S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 52–63 (2007) УДК 512.54
MSC 13A99

О СУЩЕСТВОВАНИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ СТРУКТУР НА ГРУППАХ

О.В. ГРИГОРЕНКО, В.А. РОМАНЬКОВ

Abstract. It is proved that every group containing the free abelian subgroup of rank 2 does not admit an universal rational structure. The negative answer to the question by Gersten and Short on the existence for the free abelian of rank 2 group of such rational structure L for which every subgroup is $L-$rational is derived.

Введение

Целью данной работы является доказательство того, что любая конечно порожденная группа G, содержащая в качестве подгруппы свободную абелеву группу $\mathbf{Z^2}$ ранга 2, не обладает универсальной рациональной структурой. Мы называем рациональную структуру L на G универсальной, если любое рациональное подмножество R группы G L-рационально. Также мы устанавливаем, что группа $\mathbf{Z^2}$ не допускает такой рациональной структуры L, в которой все подгруппы из $\mathbf{Z^2}$ L-рациональны. Последнее решает проблему Герстена-Шорта из [1]. Заметим, что свободная группа F_n конечного ранга n обладает универсальной рациональной структурой. Доказательство этого утверждения принадлежит Г.А. Баженовой. С ее любезного согласия мы помещаем это утверждение в данную статью (см. Предложение 2.1 в п. 2).

Заметим также, что, как показала Г.А. Баженова в [2], рациональное подмножество R конечно порожденной группы G L-рационально в какой-нибудь рациональной структуре L тогда и только тогда, когда его дополнение $G \setminus R$ также рационально в G. Группы, в которых дополнения к рациональным подмножествам рациональны, изучались Г.А. Баженовой в [2], [3], [4]. Легко показать, что это в точности класс $\boldsymbol{B}$ всех конечно порожденных групп, в

Grigorenko O.V., Romankov V.A. On existence of the universal rational structures for groups.

Поступила 7 июня 2006 г., опубликована 6 марта 2007 г.

которых рациональные подмножества замкнуты относительно всех булевых операций, т.е. образуют булеву алгебру.

Класс $\boldsymbol{B}$ содержит все конечно порожденные почти абелевы группы [2] и замкнут относительно операции свободного произведения [3]. Заметим [5], что подгруппа рациональна в том и только том случае, если она конечно порождена. Значит, необходимым условием принадлежности группы G классу $\boldsymbol{B}$ является выполнение на G свойства Хаусона, а именно: пересечение конечно порожденных подгрупп группы G должно быть конечно порождено. Хорошо известно, что свойство Хаусона не выполнено на прямом произведении свободных групп, хотя бы одна из которых неабелева. Значит, класс $\boldsymbol{B}$ не замкнут относительно прямых произведений. Этот факт замечен в целом ряде работ и поэтому мы не приводим точных ссылок.

Г.А. Баженова доказала в [2], что конечно порожденная нильпотентная группа G принадлежит классу $\boldsymbol{B}$ тогда и только тогда, когда она почти абелева. Она же обобщила это утверждение в [4] на полициклические группы.

В [6] В. А. Романьков установил, что проблема вхождения в L-рациональные подмножества рекурсивно определенной группы G с заданной рациональной структурой L алгоритмически разрешима, и дал подробное описание соответствующего алгоритма. Если рекурсивно определенная группа G допускает универсальную рациональную структуру, то мы получаем таким образом унифицированный алгоритм, решающий проблему вхождения в ее рациональные подмножества.

Там же в [6] доказано, что проблема вхождения в рациональные подмножества произвольной неабелевой свободной нильпотентной группы достаточно большого ранга алгоритмически неразрешима.

1. Основные определения

Пусть M произвольный конечно порожденный моноид. Класс всех рациональных подмножеств $\boldsymbol{R}(M)$ моноида M есть по определению наименьший класс, содержащий все конечные подмножества, замкнутый относительно рациональных операций: объединения $(R_1 \cup R_2)$, умножения $(R_1R_2 = \{r_1r_2 : r_i \in R_i (i = 1, 2)\})$ и порождения подмоноида $(R^* = \{1\} \cup_{k=1}^{\infty} R^k)$.

Данное определение приведено в статье Гилмана [5]. Там же установлено, что рациональными подмножествами в M будут в точности те подмножества, которые могут быть заданы конечными автоматами над M.

