывается применением новых понятий к описанию метабелевых алгебр из квазимногообразия $\mathrm{qvar}(F)$, порождённого алгеброй F. Используемую в работе терминологию и общие сведения из коммутативной алгебры можно найти, например, в [6, 7].

1. Q-идеалы

Пусть $R = k[x_1, x_2, \dots, x_r]$ – кольцо многочленов от r переменных над полем k. Через V обозначим линейное пространство над полем k с базисом $\{x_1, \dots, x_r\}$:

$$V = \mathrm{lin}_k\{x_1, x_2, \dots, x_r\}.$$

Иногда будем говорить, что V – *пространство переменных* кольца R.

1.1. **Линейные идеалы.**

Определение. Идеал кольца многочленов R будем называть *линейным*, если он порождается некоторым линейным подпространством пространства V. По определению, нулевой идеал также является линейным.

Пример 1. Опишем линейные идеалы в кольцах многочленов от одной, двух и трёх переменных:

(1) В кольце многочленов $k[x]$ от одной переменной x существует только два линейных идеала: нулевой и максимальный – $\mathrm{id}\langle x\rangle$;
(2) В кольце многочленов от двух переменных $k[x_1, x_2]$ нетривиальными линейными идеалами являются максимальный идеал $\mathrm{id}\langle x_1, x_2\rangle$ и идеалы вида $\mathrm{id}\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\rangle$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in k$;
(3) Линейные идеалы кольца многочленов $k[x_1, x_2, x_3]$ от трёх переменных:

$$\mathrm{id}\langle x_1, x_2, x_3\rangle, \quad \mathrm{id}\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\rangle,$$

$$\mathrm{id}\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3\rangle, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in k.$$

В кольце многочленов R всегда существует максимальный линейный идеал, содержащий в себе все остальные линейные идеалы; обозначим его через Δ:

$$\Delta \;=\; \mathrm{id}\ \langle x_1, x_2, \dots, x_r\rangle.$$

Идеал Δ в точности состоит из всех многочленов с нулевыми свободными членами.

Линейные идеалы кольца многочленов R находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными подпространствами пространства V, следовательно, любой линейный идеал I из R может быть порождён не более чем r линейными однородными многочленами. В случае, если поле k конечно, в кольце R существует лишь конечное число различных линейных идеалов.

Определение. *Размерностью* линейного идеала I кольца R будем называть размерность $\dim_k W$ линейного подпространства W пространства V, порождающего идеал I. Соответственно, *коразмерностью* идеала I назовём коразмерность линейного подпространства W в пространстве V.

Если коразмерность линейного идеала I равна d $(0 \leqslant d \leqslant r)$, то факторкольцо R/I изоморфно кольцу многочленов от d переменных. В частности, всякий линейный идеал $I \lhd R$ является простым.

Определение. Пусть I – линейный идеал кольца R, порождённый линейным подпространством W. Будем говорить, что линейное подпространство V_0 векторного пространства V является *линейным дополнением идеала* I, если $V = V_0 \oplus W$. Аналогично, V_0 – *линейное дополнение семейства линейных идеалов* $\{I_1, \dots, I_n\}$, если V_0 – линейное дополнение для каждого из идеалов I_i, $i = \overline{1, n}$.

Очевидно, что наличие общего линейного дополнения для семейства линейных идеалов $\{I_1, \ldots, I_n\}$ влечёт совпадение коразмерностей и размерностей этих идеалов.

Определение. Пусть I и J – идеалы кольца R. Будем говорить, что *идеал I изолирован от идеала J*, если $J \not\subseteq I$.

Ясно, что любые различные линейные идеалы I и J кольца R равной размерности изолированы друг от друга. В дальнейших приложениях особый интерес для нас будут представлять семейства $\{I_1, \ldots, I_n\}$ попарно изолированных друг от друга линейных идеалов кольца R. Одним из достаточных признаков попарной изолированности идеалов $I_1, \ldots, I_n$ является наличие у них общего линейного дополнения.

Лемма 1.1. *Пусть W_1 и W_2 – линейные подпространства пространства V, такие, что $W_1 \cap W_2 = 0$. И пусть I_i – линейный идеал кольца R, порождённый подпространством W_i, а K_i – подкольцо (с единицей) кольца R, порождённое подпространством W_i, $i = 1, 2$. Тогда*

$$I_1 \cap I_2 = I_1 \cdot I_2, \quad K_1 \cap I_2 = 0, \quad I_1 \cap K_2 = 0.$$

Доказательство. Так как $W_1 \cap W_2 = 0$, то объединение базисов пространств W_1 и W_2 образует линейно независимую систему, которая дополняется до базиса пространства V. Следовательно, можно считать, что многочлены из подколец K_1 и K_2 зависят от непересекающихся наборов переменных X_1 и X_2. Условие $f \in I_i$ означает, что в каждом одночлене многочлена f есть переменная из X_i, $i = 1, 2$. Отсюда получаем справедливость трёх требуемых равенств. □

1.2. **Q-идеалы и Q-радикалы.**

Определение. Пересечение конечного числа линейных идеалов кольца многочленов R будем называть *Q-идеалом.*

Ясно, что любой линейный идеал является Q-идеалом, а Q-идеал является линейным тогда и только тогда, когда он прост. В кольце многочленов от одной переменной понятия линейных идеалов и Q-идеалов совпадают. Заметим, что любой Q-идеал содержится в максимальном линейном идеале Δ.

Определение. Пусть $S \subseteq R$ – подмножество кольца многочленов R. Пересечение всех линейных идеалов $p \lhd R$, содержащих S, будем называть *Q-радикалом* множества S и обозначать через $\mathrm{Rad}_\mathrm{Q}(S)$:

$$\mathrm{Rad}_\mathrm{Q}(S) = \bigcap_{S \subseteq p} p, \qquad p \lhd R \quad - \quad \text{линейный идеал.}$$

Если $S \not\subseteq \Delta$, то не существует линейных идеалов, содержащих S. В этом случае будем полагать, что $\mathrm{Rad}_\mathrm{Q}(S) = R$.

Замечание. Если основное поле k конечно, то в кольце R существует лишь конечное число линейных идеалов, поэтому Q-радикал любого множества является Q-идеалом или совпадает с кольцом R. Для случая бесконечного поля существуют примеры, когда бесконечное пересечение линейных идеалов не сводится к конечному. Если k – поле вещественных чисел, то подобные примеры можно построить с помощью гиперповерхностей, распадающихся на прямые: конус, однополостной гиперболоид, гиперболический параболоид.

Пример 2. Пусть k – это поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Обозначим через R кольцо многочленов $k[x,y,z]$ от трёх переменных x,y,z. Пусть $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ – многочлен и $I = \mathrm{id}\langle x^2+y^2-z^2\rangle$. Многочлен f неприводим над полем $\mathbb{R}$, следовательно, главный идеал I прост. Известно, что уравнение $f(x,y,z) = 0$ определяет в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ конус. Конус – это гиперповерхность, распадающаяся на прямые:

$$\begin{cases} y = \alpha x \\ z = \sqrt{1+\alpha^2}\,x \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \alpha x \\ z = -\sqrt{1+\alpha^2}\,x \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через p_α линейный идеал кольца R, порождённый многочленами $y-\alpha x$ и $z-\sqrt{1+\alpha^2}\,x$, $\alpha \in \mathbb{R}$; через q_α – линейный идеал, порождённый многочленами $y-\alpha x$ и $z+\sqrt{1+\alpha^2}\,x$, $\alpha \in \mathbb{R}$; через p – линейный идеал, порождённый многочленами x и $y-z$; через q – линейный идеал, порождённый многочленами x и $y+z$. И пусть P – семейство всех идеалов p, q, p_α, q_α, $\alpha \in \mathbb{R}$. Кроме идеалов семейства P и максимального идеала $\mathrm{id}\langle x,y,z\rangle$, не существует линейных идеалов, содержащих I (см. пример 1), следовательно, справедливо равенство:

$$\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(I) \quad = \quad p \cap q \cap \bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} p_\alpha \cap q_\alpha.$$

Идеалы семейства P попарно различны, попарно изолированы друг от друга и линейны. Ясно, что пересечение бесконечного числа любых идеалов из P не может быть Q-идеалом. В частности, $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(I)$ не является Q-идеалом. Кроме того, можно показать, что $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(I) = I$ и любое пересечение бесконечного числа идеалов из P совпадает с I.

Мы вводим следующее определение полупростого идеала естественным образом. Это понятие соответствует терминологии сайта mathworld.wolfram.com (http://mathworld.wolfram.com/SemiprimeIdeal.html), однако соответствующее определение в классической литературе по коммутативной алгебре нам найти не удалось.

