S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 460–481 (2007) УДК 512.5
MSC 13A99

ГРАФЫ КОММУТАТИВНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ ДВУСТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНЫХ $\mathbb{Q}$-ГРУПП

А. А. МИЩЕНКО, А. В. ТРЕЙЕР

Abstract. Let Γ be a finite graph and G_Γ be a partially commutative nilpotent group of class 2 corresponding to graph Γ. We investigate commuting graphs and logic formulas for G_Γ associated with them.

Содержание

Mischenko A.A., Treyer A.V., Commuting graphs for partially commutative nilpotent $\mathbb{Q}$-groups of class 2.

Поступила 26 апреля 2006 г., опубликована 26 ноября 2007 г.

1. Введение

Интерес к частично коммутативным группам вызван многими замечательными свойствами этих групп. К этим свойствам можно отнести удобные нормальные формы, разрешимость большинства алгоритмических проблем, богатую подгрупповую структуру. Частично коммутативные группы естественным образом возникают во многих разделах математики, в частности в компьютерных науках. Подробное описание частично коммутативных групп можно найти в работе Е.С. Есыпа, И.В. Казачкова и В.Н. Ремесленникова [3].

Частично коммутативную группу можно определить в любом многообразии групп, в частности, в многообразии нильпотентных групп фиксированной ступени нильпотентности.

В настоящей работе частично коммутативные группы определяются и исследуются в многообразии $\mathbb{Q}$-нильпотентных групп ступени нильпотентности 2, где $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. Как и в многообразии всех групп, частично коммутативные группы в многообразии двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп полностью определяются заданием конечного неориентированного графа Γ, а потому, соответствующая группа обозначается G_Γ (определение в §2).

Опишем основную задачу, решению которой посвящена настоящая работа. Любое конечное множество $\bar{g} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ элементов группы G определяет граф коммутативности $\Delta_{\bar{g}}$ этой системы: вершинами графа являются элементы системы, и пара (g_i, g_j) определяет ребро тогда и только тогда, когда элементы g_i, g_j - коммутируют в G. Существует достаточно большое число работ по графам коммутативности. Эти графы играют существенную роль в исследованиях по теории конечных простых групп (см. [6] для библиографии, и [5] – первую работу в этом направлении). По графу $\Delta_{\bar{g}}$ естественным образом пишется экзистенциальная формула $\phi(\Delta)$ которая истинна на элементах системы $\bar{g}$ (определение в §2). Основной вопрос, поставленный в нашей работе – для каких графов Δ формула $\phi(\Delta)$ выполняется на группе G_Γ.

Пусть $\Phi(G_\Gamma) = \{\phi(\Delta) | \phi(\Delta) - \text{истинна на группе } G_\Gamma\}$. Основная проблема в этом направлении, принадлежащая В.Н. Ремесленникову, состоит в следующем: пусть G_{Γ_1} и G_{Γ_2} – частично коммутативные группы, построенные на графах Γ_1 и Γ_2 соответственно, тогда $\Phi(G_{\Gamma_1}) = \Phi(G_{\Gamma_2})$ тогда и только тогда, когда G_{Γ_1} универсально эквивалентна группе G_{Γ_2}.

Ясно, что наша задача является важной частью решения этой проблемы для многообразия двуступенно нильпотентных групп.

В §3 мы решаем вопрос выполнимости экзистенциальных формул в случае, когда группа строится с помощью линейного графа. В §4 изучается выполнимость экзистенциальных формул на группах, построенных при помощи цикла. И, наконец, в §5 мы находим необходимое и достаточое условие выполнимости экзистенциальных формул в общем случае, то есть когда частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа строится по произвольному конечному неориентированному графу.

Пользуясь случаем, мы выражаем благодарность нашему научному руководителю, Ремесленникову Владимиру Никаноровичу, за поставленную задачу и помощь в ее решении.

2. Предварительные сведения

2.1. **Частично коммутативные двуступенно нильпотентные группы.** Пусть Γ – конечный неориентированный граф, $X = \{x_1 \ldots, x_n\}$ – множество его вершин.

F_Γ – частично коммутативная группа, соответствующая графу Γ с множеством образующих X и определяющими соотношениями вида: $[x_i, x_j] = x_i^{-1}x_j^{-1}x_ix_j = 1$, для всех $x_i, x_j \in X$, которые соединены ребром в графе Γ. Подробнее о частично коммутативных группах можно узнать в [3].