Конечным автоматом над M называется конечный ориентированный граф Γ, ребра которого снабжены метками из M. Предполагается также, что Γ имеет выделенные входную (начальную) и несколько выходных (конечных) вершин. Любой путь p на графе Γ имеет по определению метку из M, равную произведению всех меток его ребер в той же последовательности. Конечный автомат Γ задает некоторое подмножество $R \subseteq M$, состоящее из меток всех путей из начальной вершины в одну из конечных вершин.

Если имеется свободный моноид на конечном алфавите Σ, который мы в соответствии с определением рациональных операций обозначаем через Σ^*, то его подмножества называются языками. Рациональные подмножества из Σ^*

называются рациональными языками. Известно [5], что класс рациональных языков замкнут относительно булевых операций.

Пусть $\mu : \Sigma^* \to G$ некоторый гомоморфизм свободного моноида Σ^* на группу G. Тогда множество $\mu(\Sigma)$ порождает G как полугруппу. Если $L \subseteq \Sigma^*$ рациональный язык такой, что $\mu(L) = G$, то говорят, что на G определена рациональная структура (Σ^*, L, μ) или, более кратко, рациональная структура L.

Подмножество $R \subseteq G$ называется L-рациональным (рациональным относительно L), если его полный прообраз в L (равный $\mu^{-1}(R) \cap L$), рационален в Σ^*.

Хорошо известно (см. [5], [7]), что гомоморфный образ рационального подмножества рационален. Следовательно, любое L-рациональное подмножество рационально. Как уже отмечалось во введении, рациональное подмножество R конечно порожденной группы G L-рационально для некоторой рациональной структуры L тогда и только тогда, когда его дополнение $G \setminus R$ также рационально в G.

Рациональная структура L группы G называется универсальной, если любое рациональное подмножество R группы G L-рационально. Из упомянутого выше критерия Г.А. Баженовой L-рациональности рационального множества R следует, что универсальной рациональной структурой могли бы обладать только те конечно порожденные группы, в которых класс рациональных подмножеств замкнут относительно всех булевых операций.

В дальнейшем мы неоднократно пользуемся в рассуждениях индукцией по сложности рационального множества R. Сложность можно определить как наименьшее число шагов необходимых для построения R из конечных подмножеств данного моноида (группы) с использованием рациональных операций. Индукционное доказательство состоит в проверке доказываемого свойства для конечных подмножеств и сохраняемости его при переходе от подмножеств меньшей сложности к подмножествам большей сложности с применением рациональных операций.

2. Предварительные леммы

Пусть Σ^* свободный моноид на конечном алфавите Σ. Пусть $\mu : \Sigma^* \to G$ гомоморфизм на конечно порожденную группу G.

Язык $L \subseteq \Sigma^*$ назовем μ-универсальным или, более просто, универсальным, если прообраз любого рационального подмножества R группы G в L рационален. Так как G конечно порождена и, следовательно, рациональна, сам язык L рационален.

Следующие утверждения доказаны в работе О. В. Григоренко [8].

Лемма 2.1. *Пусть M рациональный язык, содержащийся в универсальном рациональном языке L. Тогда M также универсален.*

Лемма 2.2. *1) Пусть a произвольный элемент свободного моноида Σ^*. Тогда язык $L \subseteq \Sigma^*$ рационален в том и только в том случае, если рациональны языки aL и La.*

2) Пусть b произвольный элемент группы G. Тогда подмножество $R \subseteq G$ рационально в том и только в том случае, если рациональны подмножества bR и Rb.

Лемма 2.3. *Пусть группа G такова, что все ее рациональные подмножества образуют булеву алгебру. Тогда в определении универсальности рационального языка $L \subseteq \Sigma^*$ достаточно требовать, чтобы были рациональными все прообразы $\mu^{-1}(R)$ рациональных подмножеств образа $\mu(L)$ языка L в группе G.*

Лемма 2.4. *Пусть конечно порожденная группа G такова, что все ее рациональные подмножества образуют булеву алгебру. Тогда рациональный язык L универсален в том и только том случае, если универсальны языки aL и La для произвольного элемента $a \in \Sigma^*$.*

Будем говорить, что рациональный язык L_1 (определенной сложности) существенно используется для построения рационального языка L_2 (большей сложности), если существует кратчайшая схема построения языка L_2 из конечных языков, в которой участвует L_1.