Определение. Идеал I кольца R будем называть *полупростым*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(1) Идеал I равен пересечению конечного числа простых идеалов кольца R;
(2) Факторкольцо $R\,/\,I$ полупросто, то есть в нём нет ненулевых нильпотентных элементов.

Лемма 1.2. *Условия 1 и 2 из определения выше эквивалентны.*

Доказательство. Пусть I – идеал кольца R, такой, что факторкольцо $R\,/\,I$ полупросто. Согласно теории примарного разложения идеалов в кольце многочленов R, найдутся такие примарные идеалы $q_1,\dots,q_m$ и натуральные числа $n_1,\dots,n_m$, что

$$I = q_1 \cap \ldots \cap q_m, \qquad p_i^{n_i} \subseteq q_i \subseteq p_i, \quad i = 1,\dots,m,$$

где p_i – простой идеал, ассоциированный с q_i, $i = 1,\dots,m$. Обозначим через J пересечение $p_1 \cap \ldots \cap p_m$ и покажем, что $I = J$. Включение $I \subseteq J$ очевидно. Пусть $f \in J$. Тогда $f^n \in I$, где $n = \max\{n_1,\dots,n_m\}$. Так как кольцо $R\,/\,I$ полупросто, то $f \in I$. Следовательно, $I = J$.

Пусть теперь $p_1, \ldots, p_m$ – произвольные простые идеалы и $J = p_1 \cap \ldots \cap p_m$. Покажем, что кольцо $R \,/\, J$ полупросто. Пусть $f^n \in J$, тогда $f^n \in p_i$ для любого $i = \overline{1, m}$, то есть $f \in p_i$ и $f \in J$. □

Следствие 1.1. *Любой Q-идеал полупрост.*

Представление $J = p_1 \cap \ldots \cap p_m$ полупростого идеала J в виде пересечения простых идеалов $p_1, \ldots, p_m$ называется *несократимым*, если J нельзя представить в виде пересечения собственного подсемейства семейства идеалов $\{p_1, \ldots, p_m\}$.

1.3. **Линейные гомоморфизмы.** До этого момента речь шла об идеалах в фиксированном кольце многочленов R. Далее нас интересует вопрос: что происходит с линейными идеалами и Q-идеалами при гомоморфизме колец? В действительности речь пойдёт не о всех гомоморфизмах, а только о линейных.

Пусть $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ и $R' = k[x'_1, \ldots, x'_s]$ – кольца многочленов над полем k. Напомним, что гомоморфизм колец $\varphi : R \to R'$ называется *линейным*, если φ – однородный гомоморфизм k-алгебр (то есть φ – гомоморфизм k-алгебр и для всех $i = \overline{1, r}$ образ $\varphi(x_i)$ есть однородный линейный многочлен от переменных $x'_1, \ldots, x'_s$). Также говорят о линейных вложениях, эпиморфизмах и изоморфизмах колец многочленов.

Обозначим через $V = \mathrm{lin}_k\{x_1, \ldots, x_r\}$ и $V' = \mathrm{lin}_k\{x'_1, \ldots, x'_s\}$ пространства переменных колец R и R' соответственно. Пусть $\dot{\varphi}$ – ограничение линейного гомоморфизма $\varphi : R \to R'$ на подпространстве V. Тогда $\dot{\varphi} : V \to V'$ – линейное отображение векторных пространств. С другой стороны, если $\dot{\varphi} : V \to V'$ – какое-то линейное отображение векторного пространства V в векторное пространство V', то по нему однозначно восстанавливается линейный гомоморфизм $\varphi : R \to R'$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1.3. *Линейные гомоморфизмы $\varphi : R \to R'$ находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными отображениями векторных пространств $\dot{\varphi} : V \to V'$. Ядро линейного гомоморфизма φ является линейным идеалом:* $\ker \varphi = \mathrm{id}\langle \ker \dot{\varphi} \rangle$. *Кроме того, отображения φ и $\dot{\varphi}$ являются инъективными, сюръективными или взаимно однозначными одновременно.*

Оказывается, что при линейном гомоморфизме образы и прообразы линейных идеалов (соответственно Q-идеалов) являются вновь линейными идеалами (соответственно Q-идеалами), что и будет доказано в следующем предложении.

Предложение 1.4. *Пусть $\varphi : R \to R'$ – линейный гомоморфизм, а I и I' – какие-то идеалы колец R и R' соответственно. И пусть* $\mathrm{id}\langle \varphi(I) \rangle$ *– идеал кольца R', порождённый образом идеала I под действием φ, а $\varphi^{-1}(I')$ – идеал кольца R, равный полному прообразу идеала I' при действии φ. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *если I – линейный идеал, то и* $\mathrm{id}\langle \varphi(I) \rangle$ *– линейный идеал;*
(2) *если I – Q-идеал, а φ – линейное вложение, то и* $\mathrm{id}\langle \varphi(I) \rangle$ *– Q-идеал;*
(3) *если I' – линейный идеал, то и $\varphi^{-1}(I')$ – линейный идеал;*
(4) *если I' – Q-идеал, то и $\varphi^{-1}(I')$ – Q-идеал;*

(5) *если I' – нелинейный Q-идеал, а φ – линейный эпиморфизм, то $\varphi^{-1}(I')$ – также нелинейный Q-идеал.*

Доказательство. Пусть I – линейный идеал кольца R, порождённый линейными однородными многочленами $l_1, \dots, l_n$. Так как φ – линейный гомоморфизм, то образы $\varphi(l_1), \dots, \varphi(l_n)$ являются линейными однородными многочленами кольца R'. Идеал $\mathrm{id}\langle\varphi(I)\rangle$ порождается многочленами $\varphi(l_1), \dots, \varphi(l_n)$, поэтому является линейным, что доказывает пункт 1 предложения.

Допустим, что I – Q-идеал и φ – линейное вложение. Запишем I в виде пересечения линейных идеалов: $I = \bigcap\limits_{i=1}^{m} p_i$. Нетрудно проверяется, что в этом случае справедливы следующие равенства:

$$\varphi(I) = \bigcap_{i=1}^{m} \varphi(p_i), \quad \mathrm{id}\langle\varphi(I)\rangle = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{id}\langle\varphi(p_i)\rangle.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{id}\langle\varphi(I)\rangle$ является Q-идеалом, и пункт 2 доказан.

Заметим, что из справедливости пункта 3 предложения и из общего свойства функций "прообраз пересечения равен пересечению прообразов" следует пункт 4. Доказательство пункта 5 основывается на том, что при сюръективном гомоморфизме переход к прообразу сохраняет свойство идеала "быть или не быть простым идеалом". Следовательно, идеалы I' и $\varphi^{-1}(I')$ просты или непросты одновременно.

Перейдём к доказательству пункта 3. Предположим, что p' – линейный идеал кольца R', порождённый линейным подпространством L' пространства V'. Введём следующие обозначения: $L = \dot{\varphi}^{-1}(L')$ – подпространство пространства V и $p = \mathrm{id}\langle L\rangle$ – линейный идеал кольца R. Заметим, что $\ker\dot{\varphi} \subseteq L$ и $\ker\varphi \subseteq p$. Необходимо показать, что $\varphi^{-1}(p')$ – линейный идеал. Для этого проверим равенство $\varphi^{-1}(p') = p$. В одну сторону очевидно: $p \subseteq \varphi^{-1}(p')$. Докажем обратное включение.

Обозначим через W линейное дополнение идеала p (то есть имеем разложение в прямую сумму $V = W \oplus L$) и пусть $W' = \dot{\varphi}(W)$. Тогда $W' \cap L' = 0$. Введём обозначения K и K' для подколец в кольцах R и R', порождённых множествами W и W' соответственно. Из леммы 1.1 следует, что $K \cap p = 0$ и $K' \cap p' = 0$.

Проверим включение $p \supseteq \varphi^{-1}(p')$. Пусть $f \in R$ и $\varphi(f) \in p'$. Многочлен f однозначно представим в виде суммы $f = f_p + f_K$, где $f_p \in p$ и $f_K \in K$. При этом $\varphi(f) = \varphi(f_p) + \varphi(f_K)$, где $\varphi(f_p) \in p'$ и $\varphi(f_K) \in K'$. Так как $\varphi(f) \in p'$, то $\varphi(f_K) \in p'$, следовательно, $\varphi(f_K) \in p' \cap K'$, то есть $\varphi(f_K) = 0$. Так как $\ker\varphi \subseteq p$, то $f_K \in p$, в частности, $f_K \in p \cap K$. Отсюда получаем, что $f_K = 0$ и $f = f_p \in p$. □

Пример 3. В пункте 2 выше условие инъективности гомоморфизма φ существенно. Например, если $R = k[x_1, x_2]$, $R' = k[x]$ и $\varphi(x_1) = x$, $\varphi(x_2) = 0$, то образ Q-идеала $I = \mathrm{id}\langle x_1\rangle \cap \mathrm{id}\langle x_1 + x_2\rangle$ равен идеалу $\varphi(I) = \mathrm{id}\langle x^2\rangle$, который не является Q-идеалом.