Пусть $N_{2,\Gamma}$ – частично коммутативная группа, соответствующая графу Γ, в классе двуступенно нильпотентных групп. Можно показать, что группа $N_{2,\Gamma}$ – без кручения, следовательно, существует мальцевское пополнение $N_{2,\Gamma}^{\mathbb{Q}}$ [1]. Обозначим через G_Γ группу $N_{2,\Gamma}^{\mathbb{Q}}$.

Отметим, что из двуступенной нильпотентности группы G_Γ следует, что для любых элементов группы x, y и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ выполняется тождество: $[x^\alpha, y^\beta] = [x, y]^{\alpha\beta}$.

Следующее предложение описывает нормальную форму для элементов группы G_Γ

Предложение 1. *(1) Фактор-группа $\widehat{G_\Gamma} = G_\Gamma/G'_\Gamma$ имеет структуру векторного пространства размерности n над $\mathbb{Q}$ с базой из образов элементов $x_1, \ldots, x_n$.*

(2) Коммутант G'_Γ группы G_Γ имеет структуру векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$ с базой $y_{ij} = [x_i, x_j]$, где $y_{ij} = [x_i, x_j] \neq 1$ в группе G_Γ и $i < j$.

(3) Любой элемент группы G_Γ единственным образом представим в виде

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \prod y_{kl}^{\beta_{kl}}, \tag{2.1}$$

где $x_i \in X$, $y_{kl} = [x_k, x_l] \neq 1$, $k < l$, и $\alpha_i, \beta_{kl} \in \mathbb{Q}$.

Доказательство.

(1) Профакторизуем группу G_Γ по ее коммутанту G'_Γ. Т.к. $\mathbb{Q}$-группа G_Γ двуступенно нильпотентна, то фактор-группа $\widehat{G_\Gamma} = G_\Gamma/G'_\Gamma$ – свободная абелева $\mathbb{Q}$-группа. Следовательно, $\widehat{G_\Gamma}$ – имеет структуру векторного пространства размерности n над полем $\mathbb{Q}$. Базисными элементами будут образы $x_1, \ldots, x_n$.

(2) Так как группа G_Γ двуступенно нильпотентна, то коммутаннт G'_Γ представляет собой абелеву $\mathbb{Q}$-группу. Известно, что в свободной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группе $F(X)$ коммутант $F'(X)$ – свободная абелева $\mathbb{Q}$-группа, т.е. $F'(X)$ наделен структурой векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$ с базисом $\{y_{kl} | \ k < l\}$. Заметим, что коммутант G'_Γ группы G_Γ получается факторизацией коммутанта $F'(X)$ по
$< y_{ij} >$, где $y_{ij} = 1$ в группе G_Γ. Следовательно, коммутант G'_Γ обладает структурой векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$ с базисом $\{y_{kl} | \ y_{kl} \neq 1\}$, где $y_{kl} \neq 1$ в группе G_Γ.

(3) Так как группа G_Γ двуступенно нильпотентна, то $x_j^\beta x_i^\alpha = x_i^\alpha x_j^\beta [x_i, x_j]^{-\alpha\beta}$, где $i < j$. Следовательно, любой элемент группы

G_Γ можно записать в виде (2.1). Единственность записи следует из предыдущих пунктов. ■

Далее мы всегда будем рассматривать элементы группы по модулю коммутанта группы:

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \prod y_{kl}^{\beta_{kl}} \equiv x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mod G'_\Gamma. \tag{2.2}$$

Покажем как перемножаются произвольные элементы группы. Пусть

$$g = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \prod y_{kl}^{\beta_{kl}},$$
$$h = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} \prod y_{st}^{\xi_{st}},$$

тогда произведение элементов g и h имеет следующий вид:

$$gh = x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n} \prod y_{kl}^{\eta_{kl}}, \text{где } \delta_i = \alpha_i + \gamma_i, i = 1, \dots, n, \eta_{kl} = \beta_{kl} + \xi_{kl} - \alpha_l \gamma_k. \tag{2.3}$$

Предложение 2. *Пусть* $f = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $g = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$. *Тогда* $[f, g] = \prod y_{ij}^{\Delta_{ij}}$, *где* $y_{ij} = [x_i, x_j] \neq 1$, $\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{vmatrix}$, $i < j$.