Лемма 2.5. *Пусть конечно порожденная группа G такова, что все ее рациональные подмножества замкнуты по булевым операциям. Пусть язык L_2 универсален и язык L_1 существенно использован при построении L_2. Тогда язык L_1 также универсален.*

Доказательство.

Заметим, что мы не можем прямо воспользоваться леммой 2.1, так как среди рациональных операций присутствует умножение, при котором сомножители в общем случае не принадлежат произведению. По этой причине L_1 может не лежать в L_2. Однако, в этом случае в L_2 лежит язык вида aL_1b, где $a, b \in \Sigma^*$. Остается воспользоваться леммой 2.4.

Лемма 2.6. *Пусть конечно порожденная группа G допускает универсальную рациональную структуру L относительно гомоморфизма $\mu : \Sigma^* \to G$, где Σ^* свободный моноид на конечном алфавите Σ. Пусть имеется другой гомоморфизм $\nu : \Lambda^* \to G$ на группу G, где Λ^* свободный моноид на конечном алфавите Λ. Тогда существует универсальная рациональная структура $M \subseteq \Lambda^*$.*

Доказательство.

Пусть $\Sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}, \mu(\sigma_i) = g_i, i = 1, ..., n$. Выберем для элемента $g_i (i = 1, ..., n)$ какой-нибудь прообраз λ_i в моноиде $\Lambda^* : \nu(\lambda_i) = g_i$. Определим гомоморфизм $\eta : \Sigma^* \to \Lambda^*$ отображением $\eta : \sigma_i \to \lambda_i (i = 1, ..., n)$. Полагаем $M = \eta(L)$. Докажем, что M искомое.

Заметим прежде всего, что $\mu = \eta\nu$. Затем непосредственно проверим, что для любого рационального подмножества R группы G справедливо равенство

$$\eta(\mu^{-1}(R) \cap L) = \nu^{-1}(R) \cap M.$$

Левая часть рациональна как гомоморфный образ рационального языка.

Лемма доказана.

Отсюда вытекает, что существование универсальной рациональной структуры на конечно порожденной группе G определяется только свойствами самой группы и не зависит от выбора свободного моноида и соответствующего гомоморфизма.

В дальнейшем мы воспользуемся только что доказанной леммой, выбирая множество $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, ..., \sigma_n, \sigma_n^{-1}\}$. Мы предполагаем, что образы формальных обратных $\sigma_i, \sigma_i^{-1} (i = 1, ..., n)$ при гомоморфизме $\mu : \Sigma^* \to G$ взаимно обратны в группе G.

В этом случае мы определим свободную группу $F = F(\Sigma)$ с базисом $\Sigma^+ = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ и гомоморфизм μ естественно пропустим через группу F :

$$\Sigma^* \xrightarrow{\nu} F \xrightarrow{\eta} G \tag{1}$$

Будем говорить, что рациональное подмножество $M \subseteq F$ универсально для G, если для любого рационального подмножества R группы G его прообраз в M, равный $\nu^{-1}(R) \cap M$, рационален в F. Если к тому же $\nu(M) = G$, то M является универсальной рациональной структурой группы G в свободной группе F.

В сделанных только что предположениях и обозначениях справедлива

Лемма 2.7. *Если существует универсальная рациональная структура для группы G в Σ^*, то существует универсальная рациональная структура для G в F.*

Доказательство.

Пусть L универсальная рациональная структура в Σ^* для группы G. Полагаем $M = \nu(L)$ в (1). Докажем, что M универсальная рациональная структура для G в F.

Очевидно, что подмножество M рационально. Так как $\mu = \nu\eta$, имеем $\eta(M) = G$, т.е. M задает рациональную структуру на G. Непосредственно проверяется, что

$$\nu(\mu^{-1}(R) \cap L) = \eta^{-1}(R) \cap M.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Справедливо и обратное к лемме 2.7 утверждение. Но прежде, чем его сформулировать и доказать, приведем утверждение, о котором говорилось во введении.