Пример 4. Аналогично в пункте 5 существенно, что гомоморфизм φ сюръективен. В противном случае, можно взять $R = k[x]$, $R' = k[x_1, x_2, x_3]$ и $\varphi(x) = x_1$. Тогда прообразом нелинейного Q-идеала $I' = \mathrm{id}\langle x_1, x_2\rangle \cap \mathrm{id}\langle x_1, x_3\rangle$ является линейный идеал $\mathrm{id}\langle x\rangle$.

Лемма 1.5. *Пусть* $\varphi : R \to R'$ *– линейный гомоморфизм, а* Δ *и* Δ' *– максимальные линейные идеалы колец* R *и* R' *соответственно. Тогда* $\varphi^{-1}(\Delta') = \Delta$.

Доказательство. По определению линейного гомоморфизма, $\varphi(\Delta) \subseteq \Delta'$. С другой стороны, если свободный член многочлена $f \in R$ не равен нулю, то $\varphi(f) \notin \Delta'$. Следовательно, $\varphi^{-1}(\Delta') = \Delta$. □

2. Q-модули

Пусть M – правый модуль над кольцом многочленов $R = k[x_1, \ldots, x_r]$. Всюду в этом параграфе по умолчанию будем предполагать, что M – ненулевой конечно порождённый модуль.

Напомним, что *аннулятором* произвольного элемента $y \in M$ называется следующий идеал кольца R: $\mathrm{Ann}(y) = \{f \in R \,|\, y \cdot f = 0\}$. *Аннулятором* модуля M называется пересечение аннуляторов всех его элементов: $\mathrm{Ann}(M) = \{f \in R \,|\, y \cdot f = 0 \ \forall\, y \in M\}$. *Ассоциатор* $\mathrm{Ass}(M)$ модуля M – это множество всех тех аннуляторов $\mathrm{Ann}(y)$, $y \in M$, которые являются простыми идеалами. Идеал ассоциатора $p \in \mathrm{Ass}(M)$ называется *изолированным*, если он не содержит в себе никакого другого идеала из $\mathrm{Ass}(M)$.

Иногда, чтобы выделить кольцо R, относительно которого вычисляются аннуляторы и ассоциаторы, будем писать $\mathrm{Ann}_R(y)$, $\mathrm{Ann}_R(M)$ и $\mathrm{Ass}_R(M)$.

Кольцо многочленов R – это частный случай нётерова кольца. Ассоциатор $\mathrm{Ass}(M)$ ненулевого модуля M над нётеровым кольцом всегда непуст. Конечно порождённый модуль над нётеровым кольцом – частный случай нётерового модуля. Ассоциатор нётерова модуля всегда конечен.

Мы не сомневаемся, что утверждение следующей леммы – результат известный.

Лемма 2.1. *Пусть* M *– модуль над кольцом* R *и* $y \in M$ *– ненулевой элемент. Если аннулятор* $\mathrm{Ann}(y)$ *является полупростым идеалом и* $\mathrm{Ann}(y) = p_1 \cap \ldots \cap p_m$ *– его несократимое представление в виде пересечения простых идеалов* $p_1, \ldots, p_m$ *кольца* R*, то* $p_1, \ldots, p_m \in \mathrm{Ass}(M)$.

Доказательство. Так как по условию представление $\mathrm{Ann}(y) = p_1 \cap \ldots \cap p_m$ несократимо, то идеалы $p_1, \ldots, p_m$ попарно изолированы друг от друга, следовательно, для каждого индекса $i = \overline{1, m}$ найдётся такой многочлен s_i, что $s_i \in \bigcap\limits_{j \neq i} p_j$ и $s_i \notin p_i$. Тогда $y \cdot s_i \neq 0$ и $\mathrm{Ann}(y \cdot s_i) = p_i$, следовательно, $p_i \in \mathrm{Ass}(M)$, $i = \overline{1, m}$. □

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathrm{Ann}(y)$ *– полупростой идеал кольца* R*,* $y \in M$*. Тогда существует многочлен* $s \in R$*, такой, что* $y \cdot s \neq 0$ *и аннулятор* $\mathrm{Ann}(y \cdot s)$ *лежит в ассоциаторе* $\mathrm{Ass}(M)$.

Следствие 2.2. *Если для любого ненулевого элемента* $y \in M$ *аннулятор* $\mathrm{Ann}(y)$ *есть полупростой идеал кольца* R*, то справедливо равенство:*

$$\mathrm{Ann}(M) = \bigcap_{p \in \mathrm{Ass}(M)} p\,.$$

2.1. **Определение, свойства и примеры Q-модулей.**

Определение. Конечно порождённый модуль M над кольцом многочленов R будем называть *Q-модулем*, если

(1) аннулятор любого ненулевого элемента $y \in M$ есть Q-идеал;
(2) для любого линейного идеала p кольца R верно, что

$$M\,[\,p\,]\;\cap\; M \cdot p \;=\; 0,$$

где $\quad M \cdot p =$ модуль $\langle \{y \cdot f \mid y \in M,\ f \in p\}\rangle$ $\quad$ и $\quad M\,[\,p\,] = \{y \in M \mid \mathrm{Ann}(y) \supseteq p\}$.

Если M – Q-модуль, то аннулятор любого элемента $y \in M$ является полупростым идеалом, поэтому для M справедлива лемма 2.1 и её следствия. Ассоциатор $\mathrm{Ass}(M)$ Q-модуля M состоит из линейных идеалов.

Определение. Q-модуль M будем называть *изолированным*, если каждый элемент ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ является изолированным идеалом. В этом случае также будем говорить, что идеалы ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ изолированы друг от друга.

Замечание. Непосредственно из определений следует, что любой подмодуль Q-модуля также является Q-модулем. Подмодуль изолированного Q-модуля изолирован.

Оказывается, что определение изолированного Q-модуля можно сформулировать несколько проще.

Лемма 2.2. *Пусть M – модуль над кольцом R, такой, что аннулятор любого ненулевого элемента $y \in M$ является Q-идеалом и все идеалы ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ изолированы. Тогда M – изолированный Q-модуль.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для модуля M выполнено второе условие в определении Q-модуля. Возьмём произвольный линейный идеал $p \lhd R$. Предположим, что существует ненулевой элемент $y \in M{\cdot}p \cap M[p]$. Без ограничения общности можно считать, что аннулятор $\mathrm{Ann}(y) = p_1$ – линейный идеал из ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ (см. следствие 2.1). Используя условие $y \in M{\cdot}p$, запишем:

$$y = y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_m \cdot f_m, \quad y_i \in M, \quad f_i \in p, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Так как $y \in M[p]$, верно включение $p_1 \supseteq p$. Поскольку идеал p_1 изолирован, то найдётся такой многочлен $s \in R$, что $s \notin p_1$ и s лежит во всех остальных идеалах ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$. Тогда многочлены $f_1 \cdot s, \ldots, f_m \cdot s$ лежат во всех идеалах ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ без исключения, а потому аннулируют любой элемент модуля M (см. следствие 2.2). В частности, $y \cdot s = 0$, что противоречит тому, что $\mathrm{Ann}(y) = p_1$ и $s \notin p_1$. □

В качестве следствия получаем новое, эквивалентное старому, определение изолированного Q-модуля.

Определение. Конечно порождённый модуль M над кольцом многочленов R будем называть *изолированным Q-модулем*, если

(1) аннулятор любого ненулевого элемента $y \in M$ есть Q-идеал;
(2) идеалы ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ изолированы друг от друга.