Доказательство. Из *предложения 1* следует, что $[f, g] = \prod y_{ij}^{\gamma_{ij}}$, покажем, что $\gamma_{ij} = \Delta_{ij}$. Пусть $i < j$ и $[x_i, x_j] \neq 1$, тогда

$$\begin{aligned} & x_j^{\alpha_j} x_i^{\beta_i} = \\ = \ & x_i^{\beta_i} x_j^{\alpha_j} x_j^{-\alpha_j} x_i^{-\beta_i} x_j^{\alpha_j} x_i^{\beta_i} = \\ = \ & x_i^{\beta_i} x_j^{\alpha_j} [x_j^{-\alpha_j}, x_i^{-\beta_i}] = \\ = \ & x_i^{\beta_i} x_j^{\alpha_j} [x_j, x_i]^{\alpha_j \beta_i} = \\ = \ & x_i^{\beta_i} x_j^{\alpha_j} y_{ij}^{-\alpha_j \beta_i} \end{aligned}$$

Таким образом, легко проверить, что $[x_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j}, x_i^{\beta_i} x_j^{\beta_j}] = y_{ij}^{\Delta_{ij}}$. Из этого следует утверждение предложения.

Определение 1. *Два элемента группы* G_Γ *назовем коллинеарными, если их централизаторы совпадают.*

Определение 2. *Рангом множества* $M = \{g_1, \dots, g_n\}$ *элементов группы* G_Γ *назовем максимальное количество попарно неколлинеарных элементов множества* M.

2.2. **Экзистенциальные формулы.** По конечному графу T определим экзистенциальную формулу $\phi(T)$. Каждой вершине графа T поставим в соответствие одну из букв $z_1, \dots, z_n$ формулы $\phi(T)$, где $|V(T)| = n$. Формула имеет вид:

$$\phi(T) = \exists z_1 \dots z_n (\bigwedge [z_i, z_j] = 1 \wedge \bigwedge [z_k, z_l] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_i z_i \neq 1), \tag{2.4}$$

где $[z_i, z_j] = 1$ тогда и только тогда, когда вершины соответствующие z_i и z_j в графе T соединены ребром, и $[z_k, z_l] \neq 1$ если вершины соответствующие z_k и z_l в графе T не соединены ребром [4].

Нас будет интересовать вопрос выполнимости формулы $\phi(T)$, где T – конечный граф, на частично коммутативной двуступенно нильпотентной группе G_Γ. В частности, при каких графах T формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ, при условии, что Γ – фиксированный конечный граф. В дальнейшем за T мы будем принимать конечный связный неориентированный граф.

2.3. **Раздутие и Сжатие.** В этом параграфе введем необходимые нам операции на графах.

Рассмотрим граф T и вершину $v \in V(T)$, обозначим через $B_1(v)$ – множество вершин графа T соседних с v, при этом будем считать, что $v \in B_1(v)$. Иногда, если речь идет о каком-нибудь конкретном графе T, множество соседних с v вершин будем обозначать $B_1(v, T)$.

Определение 3. *Две вершины x и y графа T называются эквивалентными, если для любой вершины $v \in V \backslash \{x, y\}$ выполнено следующее: v – соседняя вершина с x тогда и только тогда, когда v – соседняя вершина с y. Обозначим за $[v]$ – класс эквивалентных с v вершин.*

Определение 4. *Элементарным раздутием первого рода графа T будем называть граф $\hat{T}$, полученный из T следующим образом:*

(1) Выбираем вершину $v \in V(T)$.
(2) Добавляем вершину v' в граф.
(3) Соединяем v' со всеми вершинами соседними с v в графе T и самой вершиной v, так, чтобы вершины v' и v были эквивалентны. (см. Рис. 2.1).

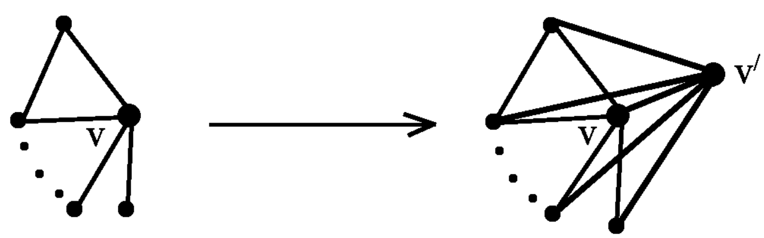

Рис. 2.1. Элементарное раздутие первого рода

Определение 5. *Пусть в графе T есть вершина v, для которой $|[v]| > 1$, назовем элементарным сжатием первого рода графа T, такой граф $\hat{T}$, который получен из графа T с помощью удаления одной вершины из $[v]$, вместе с исходящими из нее ребрами.*