Предложение 2.1. *(Г.А. Баженова). Пусть F свободная группа с базисом $\Sigma^+ = \{\bar{\sigma_1}, ..., \bar{\sigma_n}\}, \Sigma^*$- свободный моноид на алфавите $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, ..., \sigma_n, \sigma_n^{-1}\}$, $\nu : \Sigma^* \to F$- гомоморфизм, при котором $\mu(\sigma_i) = \bar{\sigma}_i, \mu(\sigma_i^{-1}) = \bar{\sigma_i}^{-1}$ $(i = 1, ..., n)$. Тогда язык L всех формально несократимых слов из Σ^* является универсальной рациональной структурой на F.*

Доказательство.

Рациональность L хорошо известна. Пусть R рациональное подмножество в F, задаваемое автоматом $\bar{\Gamma}$. Изменим автомат $\bar{\Gamma}$, соединяя ребром с меткой 1 любую пару вершин u, v при условии, что из u в v ведет путь с меткой 1. Обозначим полученный автомат через $\bar{\Gamma}'$. Теперь возьмем автомат Γ, который отличается от $\bar{\Gamma}'$ только метками: в них $\bar{\sigma_i}, \bar{\sigma_i}^{-1}$ заменены на σ_i, σ_i^{-1}, соответственно. Пусть S рациональный язык в Σ^*, задаваемый автоматом Γ. Очевидно, что наряду с любым словом w, задаваемым автоматом Γ, присутствует формально несократимое слово l, также задаваемое этим автоматом, имеющее тот же образ в F, что и w. Причем, все слова, задаваемые автоматом Γ, имеют образы в F, задаваемые автоматом $\bar{\Gamma}'$ и наоборот. Язык всех формально несократимых слов, задаваемых автоматом Γ, есть таким образом $S \cap L$. Последний язык рационален как пересечение рациональных языков. Остается заметить, что $S \cap L = \nu^{-1}(R) \cap L$.

Предложение доказано.

Рассмотрим снова последовательность (1) и сформулируем обещанное обращение леммы 2.7.

Лемма 2.8. *Если универсальная рациональная структура для группы G существует в F, то универсальная рациональная структура для G есть и в Σ^*.*

Доказательство.

Пусть M универсальная рациональная структура для G в F. Пусть L, как и в предложении, означает язык всех формально несократимых слов в Σ^*. Тогда $L_1 = \nu^{-1}(M) \cap L$ – рациональный язык по предложению. Пусть R произвольное рациональное подмножество в G. Тогда подмножество $\eta^{-1}(R) \cap M$ рационально, равно как и язык $\nu^{-1}(\eta^{-1}(R) \cap M) \cap L_1$. Остается заметить, что последний язык совпадает с $\mu^{-1}(R) \cap L_1$.

Лемма доказана.

3. Некоторые нерациональные языки

Пусть $\mu : \Sigma^* \to \mathbf{Z^2}$ гомоморфизм свободного моноида Σ^* на конечном алфавите Σ на свободную абелеву группу $\mathbf{Z^2}$ ранга 2. Обозначим через a, b какую-нибудь пару свободных порождающих группы $\mathbf{Z^2}$. Будем называть элементы $c, d \in \mathbf{Z^2}$ независимыми, если они порождают нециклическую подгруппу.

Лемма 3.1. *Пусть элементы $u, v \in \Sigma^*$ таковы, что их образы в $\mathbf{Z^2}$ независимы. Тогда язык*

$$K = \cup_{n=0}^{\infty} u^n v^n$$

нерационален.

Доказательство.

Пусть, напротив, K рационален. Согласно лемме о "накручивании цикла"(см. [5, Pumping Lemma] или [7]) для достаточно большого n существует представление

$$u^n v^n = xyz,$$

где $x, y, z \in \Sigma^*, y \neq 1$, с условием, что все слова вида

$$xy^l z$$

для $l = 0, 1, ...$ принадлежат K.

Пусть это выполнено для

$$x = u^k u_1, y = u_2 u^{n-k-1} v^l v_1, z = v_2 v^{n-l-1},$$

где $u_1 u_2 = u, v_1 v_2 = v$, т.е. y является произведением подслов из u^n, v^n, соответственно.

Тогда для некоторого $t \geq 1$ и любого $p \geq 0$ имеем

$$xy^{(p+1)} z = u^{n+pt} v^{n+pt}, \tag{2}$$

откуда получается, что

$$u^{pt}v^{pt} = r^p \tag{3}$$

для $r = v^l v_1 u_2 u^{n-k-1}$.