Лемма 2.3. *Пусть M – ненулевой модуль над кольцом многочленов R, ассоциатор которого состоит из одного простого идеала:* $\mathrm{Ass}(M) = \{p_1\}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *M – Q-модуль;*
(2) *M – изолированный Q-модуль;*
(3) *Аннулятор любого ненулевого элемента $y \in M$ есть Q-идеал;*
(4) *Идеал p_1 является линейным и аннулятор каждого ненулевого элемента $y \in M$ совпадает с идеалом p_1.*

Доказательство. Эквивалентность пунктов 1 и 2 очевидна. Эквивалентность пунктов 2 и 3 следует из данного выше определения изолированного Q-модуля, а пунктов 3 и 4 – из леммы 2.1. □

В теории примарного разложения модулей существует понятие *примарного подмодуля* N модуля M. Согласно этому определению, нулевой подмодуль Q-модуля M является примарным подмодулем, тогда и только тогда, когда $M \neq 0$ и ассоциатор $\mathrm{Ass}(M)$ состоит из одного единственного простого идеала. Далее в работе многократно речь будет идти о Q-модулях с такими свойствами. Чтобы не говорить всякий раз "Q-модуль, в котором нулевой подмодуль является примарным подмодулем", введём следующее определение.

Определение. Ненулевой Q-модуль M будем называть *примарным Q-модулем*, если ассоциатор $\mathrm{Ass}(M)$ состоит из одного единственного идеала: $\mathrm{Ass}(M) = \{p_1\}$. В этом случае также будем говорить, что простой идеал p_1 *ассоциирован* с модулем M.

Замечание. Как следует из леммы 2.3, любой ненулевой подмодуль N примарного Q-модуля M также является примарным Q-модулем, причём с ним ассоциирован тот же самый линейный идеал, что и с модулем M.

Частный случай примарного Q-модуля – это модуль без кручения. Ясно, что любой ненулевой модуль без кручения над кольцом многочленов R является примарным Q-модулем. В некотором смысле верно и обратное. Пусть M – примарный Q-модуль над кольцом R, и p_1 – ассоциированный с ним линейный идеал. Обозначим через R_1 факторкольцо $R\,/\,p_1$. Факторкольцо $R\,/\,p_1$ изоморфно кольцу многочленов от, возможно, меньшего числа переменных. С точностью до линейной замены переменных кольца R факторкольцо R_1 получается из кольца R откидыванием тех переменных, которые дают кручение в модуле M. Модуль M можно рассматривать как модуль над кольцом R_1, над которым он уже кручения не имеет. В дальнейшем мы будем ссылаться на следующий факт.

Факт. *Произвольный примарный Q-модуль над кольцом многочленов – это модуль без кручения над кольцом многочленов, возможно, с меньшим числом переменных.*

Обозначим через Δ максимальный линейный идеал кольца $R = k[x_1, \dots, x_r]$:

$$\Delta = \mathrm{id}\langle x_1, \dots, x_r\rangle, \qquad R\,/\,\Delta \cong k.$$

Если $R = k$, то $\Delta = 0$.

Определение. Модуль M над кольцом R будем называть *невырожденным*, если идеал Δ не входит в ассоциатор $\mathrm{Ass}(M)$, и – *вырожденным*, если $\Delta \in \mathrm{Ass}(M)$.

В частности, модуль без кручения над кольцом многочленов R невырожден тогда и только тогда, когда $R \neq k$. Очевидно, что любой подмодуль невырожденного Q-модуля является невырожденным Q-модулем.

Лемма 2.4. *Если M – изолированный Q-модуль, то возможны два взаимоисключающих случая:*

(1) *M – невырожденный модуль;*
(2) *M – примарный Q-модуль и* $\mathrm{Ass}(M) = \{\Delta\}$.

Доказательство. Действительно, если M – вырожденный изолированный Q-модуль, то $\Delta \in \mathrm{Ass}(M)$ и в ассоциатор не может входить никакой другой линейный идеал, следовательно, $\mathrm{Ass}(M) = \{\Delta\}$. □

Следствие 2.3. *Вырожденный изолированный конечно порождённый Q-модуль над кольцом R является конечно порождённым векторным пространством над полем k.*

Для построения нетривиальных примеров Q-модулей нам будет полезна процедура замены кольца $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ новым кольцом многочленов $K = k[x'_1, \ldots, x'_s]$, при которой сохраняется свойство модулей “быть Q-модулями”.

Зафиксируем некоторый линейным гомоморфизмом $\varphi : K \to R$. Предположим, что M – произвольный Q-модуль над кольцом многочленов R. Определим на M структуру модуля над кольцом K следующим образом:

$$y \cdot f' = y \cdot \varphi(f'), \quad y \in M, \quad f' \in K.$$

Пусть $\mathrm{Ass}_R(M) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Лемма 2.5. *В обозначениях выше модуль M является Q-модулем над кольцом многочленов K. Кроме того, если φ – линейный эпиморфизм, то*

(1) $\mathrm{Ass}_K(M) = \{\varphi^{-1}(p_1), \ldots, \varphi^{-1}(p_n)\}$;
(2) *Модуль M изолирован над кольцом K тогда и только тогда, когда он изолирован над кольцом R;*
(3) *Модуль M примарен над кольцом K тогда и только тогда, когда он примарен над кольцом R;*
(4) *Модуль M невырожден над кольцом K тогда и только тогда, когда он невырожден над кольцом R.*

Доказательство. Прежде всего, посчитаем аннулятор $\mathrm{Ann}_K(y)$ произвольного ненулевого элемента $y \in M$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{Ann}_K(y) = \varphi^{-1}(\mathrm{Ann}_R(y))$. По условию $\mathrm{Ann}_R(y)$ – Q-идеал кольца R, а согласно пункту 4 предложения 1.4, прообраз Q-идеала является Q-идеалом. Следовательно, $\mathrm{Ann}_K(y)$ – Q-идеал кольца K.

Теперь покажем справедливость равенства $M[p'] \cap M \cdot p' = 0$ для произвольного линейного идеала $p' \lhd K$. Пусть $p = \mathrm{id}\langle\varphi(p')\rangle$. Из пункта 1 предложения 1.4 следует, что p – линейный идеал кольца R, поэтому $M[p] \cap M{\cdot}p = 0$. Нетрудно проверить, что $M{\cdot}p' = M{\cdot}p$ и $M[p'] = M[p]$, откуда получаем требуемое.

В соответствии с пунктом 3 предложения 1.4, идеалы $\varphi^{-1}(p_1), \ldots, \varphi^{-1}(p_n)$ являются линейными, а потому они лежат в ассоциаторе $\mathrm{Ass}_K(M)$. Если же φ – линейный эпиморфизм, то других идеалов в $\mathrm{Ass}_K(M)$ нет, что следует из пункта 5 предложения 1.4. В результате получаем равенство: $\mathrm{Ass}_K(M) = \{\varphi^{-1}(p_1), \dots, \varphi^{-1}(p_n)\}$.

Сюръективность гомоморфизма φ влечет за собой то, что для любых идеалов I и J кольца R включение $I \subseteq J$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}(I) \subseteq \varphi^{-1}(J)$. В частности, идеалы ассоциатора $\mathrm{Ass}_R(M)$ изолированы друг от друга тогда и только тогда, когда изолированы друг от друга идеалы ассоциатора $\mathrm{Ass}_K(M)$. Отсюда же следует инвариантность свойства примарности для модуля M. В лемме 1.5 доказано, что $\varphi^{-1}(\Delta) = \Delta'$, где Δ' – максимальный линейный идеал кольца K. Из этого равенства следует инвариантность свойства невырожденности модуля M. □

Замечание. Если φ не является эпиморфизмом, то пункт 1, а следовательно и пункты 2, 3, 4 леммы, могут нарушаться (см. пример 4).

Перейдём к построению новых примеров Q-модулей. Пусть $M_1, \dots, M_n$ – какие-то Q-модули над кольцами многочленов $R_1, \dots, R_n$ соответственно, где $R_i = k[x_1^i, \dots, x_{r_i}^i]$, $i = \overline{1,n}$. Обозначим через M прямую сумму модулей $M_1, \dots, M_n$:

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n.$$

Поскольку, вообще говоря, кольца многочленов $R_1, \dots, R_n$ различны, то на M пока не определена структура модуля. Определить её можно многими способами, но мы ограничимся следующей общей схемой.

Зафиксируем некоторое кольцо многочленов $R = k[x_1, \dots, x_r]$ и линейные гомоморфизмы $\varphi_i : R \to R_i$, $i = \overline{1,n}$. На каждом из модулей M_i определим структуру R-модуля так, как это делалось выше. После этого на прямой сумме $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ структура R-модуля определяется стандартным образом. Согласно лемме 2.5, модули M_i являются Q-модулями над кольцом R. Ниже в предложении 2.6 мы докажем, что прямая сумма $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ – это Q-модуль над кольцом R, после чего обсудим существование и примеры построения кольца многочленов R и линейных гомоморфизмов φ_i, а также вопросы, связанные с изолированностью и невырожденностью модуля M.