Мы определили элементарное раздутие и сжатие первого рода, как графы получаемые из исходных, также понятия элементарного раздутия и сжатия можно воспринимать как операцию перехода от исходного графа T к графу $\hat{T}$. Таким образом, нетрудно заметить, что операция элементарного сжатия первого рода является обратной к операции элементарного раздутия первого, рода.

Важно отметить, что если в графе T, $|[v]| = 1$ для любой вершины $v \in V(T)$, то операцию элементарного сжатия первого рода уже нельзя применять к графу T. Поэтому количество возможных элементарных сжатий первого рода для конечного графа T конечно и равно $|[v_1]| + \ldots + |[v_n]| - n$, где $v_i \in V(T),\ i = 1, \ldots n$.

Предложение 3. *Пусть граф $\hat{T}$ – элементарное раздутие первого рода графа T. Формула $\phi(T)$ выполнена на группе G_Γ тогда и только тогда, когда формула $\phi(\hat{T})$ выполнена на группе G_Γ.*

Доказательство. Пусть формула $\phi(T)$ выполнена на группе G_Γ, т.е. $\exists g_1, \ldots, g_k \in G_\Gamma$ на которых выполняется формула $\phi(T)$. Докажем, что найдутся такие элементы $\hat{g_1}, \ldots, \hat{g_{k+1}} \in G_\Gamma$ на которых будет выполнена формула $\phi(\hat{T})$.

Пусть при элементарном раздутии первого рода графа T, добавили вершину v' эквивалентную v. Пусть вершине v соответствует элемент $g_t \in G_\Gamma$. Тогда вершине v' можно сопоставить элемент $g_t^{\alpha_t}$, где $\alpha_t \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 1$, а всем остальным вершинам те же элементы, которые им соответствовали. Таким образом, мы построили систему из $k+1$ элемента группы G_Γ на которых понятным образом выполнена формула $\phi(\hat{T})$.

Обратно. Если формула $\phi(\hat{T})$ выполняется на группе G_Γ, покажем, что и формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ. Формула $\phi(T)$ будет выполняться на тех же элементах группы G_Γ, что и формула $\phi(\hat{T})$, кроме одного добавленного при элементарном раздутии первого рода. ■

Определение 6. *Будем говорить, что граф $\tilde{T}$ получен из графа T элементарным раздутием второго рода, если существует ребро $e \in E(T)$ и вершина $v_0 \in V(\tilde{T})$ такие, что граф $\tilde{T}$ отличается от графа T только на вершину v_0 и множество ребер $\{\bar{v_0 x_i} |\ x_i \in B_1(v_1, T) \cap B_1(v_2, T)\}$, где v_1 и v_2 – вершины ребра e. (См. Рис. 2.2).*

Как и в случае элементарного сжатия первого рода, определим аналогичным образом элементарное сжатие второго рода, как операцию обратную к элементарному раздутию второго рода. Нетрудно понять, что к конечному графу T можно применить лишь конечное число элементарных сжатий второго рода.

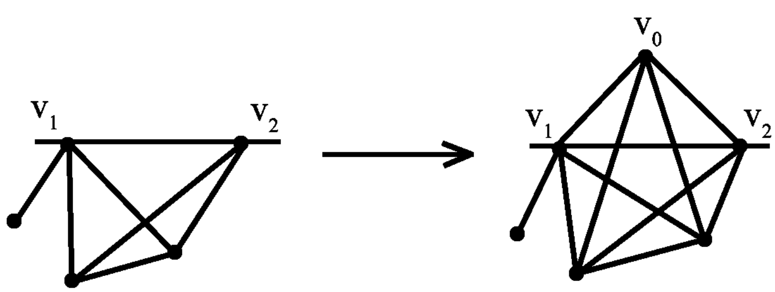

Рис. 2.2. Элементарное раздутие второго рода

Предложение 4. *Пусть граф $\tilde{T}$ – элементарное раздутие второго рода графа T. Тогда формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ, тогда и только тогда, когда формула $\phi(\tilde{T})$ выполняется на группе G_Γ.*

Доказательство. Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ, т.е. $\exists\ g_1, \ldots, g_k \in G_\Gamma$, на которых выполнена формула $\phi(T)$.