Равенство (3) в свободном моноиде означает, что элементы u, v, r принадлежат циклическому подмоноиду. Это противоречит предположению леммы об образах элементов u, v.

Рассмотрим теперь случай, когда y является подсловом в u^n (аналогично рассматривается оставшийся случай, когда y есть подслово в v^n).

Итак, пусть

$$x = u^k u_1, y = u_2 u^l u_3, z = u_4 u^{n-k-l-2} v^n,$$

где $u = u_1 u_2 = u_3 u_4$.

Тогда для некоторого $t \geq 1$ и любого $p \geq 0$ также выполнено (2). В данном случае получаем, что

$$r^p u^s = u^s u^{pt} v^{pt}, \tag{4}$$

где $r = u_3 u_2 u^l, s = n - k - l - 1$.

Будем рассматривать Σ^* как его естественный образ в свободной группе F с базисом Σ. Тогда в группе F справедливо равенство

$$(u^{-s} r u^s)^p = u^{pt} v^{pt} \qquad (5).$$

По известной теореме Линдона (см. [9]) отсюда следует, что элементы $u^{-s} r u^s, u, v$ лежат в одной циклической подгруппе. Значит, образы элементов u, v лежат в циклической подгруппе. Это противоречит условиям леммы.

Лемма доказана.

Назовем язык $L \subseteq \Sigma^*$ линейным, если его образ $\mu(L)$ в группе $\mathbf{Z^2}$ лежит в смежном классе по какой-нибудь циклической подгруппе группы $\mathbf{Z^2}$. Выбор названия обусловлен тем, что при рассмотрении $\mathbf{Z^2}$ как целочисленной решетки на плоскости $\mathbf{R^2}$ образ линейного языка лежит на некоторой прямой в $\mathbf{R^2}$.

Лемма 3.2. *Пусть $L_i (i = 1, 2)$ – два линейных языка в Σ^*, образы которых $\mu(L_i)$ бесконечны в $\mathbf{Z^2}$ и отвечают циклическим подгруппам, порожденным независимыми элементами, скажем, c и d. Пусть f и g соответствующие представители смежных классов. Обозначим через $L_i[n]$ для $i = 1, 2$ подмножества всех элементов в L_i, образы которых равны fc^n или gd^n, соответственно. Тогда для любых $k, l \in \mathbf{N}$ язык*

$$K = \cup_{n=0}^{\infty} L_1[nk] L_2[nl]$$

нерационален, при условии, что бесконечно много объединяемых множеств правой части непусты.

Доказательство.

Пусть w некоторый прообраз элемента f^{-1}, а u – некоторый прообраз элемента g^{-1} в Σ^*. Язык

$$wKu = \cup_{n=0}^{\infty} (wL_1[nk])(L_2[nl]u)$$

по лемме 2.2 рационален или нерационален одновременно с языком K. Значит, не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что $f, g = 1$.

Как и в доказательстве леммы 3.1, используем лемму "о накручивании цикла". Достаточно длинное слово w из K представимо в виде

$$w = uv = xyz,$$

где $u \in L_1[nk], v \in L_2[nl], x, y, z \in \Sigma^*, y \neq 1$, а все элементы вида xy^tz для $t = 0, 1, ...$ принадлежат K. Более того, можно считать, что $\mu(y) \neq 1$. Действительно, слово y является меткой петли в автомате Γ, задающем K. Если для меток всех петель значения в $\mathbf{Z^2}$ оказались бы равными 1, то автомат Γ задавал бы язык, имеющий конечный образ в $\mathbf{Z^2}$, а это по условию леммы не так.

Ввиду независимости элементов c, d получаем $\mu(y) = c^{mk}d^{ml}$ для некоторого $m \geq 1$.

$$xy^tz = u_tv_t, \tag{6}$$

где $u_t \in L_1[(n+(t-1)m)k], v_t \in L_2[(n+(t-1)m)l]$.