Предложение 2.6. *Прямая сумма Q-модулей является Q-модулем.*

Доказательство. В обозначениях, введённых выше, покажем, что M является Q-модулем над кольцом R. Проводя доказательство, элементы $y \in M$ будем записывать в виде суммы $y = y_1 + \ldots + y_n$, где $y_i \in M_i$, $i = \overline{1,n}$.

Во-первых, посчитаем аннулятор ненулевого элемента $y \in M$. Очевидно, что $\mathrm{Ann}_R(y) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}_R(y_i)$. Следовательно, $\mathrm{Ann}_R(y)$ является Q-идеалом. Во-вторых, проверим справедливость равенства $M[p] \cap M{\cdot}p = 0$ для каждого линейного идеала $p \lhd R$. В самом деле, пусть $y \in M[p] \cap M{\cdot}p$, тогда $y_i \in M_i[p] \cap M_i \cdot p$ для всех $i = \overline{1,n}$. Так как модули M_i являются Q-модулями, то $y_i = 0$, $i = \overline{1,n}$. Следовательно, $y = 0$. □

Следствие 2.4. $\mathrm{Ass}_R(M) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}_R(M_i)$.

Следствие 2.5. *Прямая сумма модулей без кручения является Q-модулем.*

Каковы бы ни были кольца многочленов $R_1, \dots, R_n$ и модули $M_1, \dots, M_n$, на прямой сумме $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ всегда есть структура модуля над k-алгеброй

$R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$, которая определяется с помощью покоординатного умножения. Одновременно с этим на прямой сумме существует структура модуля над кольцом многочленов, "близкая к $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$-структуре". Обозначим через R_0 кольцо многочленов, зависящее от дизъюнктного объединения всех переменных колец R_i:

$$R_0 \; = \; k\,[\, x^i_j \mid j = 1, \ldots, r_i,\; i = 1, \ldots, n\,].$$

Сопутствующие линейные эпиморфизмы $\varphi_i : R_0 \to R_i$ вводятся естественным образом: $\varphi_i(x^i_j) = x^i_j$ и $\varphi_i(x^e_j) = 0$ при $e \neq i$. С помощью линейных эпиморфизмов $\varphi_1 \ldots, \varphi_n$ вышеописанным способом на прямой сумме $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ задается структура R_0-модуля. Далее, кроме этой структуры, мы будем рассматривать и следующий общий случай.

Пусть $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ – кольцо многочленов, такое, что $r \geqslant \max\{r_1, \ldots, r_n\}$, и $\varphi_i : R \to R_i$, $i = \overline{1, n}$, – линейные эпиморфизмы. Тогда соответствующая структура R-модуля на прямой сумме $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ подчиняется правилу:

$$(y_1 + \ldots + y_n) \cdot f = y_1 \cdot \varphi_1(f) + \ldots + y_n \cdot \varphi_n(f), \quad y_i \in M_i, \quad f \in R.$$

Эта формула, в частности, выражает связь между структурой $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$-модуля на прямой сумме $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ и структурой R-модуля (или R_0-модуля).

Определение. Прямую сумму $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ модулей $M_1, \ldots, M_n$ со структурой R_0-модуля будем называть *декартовой суммой*, а со структурой R-модуля – *поддекартовой суммой*. Декартова сумма является частным случаем поддекартовой суммы.

Согласно лемме 2.5, для каждого модуля M_i, $i = \overline{1, n}$, такие свойства, как примарность, невырожденность и изолированность, не зависят от кольца многочленов, над которым рассматривается модуль M_i, будь то кольцо R_i, R_0 или R.

Обозначим через Δ_0 и Δ максимальные линейные идеалы колец R_0 и R соответственно.

Лемма 2.7. *Пусть M – поддекартова сумма Q-модулей $M_1, \ldots, M_n$. Тогда Q-модуль M невырожден над кольцом R в том и только том случае, если каждый из модулей $M_1, \ldots, M_n$ невырожден.*

Доказательство. Допустим, что некоторый модуль M_i вырожден. Тогда существует такой элемент $y_i \in M_i$, что $\mathrm{Ann}_R(y_i) = \Delta$. Следовательно, $\Delta \in \mathrm{Ass}_R(M)$ и модуль M вырожден. Обратно, если модуль M вырожден, то найдётся элемент $0 \neq y \in M$, такой, что $\mathrm{Ann}_R(y) = \Delta$. Но $\mathrm{Ann}_R(y) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}_R(y_i)$, где $y = y_1 + \ldots + y_n$ ($y_i \in M_i$). Стало быть, найдётся такой индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $y_i \neq 0$ и $\mathrm{Ann}_R(y_i) = \Delta$. Следовательно, вырожден модуль M_i. $\square$

Лемма 2.8. *Пусть $M_1, \ldots, M_n$ – изолированные Q-модули и M – их декартова сумма. Тогда*

(1) *если все модули $M_1, \ldots, M_n$ невырождены, то M – изолированный Q-модуль;*
(2) *если все модули $M_1, \ldots, M_n$ вырождены, то M – примарный вырожденный Q-модуль (в частности, изолированный);*

(3) *если среди модулей $M_1, \dots, M_n$ есть как вырожденные, так и невырожденные, то M – неизолированный Q-модуль.*

Доказательство. При доказательстве леммы будем пользоваться равенством $\mathrm{Ass}_{R_0}(M) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}_{R_0}(M_i)$. По условию каждый модуль M_i изолирован, поэтому он вырожден в том и только том случае, если M_i примарен и $\mathrm{Ass}_{R_0}(M_i) = \{\Delta_0\}$ (лемма 2.4). Таким образом, если все модули $M_1, \dots, M_n$ вырождены, то M – примарный Q-модуль и $\mathrm{Ass}_{R_0}(M) = \{\Delta_0\}$.

Допустим, что модуль M_i вырожден, а модуль M_j невырожден. Тогда, с одной стороны, максимальный идеал Δ_0 лежит в ассоциаторе $\mathrm{Ass}_{R_0}(M)$, а с другой – в ассоциаторе $\mathrm{Ass}_{R_0}(M)$ есть линейный идеал $p \lhd R_0$, отличный от Δ_0. Тогда $p \subset \Delta_0$, и модуль M не является изолированным.

Теперь рассмотрим случай, когда все модули $M_1, \dots, M_n$ невырождены. Пусть p_1 и p_2 – два различных линейных идеала из ассоциатора $\mathrm{Ass}_{R_0}(M)$. Если идеалы p_1 и p_2 лежат в ассоциаторе $\mathrm{Ass}_{R_0}(M_i)$ одного и того же модуля M_i, то они заведомо изолированы друг от друга, так как изолирован модуль M_i. Предположим, что идеалы p_1 и p_2 лежат в различных ассоциаторах $\mathrm{Ass}_{R_0}(M_i)$ и $\mathrm{Ass}_{R_0}(M_j)$, $i \neq j$. Тогда найдётся такой линейный многочлен l от переменных $x_1^i, \dots, x_{r_i}^i$, что $l \notin p_1$. По построению канонической модульной структуры имеем, что $l \in p_2$. Следовательно, $p_2 \nsubseteq p_1$. Аналогично $p_1 \nsubseteq p_2$, и тем самым произвольные два идеала ассоциатора $\mathrm{Ass}_{R_0}(M)$ изолированы друг от друга. $\square$

Следствие 2.6. *Декартова сумма невырожденных модулей без кручения является изолированным Q-модулем.*

Пример 5. Утверждение леммы 2.8 нельзя распространить на случай произвольной поддекартовой суммы. Пусть M_1 – модуль без кручения над кольцом $R_1 = k[x]$ и M_2 – модуль без кручения над кольцом $R_2 = k[x_1, x_2]$. Пусть также $R = k[x_1, x_2]$, $\varphi_1 : R \to R_1$ и $\varphi_2 : R \to R_2$ – линейные эпиморфизмы, $\varphi_1(x_1) = x$, $\varphi_1(x_2) = 0$ и $\varphi_2 = \mathrm{Id}$. Тогда Q-модуль $M_1 \oplus M_2$ не является изолированным над кольцом R. Действительно, возьмём ненулевые элементы $y_1 \in M_1$ и $y_2 \in M_2$. Имеем $\mathrm{Ann}_R(y_1 + y_2) = 0$ и $\mathrm{Ann}_R(y_1) = \mathrm{id}\langle x_2 \rangle$ – не изолированные друг от друга линейные идеалы.