Так как граф $\tilde{T}$ – получен из T элементарным раздутием второго рода, то по определению существует ребро $e \in E(T)$, удовлетворяющее определению. Пусть вершинам v_1 и v_2 ребра e будут соответствовать элементы g_1 и g_2 группы G_Γ. Поставим в соответствие вершине $v_0 \in V(\tilde{T})$ слово $g_1^\alpha g_2^\beta \in G_\Gamma$ (α и β выбираются так, чтобы ни одна буква не сократилась), а всем остальным вершинам графа $\tilde{T}$ те же элементы, что соответствовали им в графе T. На этих элементах и будет выполнятся формула $\phi(\tilde{T})$.

Обратно. Если формула $\phi(\tilde{T})$ выполняется на группе G_Γ, покажем, что и формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ. Формула $\phi(T)$ будет выполнянтся на тех же элементах группы G_Γ, что и формула $\phi(\tilde{T})$, кроме одного добавленного при элементарном раздутии второго рода. ■

Определение 7. *Назовем граф T' полным сжатием первого и второго рода графа T, если граф T' получен из графа T последовательностью элементарных сжатий первого и второго рода, так, что к T' нельзя применить элементарное сжатие первого или второго рода еще раз.*

3. Случай линейного графа

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда Γ – линейный граф длины $n-1$ (n – вершин, $n-1$ – ребро). Для удобства обозначим нашу группу – G_n. Мы хотим узнать для каких конечных графов T на группе G_n выполняется формула $\phi(T)$.

Заметим, что в группе G_n коммутант G_n' совпадает с центром группы $Z(G_n)$.

Разобьем нашу задачу на две части. В первой части решим задачу, если T – дерево, во второй, в случае произвольного конечного графа, сведем задачу к первой части.

Для доказательства основных фактов сформулируем лемму о централизаторах элементов группы G_n.

Лемма 1. *(1) Если $g = x_1^\alpha,\ \alpha \neq 0$, тогда $C(g) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \mod Z(G_n)$.*

(2) Если $g = x_n^\alpha,\ \alpha \neq 0$, тогда $C(g) = x_{n-1}^{\alpha_1} x_n^{\alpha_2} \mod Z(G_n)$.

(3) Если $g = x_i^\alpha,\ \alpha \neq 0, i \neq 1, n$, тогда $C(g) = x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \mod Z(G_n)$.

(4) Если $g = x_i^\alpha x_{i+1}^\beta,\ \alpha\beta \neq 0$, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \mod Z(G_n)$.

(5) Если $g = x_i^{\alpha_i} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}},\ \alpha_i\alpha_{i+2} \neq 0$, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma} x_{i+1}^{\beta} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}\gamma} \mod Z(G_n)$, $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(6) Если $g = x_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j},\ \alpha_i\alpha_j \neq 0,\ |j-i| > 2$, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma} x_j^{\alpha_j\gamma} \mod Z(G_n)$, $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(7) Если $g = x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}},\ \alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} \neq 0$, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma} x_{i+1}^{\beta} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}\gamma} \mod Z(G_n)$, $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(8) Если $g = x_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j} x_k^{\alpha_k},\ \alpha_i\alpha_j\alpha_k \neq 0$ и g не удовлетворяет предыдущему случаю, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma} x_j^{\alpha_j\gamma} x_k^{\alpha_k\gamma} \mod Z(G_n)$, $\gamma \in \mathbb{Q}$, то есть централизатор элемента g по модулю $Z(G_n)$ имеет размерность 1.

(9) Размерность централизатора элемента g по модулю $Z(G_n)$ равна 1 если элемент g не удовлетворяет условиям предыдущих пунктов.

Доказательство.

(1) Из определяющих соотношений группы G_n следует, что x_1 коммутирует со всеми элементами вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$.

Из *Предложения 2* следует, что других элементов в централизаторе элемента x_1^{α} быть не может.

(2) Аналогично п.1

(3) Из определяющих соотношений группы G_n следует, что элемент вида $x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$ коммутирует с x_i. Пусть существует x_k такое, что $h = x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_k^{\alpha_k} \mod Z(G_n) \in C(g)$ Из *Предложения 2* следует, что $[g,h] = y_{ki}^{\Delta_{ki}}$, где $\Delta_{ki} \neq 0$. Таким образом, $C(g) = x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \mod Z(G_n)$.