Допустим, в формулах (6) в бесконечном множестве случаев деление слова xy^tz на подслова u_t, v_t происходит в подслове y^t, т.е. справедливы равенства вида

$$u_t = xy^py_1, v_t = y_2y^{t-p-1}z,$$

где $y_1y_2 = y$. Тогда

$$\mu(u_t) = \mu(x)\mu(y)^p\mu(y_1) = c^{(n+(t-1)m)k},$$

$$\mu(v_t) = \mu(y_2)\mu(y)^{t-p-1}\mu(z) = d^{(n+(t-1)m)l}. \tag{7}$$

Отсюда следуют равенства

$$\mu(x)\mu(y_1) = c^{(n+(t-p-1)m)k}d^{-mlp}, \mu(y_2)\mu(z) = c^{-(t-p-1)mk}d^{(n+pm)l}, \tag{8}$$

в которых левые части имеют конечное множество возможных значений, зависящих от разбиения $y = y_1y_2$, а правые – бесконечное множество значений при любом разбиении, что приводит к противоречию.

Аналогично разбираются другие возможные схемы разложения слов xy^tz в произведение подслов u_t, v_t (важно, чтобы схема использовалась бесконечно много раз, что для какой-то из них обязательно произойдет).

Лемма доказана.

Назовем язык $L \subset \Sigma^*$ конечно линейным, если L представляется как объединение конечного множества линейных языков.

Лемма 3.3. *Образ $\mu(L)$ конечно линейного языка является собственным подмножеством* $\mathbf{Z^2}$.

Доказательство.

Считая $\mathbf{Z^2}$, целочисленной решеткой на плоскости $\mathbf{R^2}$, получаем, что $\mu(L)$ лежит в конечном объединении прямых в $\mathbf{R^2}$. Ясно, что $\mu(L)$ не может совпадать с $\mathbf{Z^2}$.

4. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть G конечно порожденная группа, содержащая в качестве подгруппы свободную абелеву группу $\mathbf{Z^2}$ ранга 2. Тогда группа G не допускает универсальной рациональной структуры.*

Доказательство.

Предположим вначале, что $G = \mathbf{Z^2}$. Пусть L универсальная рациональная структура относительно гомоморфизма $\mu : \Sigma^* \to G$, где, как обычно, Σ^* – свободный моноид на конечном алфавите Σ.

Рассмотрим какую-нибудь кратчайшую схему построения языка L из конечных языков. Каждый из появляющихся в этом построении языков, таким образом, существенно используется при построении L. По лемме 2.5 все рациональные языки, использовавшиеся при построении L, универсальны. По лемме 3.3 язык L не может быть конечно линейным. В то же время, конечные языки конечно линейны. Значит, на каком-то шаге построения L впервые появляется не конечно линейный язык. Это не может произойти, если на этом шаге используется операция объединения языков. Рассмотрим два других возможных случая.

Пусть при построении L на каком-то шаге используется операция порождения подмоноида, приводящая к не конечно линейному языку: $L_2 = L_1^*$. Очевидно, что в этом случае в образе $\mu(L_1)$ найдется пара независимых элементов, скажем, $c = \mu(u), d = \mu(v), u, v \in L_1$. Язык u^*v^* лежит в L_2 и, следовательно, также является универсальным рациональным языком. Рассмотрим язык $K = \mu^{-1}(\textit{гр}(cd)) \cap u^*v^*$. Из-за независимости элементов c, d этот язык совпадает с языком K из леммы 3.1. Язык K из леммы 3.1 нерационален, значит, язык u^*v^* неуниверсален, противоречие.

Пусть при построении L на каком-то шаге используется операция умножения, приводящая к не конечно линейному языку: $L_3 = L_1L_2$, где сомножители еще конечно линейны. Пусть $L_1 = L_{11} \cup ... \cup L_{1t}$ – разложение в объединение линейных языков. Считаем, что эта запись минимальна по числу участвующих в ней множеств. Считаем, что в качестве циклических подгрупп, фигурирующих в определении линейных языков, берутся максимальные циклические подгруппы группы $\mathbf{Z^2}$. Образы линейных языков лежат на прямых в решетке $\mathbf{Z^2}$ плоскости $\mathbf{R^2}$. Поэтому образы $\mu(L_{1i}(i = 1, ..., t)$ лежат на разных прямых и могут пересекаться только по точкам. Мы включаем прообразы этих точек, если они есть, во все соответствующие языки.