Подводя итог, отметим, что предложение 2.6 даёт способ построения множества новых примеров Q-модулей и, в частности, изолированных Q-модулей (лемма 2.8). Не только прямая сумма Q-модулей, но и любой подмодуль прямой суммы является Q-модулем. В том числе, если $M_1, \dots, M_n$ – модули без кручения, то любой подмодуль прямой суммы $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ оказывается Q-модулем. Далее, изучая структуру произвольного Q-модуля, мы докажем, что верен и обратный результат, а именно: любой Q-модуль можно вложить в прямую сумму модулей без кручения.

2.2. **Структура Q-модуля: примарное разложение.** Описание структуры произвольного Q-модуля начнём с построения в нём примарного разложения нуля. Напомним основные определения и результаты общей теории примарного разложения (детали см., например, в [6, 7]).

Пусть M – модуль над кольцом R. Представление нуля модуля M в виде $0 = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ пересечения примарных подмодулей $Q_1, \dots, Q_s$

называется примарным разложением (нуля). Примарное разложение $0 = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ называется несократимым, если простые идеалы, ассоциированные с подмодулями $Q_1, \ldots, Q_s$, попарно различны и ноль нельзя представить в виде пересечения собственного подсемейства подмодулей $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$. В этом случае подмодули $Q_1, \ldots, Q_s$ называются примарными компонентами (нуля). В основе процедуры построения несократимого примарного разложения нуля из произвольного разложения лежит следующее утверждение: если $Q_1, \ldots, Q_t$ – примарные подмодули модуля M, с которыми ассоциирован один и тот же простой идеал p_1, тогда $Q_1 \cap \ldots \cap Q_t$ – также примарный подмодуль с ассоциированным идеалом p_1.

Следующая теорема является основным результатом теории примарного разложения в нётеровых модулях.

Теорема 2.9 (о существовании примарного разложения)**.** *Пусть M – ненулевой нётеровый модуль над нётеровым кольцом R. Тогда*

(1) *В модуле M существует несократимое примарное разложение нуля $0 = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$;*
(2) *При этом каждый идеал ассоциатора* $\mathrm{Ass}(M)$ *ассоциирован ровно с одной примарной компонентой, и наоборот, идеалы, ассоциированные с примарными компонентами, лежат в ассоциаторе* $\mathrm{Ass}(M)$ *(в частности, $s = |\mathrm{Ass}(M)|$);*
(3) *Примарные компоненты Q_i, которым соответствуют изолированные идеалы ассоциатора* $\mathrm{Ass}(M)$ *(так называемые изолированные примарные компоненты), определяются однозначно, то есть если $0 = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ и $0 = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_s$ – два примарных разложения нуля и $p_i \in \mathrm{Ass}(M)$ – изолированный идеал, то $Q_i = Q'_i$.*

Пусть теперь M – произвольный Q-модуль над кольцом многочленов $R = k[x_1, \ldots, x_r]$. Введём обозначения для ассоциатора модуля M:

$$\mathrm{Ass}(M) = \{p_1, \ldots, p_n\}.$$

Нашей задачей является построение примарного разложения нуля $0 = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ модуля M, такого, что для всех $i = \overline{1, n}$ фактормодуль $M/\,Q_i$ – примарный Q-модуль, с которым ассоциирован линейный идеал p_i. При этом можно считать, что $n > 1$, так как при $n = 1$ модуль M сам является примарным Q-модулем.

Заметим, что для поставленных целей невозможно просто сослаться на результат теоремы 2.9 о существовании примарного разложения нуля в Q-модуле M, поскольку нам необходимо добиться того, чтобы фактормодули $M/\,Q_i$ тоже были Q-модулями. По этой причине построение примарного разложения нуля проведём непосредственно.

Определим подмодули Q_i следующим образом:

$$Q_i \;=\; \{y \in M \mid \quad \exists\ f \in R \backslash p_i \quad y \cdot f \in M \cdot p_i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Нетрудно видеть, что множество Q_i действительно является подмодулем модуля M.

Лемма 2.10. *В обозначениях выше $Q_1 \cap \ldots \cap Q_n = 0$.*

Доказательство. Предположим $y \in Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ и $y \neq 0$. Не умаляя общности, можно считать, что аннулятор элемента y равен некоторому линейному идеалу из ассоциатора: $\mathrm{Ann}(y) = p_i$ (см. следствие 2.1). Тогда из условия $y \in Q_i$ следует, что найдётся такой многочлен $f \notin p_i$, что $y{\cdot}f \in M{\cdot}p_i$. С другой стороны, $y{\cdot}f \in M[p_i]$. Следовательно, $y{\cdot}f = 0$. Это противоречит тому, что $f \notin \mathrm{Ann}(y)$. $\square$

Введём обозначения для фактормодулей:

$$M_i = M/\,Q_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 2.11. *В обозначениях выше для каждого $i = \overline{1,n}$ модуль M_i является примарным Q-модулем с ассоциированным идеалом p_i.*

Доказательство. Согласно лемме 2.3 достаточно показать, что $M_i \neq 0$ и аннулятор любого ненулевого элемента модуля M_i совпадает с идеалом p_i.

Во-первых, проверим неравенство $Q_i \neq M$. Так как $p_i \in \mathrm{Ass}(M)$, то существует ненулевой элемент $y \in M$, аннулятор которого равен идеалу p_i. Тогда $y \notin Q_i$. В самом деле, если найдётся такой многочлен $f \notin p_i$, что $y{\cdot}f \in M{\cdot}p_i$, то имеем $y{\cdot}f \in M[p_i] \cap M{\cdot}p_i$. Следовательно, получаем равенство $y{\cdot}f = 0$, противоречащее условию $f \notin \mathrm{Ann}(y)$.

Во-вторых, посчитаем аннуляторы элементов модуля M_i. С одной стороны, для любого элемента $y \in M$ и любого многочлена $f \in p_i$ верно, что $y{\cdot}f \in M{\cdot}p_i$. А так как $M{\cdot}p_i \subseteq Q_i$, то идеал p_i содержится в аннуляторе каждого элемента из фактормодуля M_i. С другой стороны, если $y \notin Q_i$, но при этом $y{\cdot}f \in Q_i$, то найдётся такой многочлен $s \notin p_i$, что $y{\cdot}f{\cdot}s \in M{\cdot}p_i$. Тогда из условия $y \notin Q_i$ следует, что $f{\cdot}s \in p_i$. И поскольку $s \notin p_i$, заключаем, что $f \in p_i$. $\square$

Обобщая проведённые выше рассуждения, приходим к следующему предложению.

Предложение 2.12 (о примарном разложении Q-модулей)**.** *Пусть M – Q-модуль над кольцом многочленов R, ассоциатор которого состоит из n линейных идеалов:* $\mathrm{Ass}(M) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. *Тогда существует несократимое примарное разложение нуля модуля M, $0 = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$, такое, что для всех $i = \overline{1,n}$ фактормодуль $M/\,Q_i$ – примарный Q-модуль, с которым ассоциирован линейный идеал p_i.*

Доказательство. Примарное разложение построено выше, а все необходимые утверждения доказаны в леммах 2.10 и 2.11. Несократимость разложения следует из того, что количество подмодулей $Q_1, \ldots, Q_n$ совпадает с мощностью ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ (см. пункт 2 теоремы 2.9). $\square$

Пример 6. Как уже отмечалось выше, частным случаем Q-модуля является модуль M без кручения над кольцом R. Здесь $\mathrm{Ass}(M) = \{0\}$ и $n = 1$. Кроме того, легко проверяется, что $Q_1 = 0$ и $M/\,Q_1 = M$.

Стандартным следствием результата о примарном разложении является утверждение, подобное следующей теореме.

Теорема 2.13. *Пусть M – Q-модуль над кольцом многочленов R. Тогда M подпрямо вкладывается в прямую сумму $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ некоторых примарных Q-модулей $M_1, \ldots, M_n$ над кольцом R.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введёнными выше. Благодаря примарному разложению нуля, $Q_1 \cap \ldots \cap Q_n = 0$, следующее отображение определяет подпрямое вложение:

$$\mu : \; y \in M \quad \rightarrow \quad (y + Q_1, \ldots, y + Q_n) \; \in \; M_1 \oplus \ldots \oplus M_n.$$

Как доказано в лемме 2.11, каждый модуль M_i является примарным Q-модулем. □

Фактически теорема 2.13 даёт описание Q-модулей, утверждая, что произвольный Q-модуль изоморфен подмодулю прямой суммы примарных Q-модулей. Однако для приложений нам понадобятся некоторые дальнейшие уточнения теоремы 2.13, в частности, аргументация существования вложения произвольного Q-модуля в прямую сумму модулей без кручения.