Случаи пунктов 4,5,6,7,8 доказываются аналогично.

Если элемент g из п.9, то он представлен произведением как минимум четырех образующих, следовательно, из них можно выбрать 3 образующих так, чтобы они попали под условия п.8. Таким образом, $C(g) = g^{\gamma} \mod Z(G_n)$, где $\gamma \in \mathbb{Q}$. ■

3.1. **T – дерево.** Обозначим за $Path_k$ – линейный граф длины k (k ребер, $k+1$ вершина).

Рис. 3.1. Граф $Path_k$

Предложение 5. *Если формула $\phi(Path_k)$, где $k \geq 3$, выполняется на множестве элементов $M = \{g_1, \dots, g_{k+1}\}$ группы G_n, то ранг множества M равен $k+1$.*

Доказательство. Докажем, что ранг множества M не может быть меньше $k+1$.

Пусть ранг M меньше чем $k+1$. Тогда, среди элементов $\{g_1, \dots, g_n\}$ найдутся по крайней мере два коллинеарных элемента g_i и g_j. Так как $k \geq 3$, то найдется элемент $g_l \in M$, который коммутирует либо с g_i, либо с g_j, причем $g_l \neq g_i$ и $g_l \neq g_j$, для определенности будем считать, что $[g_l, g_i] = 1$. Поскольку $C(g_i) \equiv C(g_j)$, то и $[g_l, g_j] = 1$. Следовательно, в графе $Path_k$ должен быть цикл длины 3. Полученное противоречие доказывает предложение.

Предложение 6. *Пусть $n \geq 4$. Тогда формула $\phi(Path_k)$, где $k < n$ выполняется на группе G_n, а формула $\phi(Path_n)$ – не выполняется.*

Доказательство. Формула $\phi(Path_t)$ имеет вид:

$$(3.1) \quad \exists\, z_1 \dots z_{t+1} \Big(\bigwedge_{|i-j|=1} [z_i, z_j] = 1 \wedge \bigwedge_{|k-l|>1} [z_k, z_l] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_{i} z_i \neq 1 \Big).$$

Сначала покажем, что формула $\phi(Path_{n-1})$ выполняется на группе G_n.

Из определения группы G_n следует, что формула (3.1) при $t = n-1$ выполняется на образующих элементах группы $x_1, \dots, x_n$. Если $k < n-1$, то формула $\phi(Path_k)$ будет выполнятся на образующих $x_1, \ldots, x_{k+1}$ группы G_n.

Докажем, что формула $\phi(Path_n)$ не выполняется на группе G_n.

Пусть в группе G_n существуют элементы $g_1, \ldots, g_{n+1}$ удовлетворяющие формуле (3.1) для $t = n$.

По *Предложению 5* и *Лемме 1* среди элементов $g_1, \ldots, g_{n+1}$ не может быть больше чем $n-2$ элемента с размерностью централизатора 3.

Тогда среди элементов $g_1, \ldots, g_{n+1}$ найдутся три, у которых размерность централизатора будет меньше чем 3, а значит, найдется элемент g_i с размерностью централизатора 1 или 2, где $i \neq 1, n+1$. Покажем, что такого быть не может.

Если g_i имеет централизатор размерности 1, то есть $C(g) = g^{\gamma}$, то тогда $g_{i-1} = g_i^{\beta}$, а $g_{i+1} = g_i^{\gamma}$. Это значит, что $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 1$, что не удовлетворяет формуле $\phi(Path_n)$. Следовательно, среди $g_1, \ldots, g_{n+1}$ нет элементов с размерностью централизатора 1.

Рассмотрим случай когда g_i имеет централизатор размерности 2. Из *леммы 1* следует, что вовзможны только 5 случаев, когда элемент g_i имеет вид:

(1) $g_i = x_1^{\alpha}$ с централизатором $C(g_i) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.
(2) $g_i = x_n^{\alpha}$ с централизатором $C(g_i) = x_{n-1}^{\alpha_1} x_n^{\alpha_2}$.
(3) $g_i = x_k^{\alpha} x_{k+1}^{\beta}$, $\alpha\beta \neq 0$ с централизатором $C(g_i) = x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$.
(4) $g_i = x_k^{\alpha_k} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}}$, $\alpha_k \alpha_{k+2} \neq 0$ с централизатором $C(g_i) = x_k^{\alpha_k \gamma} x_{k+1}^{\beta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma}$, $\gamma, \beta \in \mathbb{Q}$.
(5) $g_i = x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}}$, $\alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \neq 0$, тогда $C(g_i) = x_k^{\alpha_k \gamma} x_{k+1}^{\beta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma}$, $\gamma, \beta \in \mathbb{Q}$.