Тогда каждое из множеств $L_{1i}(i = 1, ..., t)$ рационально, так как оно совпадает с полным прообразом в L_1 соответствующего смежного класса по максимальной циклической подгруппе группы $\mathbf{Z^2}$, а L_1 универсально. То же самое можно проделать и с множеством L_2. Так как L_3 не конечно линейно, и мы можем переходить к отдельным линейным составляющим множеств $L_i(i = 1, 2)$ в силу их рациональности, считаем, что $L_i(i = 1, 2)$ линейные множества с бесконечными образами в $\mathbf{Z^2}$, соответствуюшие различным максимальным циклическим подгруппам группы $\mathbf{Z^2}$, скажем, порожденным элементами c и d. Более того, мы предполагаем, что эти образы соответствуют самим подгруппам $\textit{гр}(c)$ и $\textit{гр}(d)$. Этого можно добиться уже использовавшимся приемом домножения на прообраз обратного элемента к соответствующему представителю смежного класса. [10] (см. также [2]) Известно описание (см.

[10], [2]) рациональных подмножеств свободных абелевых групп. Произвольное такое подмножество представимо в виде конечного объединения смежных классов по свободным подмоноидам. Свободный подмоноид из $\mu(L_i)(i = 1, 2)$ в силу сделанных предположений обязательно циклический, порожденный некоторой степенью элемента c или d, соответственно. Пусть, например, $\mu(L_1)$ содержит смежный класс с представителем c^q по свободному подмоноиду $(c^k)^*$. Умножая L_1 на прообраз элемента c^{-q}, считаем, что $\mu(L_1)$ содержит $(c^k)^*$. Аналогично приходим к случаю, когда $\mu(L_2)$ содержит подмоноид, порожденный элементом d^l. Тогда множество K из леммы 3.2 при данных значениях k, l удовлетворяет предположению леммы. А именно: язык $K = \cup_{n=0}^{\infty} L_1[nk]L_2[nl]$, определенный, как в лемме 3.2, есть полный прообраз в L_3 подгруппы $\mathit{гр}(c^k d^l)$. С одной стороны, он нерационален по лемме 3.2, с другой – рационален из-за универсальности L_3. Противоречие.

Итак, теорема доказана для случая $G = \mathbf{Z^2}$.

Рассмотрим общий случай. Согласно лемме 2.6 мы берем $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, ..., \sigma_n, \sigma_n^{-1}\}$ и строим последовательность (1). Пусть группа G допускает универсальную рациональную структуру $L \subseteq \Sigma^*$. Тогда по лемме 2.7 существует универсальная рациональная структура M группы G в группе F. Подмножество $M_1 = \eta^{-1}(\mathbf{Z^2}) \cap M$ рационально в F и принадлежит подгруппе $H = \eta^{-1}(\mathbf{Z^2})$. Подмножество M_1 универсально (доказательство, как в лемме 3.1). Как доказала Г.А. Баженова в [2], M_1 рационально и в H. Значит, оно может быть построено рациональными операциями из конечных подмножеств группы H. Возьмем полные прообразы M_1 и всех языков, из которых M_1 строится в H, в языке формально несократимых слов свободного моноида Σ^*. Все они являются универсальными рациональными языками по отношению к группе G и, конечно, к подгруппе $\mathbf{Z^2}$. При этом их образы лежат в $\mathbf{Z^2}$. Доказывается это в точности так же, как в лемме 2.8. Обозначим через L указанный полный прообраз множества M_1. Ясно, что $\mu(L) = \mathbf{Z^2}$. Мы не можем назвать L универсальной рациональной структурой на $\mathbf{Z^2}$ только потому, что гомоморфизм μ переводит Σ^* на большую в общем случае группу G.

Однако это не влияет на рассуждения. Дальнейшее доказательство осуществляется так же, как в рассмотренном случае $G = \mathbf{Z^2}$.

Теорема доказана.

5. Проблема Герстена-Шорта

В статье [1] задан вопрос о существовании такой рациональной структуры M на группе $\mathbf{Z^2}$, в которой M-рациональны все подгруппы группы $\mathbf{Z^2}$. Назовем такую структуру универсальной по подгруппам. Естественным образом определим понятие рационального языка, универсального по подгруппам.

Ответ на указанный вопрос дает

Теорема 2. *Группа* $\mathbf{Z^2}$ *не допускает рациональной структуры, универсальной по подгруппам.*

Доказательство.

По сути дела мы повторяем доказательство теоремы 1. Прежде всего нужно проследить справедливость используемых лемм в случае замены свойства универсальности языка на его естественный аналог – универсальность по подгруппам. Доказательства лемм 2.1, 2.3 и 2.6 повторяются буквально. Нужно только брать вместо произвольного рационального множества R подгруппу.