Введём обозначения для факторколец и канонических гомоморфизмов:

$$R_i \; = \; R \,/\, p_i, \quad \varphi_i : R \rightarrow R_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ясно, что φ_i является линейным эпиморфизмом колец многочленов R и R_i.

Гомоморфизм μ из доказательства теоремы 2.13 – это R-вложение, то есть гомоморфизм между R-модулями; модуль M_i – примарный модуль над кольцом R. Но в то же время на модуле M_i естественным образом определяется структура модуля над факторкольцом R_i:

$$(y + Q_i) \cdot (f + p_i) = y \cdot f + Q_i, \quad y \in M, \; f \in R.$$

Над кольцом многочленов R_i модуль M_i не имеет кручения. При этом прямая сумма $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ со структурой R-модуля – не что иное, как поддекартова сумма модулей $M_1, \ldots, M_n$ без кручения над кольцами многочленов $R_1, \ldots, R_n$ соответственно. Кроме структуры R-модуля, на прямой сумме $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ есть ещё структура модуля над k-алгеброй $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$. Связью между этими двумя структурами мы воспользуемся для уточнения утверждения теоремы 2.13.

Обозначим через μ_i канонический гомоморфизм R-модулей:

$$\mu_i : M \rightarrow M / \, Q_i, \;\; i = 1, \ldots, n, \qquad \mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n.$$

Наравне с вложением модулей μ рассмотрим вложение k-алгебр φ:

$$\varphi : R \rightarrow R_1 \oplus \ldots \oplus R_n, \qquad \varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n.$$

Структура R_i-модуля M_i на такова, что $\mu_i(y \cdot f) = \mu_i(y) \cdot \varphi_i(f)$, $y \in M$, $f \in R$. Следовательно, для любых $y \in M$ и $f \in R$ справедливо равенство: $\mu(y \cdot f) = \mu(y) \cdot \varphi(f)$.

Теорема 2.14. *Пусть M – Q-модуль над кольцом многочленов $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ и $\mathrm{Ass}(M) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Тогда существуют*

(1) *кольца многочленов $R_1, \ldots, R_n$, такие, что $R_i \cong R \,/\, p_i$, $i = \overline{1,n}$;*
(2) *модули $M_1, \ldots, M_n$ без кручения над кольцами многочленов $R_1, \ldots, R_n$ соответственно, такие, что $M_i \cong M / \, Q_i$, где Q_i – подмодуль модуля M, $i = \overline{1,n}$;*
(3) *подпрямое вложение k-линейных пространств $\mu : M \rightarrow M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$;*
(4) *линейные эпиморфизмы $\varphi_i : R \rightarrow R_i$, $i = \overline{1,n}$;*

(5) *подпрямое вложение k-алгебр $\varphi : R \to R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$, такое, что $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$ и ядро $\ker\varphi$ является Q-идеалом кольца R. Кроме того,*

$$\ker\varphi \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} p_i \;=\; \mathrm{Ann}(M).$$

При этом выполняется тождество:

$$\mu(y \cdot f) = \mu(y) \cdot \varphi(f), \quad y \in M, \quad f \in R.$$

Доказательство. Доказательство основной части теоремы следует из теоремы 2.13 и последующих рассуждений. Покажем справедливость утверждения о ядре $\ker\varphi$. Ясно, что $\ker\varphi = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker\varphi_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} p_i$. И согласно следствию 2.2 справедливо равенство $\bigcap\limits_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Ann}(M)$. □

Теорема 2.14 даёт описание произвольного Q-модуля в такой форме, которая будет удобна для дальнейших приложений. Дополнительно нам понадобится более подробная информация о примарных компонентах Q_i, о возможных формах их определения. В частности, будут важны два случая – случай изолированного Q-модуля и случай вырожденного Q-модуля.

2.3. **Изолированные Q-модули.** В этом и следующем разделах через M всюду будем обозначать Q-модуль над кольцом многочленов R с ассоциатором $\mathrm{Ass}(M) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ и набором примарных компонент $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$.

Как следует из пункта 3 теоремы 2.9, каждая изолированная примарная компонента Q_i модуля M определяется однозначно. Однако та форма, в которой мы определили компоненту Q_i выше ($Q_i = \{y \in M \mid \exists\, f{\in}R\backslash p_i \quad y\cdot f{\in}M{\cdot}p_i\}$), не слишком удобна для приложений. Следующая лемма доставляет иные способы описания компоненты Q_i.

Лемма 2.15. *Пусть p_i – изолированный идеал ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$. Тогда*

(1) *для любого многочлена s_i, такого, что $s_i \in \bigcap_{j\neq i} p_j$ и $s_i \notin p_i$, верно: $Q_i \;=\; \{y \in M \mid \quad y \cdot s_i = 0\}$;*
(2) $Q_i = \{y \in M \mid \quad \mathrm{Ann}(y) \nsubseteq p_i\}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что ввиду изолированности идеала p_i от остальных идеалов ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ многочлены s_i со свойствами $s_i \in \bigcap_{j\neq i} p_j$ и $s_i \notin p_i$ всегда существуют. Обозначим через P_1 и P_2 соответствующие множества из пунктов 1 и 2 леммы. Покажем, что $Q_i \subseteq P_2 \subseteq P_1 \subseteq Q_i$.

Пусть $y \in Q_i$, то есть существует многочлен $f \notin p_i$, такой, что $y{\cdot}f \in M{\cdot}p_i$. Тогда $y{\cdot}f{\cdot}s_i \in M{\cdot}\bigcap\limits_{i=1}^{n} p_i$, следовательно, $y{\cdot}f{\cdot}s_i = 0$. Таким образом, $f{\cdot}s_i \in \mathrm{Ann}(y)$ и $f{\cdot}s_i \notin p_i$, следовательно, $y \in P_2$.

Допустим, $y \in P_2$. Согласно лемме 2.1, аннулятор $\mathrm{Ann}(y)$ – это пересечение каких-то линейных идеалов из ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$, причём в их число не входит идеал p_i. Следовательно $s_i \in \mathrm{Ann}(y)$ и $y \in P_1$.

Заключительно предположим, что $y \in P_1$. Тогда $s_i \notin p_i$ и $y{\cdot}s_i = 0$, следовательно, $y \in Q_i$. □

Пусть p_i – идеал из ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$. Напомним, что подмодуль $M[p_i]$ состоит из всех элементов $y \in M$, аннулятор которых $\mathrm{Ann}(y)$ содержит идеал

p_i. Если p_i – максимальный по включению идеал ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$, то очевидно, что $M[p_i] = \{y \in M \mid \mathrm{Ann}(y) = p_i\} \cup \{0\}$.

Лемма 2.16. *Для любого* $i = \overline{1,n}$ *подмодуль* $M[p_i]$ *содержит в себе пересечение всех примарных компонент, за исключением* Q_i. *Если же* p_i – *максимальный по включению идеал ассоциатора* $\mathrm{Ass}(M)$, *то* $M[p_i] = \bigcap\limits_{j \neq i} Q_j$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $i = n$. Предположим, что $y \in Q_1 \cap \ldots \cap Q_{n-1}$. Тогда для любого многочлена $f \in p_n$ произведение $y \cdot f$ принадлежит примарной компоненте Q_n, то есть $y \cdot f \in Q_1 \cap \ldots \cap Q_{n-1} \cap Q_n$. Следовательно, $y \cdot f = 0$ и $y \in M[p_n]$.

Теперь предположим, что в ассоциаторе $\mathrm{Ass}(M)$ не существует такого идеала p_i, что $p_n \subsetneq p_i$, то есть для каждого $i = \overline{1, n-1}$ найдётся линейный многочлен $l_i \in p_n \backslash p_i$. Пусть $y \in M[p_n]$, тогда $y \cdot l_i = 0$ и, следовательно, $y \in Q_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Таким образом, $y \in Q_1 \cap \ldots \cap Q_{n-1}$. Равенство $M[p_n] = Q_1 \cap \ldots \cap Q_{n-1}$ доказано. □

Обобщим проведённые выше рассуждения в следующем предложении об изолированных Q-модулях.

Предложение 2.17. *Предположим, что* M – *изолированный Q-модуль. Тогда*

1. $M[p_i] = \{y \in M \mid \mathrm{Ann}(y) = p_i\} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1,n}$;
2. $M[p_i] = \bigcap_{j \neq i} Q_j, \quad i = \overline{1,n}$;
3. $Q_i \cap M[p_i] = 0, \quad i = \overline{1,n}$;
4. *Сумма подмодулей* $M[p_1], \ldots, M[p_n]$ *модуля* M *является прямой, то есть* $M[p_1] \oplus \ldots \oplus M[p_n]$ – *подмодуль модуля* M;
5. *Аннулятор любого элемента* $y \in M[p_1] \oplus \ldots \oplus M[p_n]$ *равен пересечению идеалов* p_i, *для которых* $y_i \neq 0$ *в разложении* $y = y_1 + \ldots + y_n$, $y_i \in M[p_i]$, $i = \overline{1,n}$: $\quad \mathrm{Ann}(y) = \bigcap\limits_{y_i \neq 0} p_i$.