Пусть g_i из п.1. Тогда $g_{i-1} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, а $g_{i+1} = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$. Следовательно, $g_{i-1} \in C(g_{i+1})$, а потому $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 1$. Это значит, что на системе элементов $g_1, \ldots, g_{n+1}$ формула $\phi(Path_n)$ не выполняется. Если g_i из п.2, то доказательство аналогично п.1

Пусть g_i из п.3. Тогда $g_{i-1} = x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$, а $g_{i+1} = x_k^{\beta_k} x_{k+1}^{\beta_{k+1}}$. Следовательно, $g_{i-1} \in C(g_{i+1})$, а потому $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 1$. Это значит, что на системе элементов $g_1, \ldots, g_{n+1}$ формула $\phi(Path_n)$ не выполняется.

Пусть g_i из п.4. Тогда $g_{i-1} = x_k^{\alpha_k \gamma_1} x_{k+1}^{\beta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma_1}$, а $g_{i+1} = x_k^{\alpha_k \gamma_2} x_{k+1}^{\delta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma_2}$. Следовательно, $g_{i-1} \in C(g_{i+1})$, а потому $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 1$. Это значит, что на системе элементов $g_1, \ldots, g_{n+1}$ формула $\phi(Path_n)$ не выполняется. Если g_i из п.5, то доказательство аналогично п.4

Таким образом, мы пришли к противоречию. Это означает, что формула $\phi(Path_n)$ не выполняется на группе G_n. ■

Из доказательства *предложения 6* легко вывести следующие факты.

Следствие 1. *Пусть T – дерево, и формула $\phi(T)$ выполняется в G_n на элементах $\{g_v | v \in V(T)\}$. Тогда среди $\{g_v | v \in V(T)\}$ не может быть элементов с размерностью централизатора 1.*

Следствие 2. *Пусть T – дерево, и формула $\phi(T)$ выполняется в G_n на элементах $\{g_v | v \in V(T)\}$. Тогда все g_v с размерностью централизатора 2 могут соответствовать только висячим вершинам дерева T.*

Следствие 3. *Пусть T – дерево, и формула $\phi(T)$ выполняется в G_n на элементах $\{g_v | v \in V(T)\}$. Тогда элементы, соответствующие внутренним* *вершинам дерева T, являются степенями образующих группы G_n, кроме x_1 и x_n.*

Следствие 4. *Пусть T – конечный связный граф с количеством вершин не меньше трех, и формула $\phi(T)$ выполняется в G_n на элементах $\{g_v | v \in V(T)\}$. Пусть среди элементов $\{g_v | v \in V(T)\}$ есть элемент с размерностью централизатора 1. Тогда в графе T будет цикл длины 3.*

Следствие 5. *Пусть T – конечный связный граф с количеством вершин не меньше трех, и формула $\phi(T)$ выполняется в G_n на элементах $\{g_v | v \in V(T)\}$. Пусть среди элементов $\{g_v | v \in V(T)\}$ есть элемент с размерностью централизатора 2, соответствующий внутренней вершине. Тогда в графе T будет цикл длины 3.*

Определение 8. *Обозначим за $\overline{Path_k}$ класс деревьев, полученных из $Path_k$ добавлением висячих вершин к невисячим вершинам.*

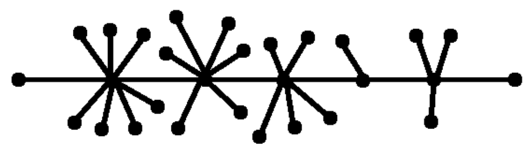

Рис. 3.2. Граф из класса $\overline{Path_k}$

Предложение 7. *$\phi(T)$ выполняется на G_n для всех деревьев T из класса $\overline{Path_k}$, где $k < n$.*

Доказательство. Зафиксируем $k < n$. Из *предложения 6* следует, что формула $\phi(Path_k)$ выполняется на группе G_n. Покажем, что для всех T из $\overline{Path_k}$ формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_n.