Основная сложность возникает с использованием леммы 2.4. В общей ситуации в данном случае ее прямой аналог несправедлив. Заметим, однако, что в доказательстве теоремы 1 приходилось применять лемму 2.4 при выводе рациональности множества K из лемм 3.1 и 3.2 из рациональности множества вида rKw для некоторых $r, w \in \Sigma^*$. Сейчас мы не будем это делать, а проведем рассуждения непосредственно с множеством rKw, обратившись к дополнительным сведениям о K.

Итак, пусть L универсальная по подгруппам рациональная структура. Пусть дана кратчайшая по числу шагов схема построения L из конечных языков.

Пусть на каком-то шаге построения L из конечных языков впервые появляется не конечно линейный язык. Как и в доказательстве теоремы 1 возьмем два случая.

Пусть K, как в лемме 3.1, а язык ru^*v^*w для некоторых $r, w \in \Sigma^*$ и элементов u, v, как в лемме 3.1, лежит в L. Выберем такой базис a, b группы $\mathbf{Z^2}$, относительно которого $c = a^k, d = b^l, k, l \geq 1$, где независимые элементы $c = \mu(u), d = \mu(v)$ имеют тот же смысл, что и в лемме 3.1. Пусть $f = \mu(rw) = a^p b^q, p, q \in \mathbf{Z}$.

Пусть сначала $p, q \geq 1$. Тогда $\mu(u^{pl}v^{qk}) = f^{lk}$. Легко видеть, что полный прообраз в ru^*v^*w циклической подгруппы $гр(f)$ совпадает с множеством rKw, где K из леммы 3.1. с теми же значениями параметров k, l. Противоречие между нерациональностью K и, следовательно, по лемме 2.2 – rKw и гипотетической универсальностью по подгруппам L.

Заметим теперь, что условия $p, q \geq 1$ легко добиться, добавляя в r некоторую степень элемента u, а в w – некоторую степень элемента v.

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой K появляется из леммы 3.2. Итак, пусть L содержит не конечно линейный подъязык rL_1L_2w, где языки L_1, L_2 еще конечно линейны. Как и в разборе соответствующего случая теоремы 1, представим минимальным образом языки L_1, L_2 в виде объединений линейных языков, соответствующих максимальным циклическим подгруппам группы $\mathbf{Z^2}$. Найдем среди них языки L_1' и L_2', произведение которых $L_1'L_2'$ не конечно линейно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00489).

Список литературы

[1] S.M. Gersten, H.B. Short, *Rational subgroups of biautomatic groups*, Annals of Mathematics, **134** (1991), 125–158.

[2] Г.А. Баженова, *О рациональных множествах в конечно порожденных нильпотентных группах*, Алгебра и логика, **39**:4 (2000), 379–394.

[3] Г.А. Баженова,*Об одном классе групп, замкнутых относительно свободных произведений*, Сибирский математический журнал, **41**:4 (2000), 740–743.

[4] G. A. Bazhenova, *Rational sets in polycyclic groups*, В сб.научных трудов международной конференции "Комбинаторные и вычислительные методы в математике Омск, ОмГУ, (1999), 76–81.

[5] R.H. Gilman, *Formal languages and infinite groups*, DIMACS series in discrete mathematics and theoretical computer science, **25** (1996), 27–51.

[6] V.A. Roman'kov, *On the occurence problem for rational subsets of a group*, В сб. трудов международной конференции "Комбинаторные и вычислительные методы в математике Омск, ОмГУ, (1999), 235–242.
[7] D.B.A. Epstein, J.W. Cannon, D.F. Holt, S.V.F. Levy, M.S. Paterson, W.P. Thurston, *Word processing in groups*, Boston-London, Jones and Bartlett, 1992.
[8] О. В. Григоренко, *Об универсальных рациональных языках относительно данной группы*, Вестник Омского университета, 4 (2005), 21–23.
[9] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, М., Мир, 1980.
[10] S. Eilenberg, *Automata Languages, and Machines*, A,B, New-York, London: Academic Press,1974, 1976.

Романьков В.А.
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
пр. Мира 55 а,
644077, г. Омск, Россия
E-mail address: romankov@math.omsu.omskreg.ru