Доказательство. Пункт 1 следует из из определения подмодуля $M[p_i]$ и изолированности, пункт 2 – из леммы 2.16, пункт 3 – из леммы 2.15 и пункта 1. Докажем пункты 4 и 5.

Пусть $y_i \in M[p_i]$, $i = \overline{1,n}$. Предположим, что $y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_n \cdot f_n = 0$ для каких-то многочленов $f_1, \ldots, f_n \in R$, но при этом, например, $y_n \cdot f_n \neq 0$. Тогда $y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_{n-1} \cdot f_{n-1} \in Q_n$ (см. пункт 2). Следовательно, $y_n \cdot f_n \in Q_n \cap M[p_n]$. Получаем противоречие с пунктом 3. Таким образом, сумма подмодулей $M[p_i]$ действительно является прямой.

Пусть теперь $y = y_1 + \ldots + y_n$ и, скажем, $y_1, \ldots, y_s \neq 0$, а $y_{s+1} = \ldots = y_n = 0$. Покажем, что $\mathrm{Ann}(y) = p_1 \cap \ldots \cap p_s$. Если $f \in p_1 \cap \ldots \cap p_s$, то, очевидно, $y \cdot f = 0$. Обратно, если $f \in \mathrm{Ann}(y)$, то $y_1 \cdot f = \ldots = y_s \cdot f = 0$ (см. пункт 4). Следовательно, $f \in p_1 \cap \ldots \cap p_s$. □

2.4. **Вырожденные Q-модули.** В случае, когда простой идеал $p_i \in \mathrm{Ass}(M)$ не является изолированным, соответствующую ему примарную компоненту Q_i, вообще говоря, можно определить с помощью другого подмодуля Q'_i модуля M. Предложение 2.12 о примарном разложении полностью опирается на леммы 2.10 и 2.11. Анализ доказательства этих лемм приводит к следующему набору требований, в рамках сохранения которых компоненты Q_i можно варьировать:

(1) Пересечение всех примарных компонент должно равняться нулю: $Q_1 \cap \ldots \cap Q_n = 0$;
(2) Для каждого $i = \overline{1,n}$ в роли примарной компоненты Q_i может выступать подмодуль модуля M, для которого фактормодуль $M/\,Q_i$ является примарным Q-модулем с ассоциированным идеалом p_i, а для этого необходимо:
   (a) чтобы модуль $M/\,Q_i$ был ненулевым (то есть $M \neq Q_i$);
   (b) чтобы идеал p_i аннулировал модуль $M/\,Q_i$ (то есть $M \cdot p_i \subseteq Q_i$);
   (c) чтобы многочлены $f \in R\backslash p_i$ действовали на $M/\,Q_i$ без кручения (то есть из условий $f \in R\backslash p_i$, $y \in M$, и $y \cdot f \in Q_i$ должно следовать $y \in Q_i$).

Как видно, примарная компонента Q_i, которую мы определили выше, является минимальной среди возможных, то есть любая другая примарная компонента Q_i', соответствующая идеалу p_i, обязательно содержит Q_i ($Q_i \subseteq Q_i'$). При этом любая изолированная примарная компонента является единственной, удовлетворяющей указанным требованиям, что следует из общей теории примарного разложения, а также может быть доказано непосредственно.

Предположим, что модуль M вырожден, то есть максимальный линейный идеал $\Delta = \mathrm{id}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$ лежит в ассоциаторе $\mathrm{Ass}(M)$. В этом случае $M[\Delta] \neq 0$. Пусть Q_Δ – примарная компонента, соответствующая идеалу Δ, определённая, как в разделе 2.2 выше. Очевидно, что $Q_\Delta = M{\cdot}\Delta$ Для дальнейших приложений нам будет удобно переопределить компоненту Q_Δ, расширив её от минимально возможной до максимально возможной.

Обозначим через Ω следующее семейство собственных подмодулей модуля M:

$$\Omega \ = \ \{N \subsetneqq M \mid \quad N \supseteq M \cdot \Delta, \quad N \cap M[\Delta] = 0\}.$$

Ясно, что множество Ω не пусто, так как, например, содержит подмодуль $M{\cdot}\Delta$. Поскольку модуль M нётеров, то множество его подмодулей Ω индуктивно. В самом деле, любая строго возрастающая последовательность подмодулей $N_1 < N_2 < \ldots$ из Ω непременно конечна. По лемме Цорна в Ω существуют максимальные элементы, причём любой элемент $N \in \Omega$ содержится в некотором максимальном. Покажем, что в качестве примарной компоненты Q_Δ можно выбрать любой максимальный элемент из Ω.

Лемма 2.18. *В обозначениях выше предположим, что Q_Δ является максимальным элементом множества Ω. Тогда модуль M раскладывается в прямую сумму:* $\quad M = Q_\Delta \oplus M[\Delta]$.

Доказательство. По определению подмодуля Q_Δ модуля M пересечение $Q_\Delta \cap M[\Delta]$ равно нулю. Покажем, что произвольный элемент $y \in M$ лежит в сумме $Q_\Delta + M[\Delta]$.

Действительно, если $y \notin Q_\Delta$, то модуль N_y, порождённый элементом y и модулем Q_Δ, не лежит в Ω. Следовательно, $N_y \cap M[\Delta] \neq 0$. Пусть $y_1 \in N_y \cap M[\Delta]$ и $y_1 \neq 0$. Поскольку $y_1 \in N_y$, то $y_1 = y \cdot f + y_2$ для некоторого многочлена $f \in R$ и элемента $y_2 \in Q_\Delta$. Кроме того, $f \notin \Delta$, так как в противном случае

$y \cdot f + y_2 \in Q_\Delta$, то есть $y_1 \in Q_\Delta \cap M[\Delta]$, но последнее пересечение равно нулю, а $y_1 \neq 0$.

Пусть $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in k$ и $f_2 \in \Delta$. Тогда $y = (y_1 - y_2 - y \cdot f_2){:}f_1$, $y_1 \in M[\Delta]$, y_2, $y \cdot f_2 \in Q_\Delta$, следовательно, $y \in Q_\Delta + M[\Delta]$. □

Лемма 2.19. *Пусть M – вырожденный Q-модуль, $\Delta \in \mathrm{Ass}(M)$ и Q_Δ – произвольный максимальный элемент множества Ω. Тогда утверждения лемм 2.10 и 2.11, а следовательно, и предложения 2.12, теорем 2.13 и 2.14 остаются в силе, если в качестве примарной компоненты, соответствующей идеалу Δ, взять подмодуль Q_Δ.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно убедиться в том, что подмодуль Q_Δ удовлетворяет списку требований, приведённому выше. Выполнение требования 1 следует из двух равенств: $M[\Delta] = \bigcap\limits_{p_i \neq \Delta} Q_i$ (см. лемму 2.16) и $Q_\Delta \cap M[\Delta] = 0$. Условие $M \neq Q_\Delta$ (требование 2a) и условие $M{\cdot}\Delta \subseteq Q_\Delta$ (требование 2b) заложены в определение модуля Q_Δ, а из них следует и требование 2c. □

Список литературы

[1] Э. Ю. Даниярова, *Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли*, Препринт №131, Новосибирск: РАН Сиб. Отд-ние, Ин-т математики, 33 с., 2004.

[2] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и универсальные классы*, Фундам. и прикл. мат., **9(3)** (2003), 37–63. http://mech.math.msu.su/~fpm/rus/k03/k033/k03304h.htm

[3] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли II: Случай конечного поля*, Фундам. и прикл. мат., **9(3)** (2003), 65–87. http://noc.math.msu.su/~fpm/rus/k03/k033/k03305h.htm

[4] Э. Ю. Даниярова, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли III: Q-алгебры и координатные алгебры алгебраических множеств*, Препринт, Омск: Изд-во ОмГУ, 130 с., 2005.

[5] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и A-модули*, Препринт №34, Омск: ОмГАУ, 25 с., 2001.

[6] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, Москва, 1968.

[7] Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра*, Мир, Москва, 1971.

Даниярова Эвелина Юрьевна
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644099, Омск, Россия
E-mail address: evelina.omsk@list.ru