Для этого выделим в графе длиннейший путь T_0 длинны k. Поставим в соответствие вершинам T_0 образующие $x_1, \ldots, x_{k+1}$ группы G_n. Возьмем внутреннюю вершину v графа T_0, пусть ей соответствует x_i, где $1 < i \leq k$. Рассмотрим все висячие вершины соединенные с v. Поставим им в соответствие элементы вида $x_{i-1}^{\alpha} x_{i+1}^{\beta}$, где $\alpha\beta \neq 0$. Так как $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, то мы всегда сможем выбрать α и β так, чтобы элементы соответствующие висячим вершинам между собой не коммутировали, а коммутировали только с x_i. Аналогично для других внутренних вершин графа T_0. Таким образом, построили систему элементов $\{g_v | v \in V(T)\}$ группы G_n на которых выполняется формула $\phi(T)$. ■

Теорема 1. *Если $\phi(T)$ выполняется на G_n, где T – дерево, то найдется $k < n$, такое, что $T \in \overline{Path_k}$.*

Доказательство. Предположим, что $T \notin \overline{Path_k}$ $\forall$ $k < n$. Рассмотрим длиннейший путь в дереве T, длинны m. Обозначим этот путь за $Path_m$. Поскольку $\phi(T)$ выполняется на G_n, то из *предложения 6* следует, что $m < n$. Так как $T \notin \overline{Path_m}$, то найдется внутренняя вершина g_l в $Path_m$ из которой выходят три пути с длиной не меньше 2. Значит, у g_l будут три соседние внутренние вершины, обозначим их за $g_1,\ g_2,\ g_3$.

Так как $g_l,\ g_1,\ g_2,\ g_3$ – внутренние вершины, то из *следствия 3* следует, что $g_l = x_i^{\alpha_i},\ g_1 = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}},\ g_2 = x_{i_2}^{\alpha_{i_2}},\ g_3 = x_{i_3}^{\alpha_{i_3}}$, то есть они являются степенями образующих группы G_n. Это значит, что g_l коммутирует со всеми элементами вида $x_i^{\beta_i} x_{i_1}^{\beta_{i_1}} x_{i_2}^{\beta_{i_2}} x_{i_3}^{\beta_{i_3}}$ для всех $\beta_i, \beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \beta_{i_3} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, у элемента g_l размерность централизатора больше 3, что противоречит *лемме 1.* Полученное противоречие доказывает, что $T \in \overline{Path_m}$. ■

3.2. **T – произвольный граф.** Обозначим за Cyc_n – цикл длины n без диагоналей.

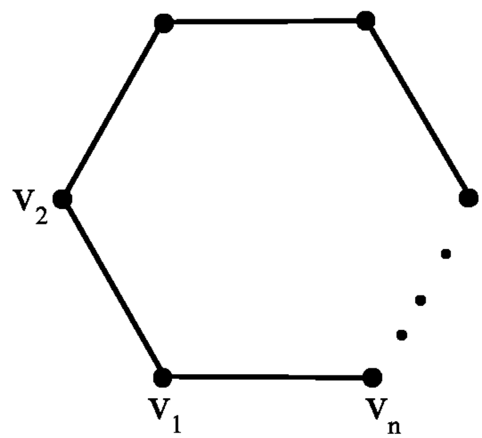

Рис. 3.3. Граф Cyc_n

Предложение 8. *Если формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_n, то в графе T не существует циклов длины больше 3 без диагоналей.*

Доказательство. Пусть в графе нашелся цикл длины $k > 3$ без диагоналей. Это значит, что формула $\phi(Cyc_k)$ выполняется на группе G_n. Рассмотрим элементы $g_1, ..., g_k$ группы G_n на которых выполнена формула $\phi(Cyc_k)$.

(1) Среди $g_1, ..., g_k$ нет элементов с размерностью централизатора 1. Иначе, по *Следствию 4* в графе Cyc_k будет цикл длины 3, то есть диагональ.
(2) Среди $g_1, ..., g_k$ нет элементов с размерностью централизатора 2. Иначе, по *Следствию 5* в графе Cyc_k будет цикл длины 3, то есть диагональ.
(3) Следовательно, среди $g_1, ..., g_k$ могут быть только степени образующих элементов $x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_i \in \mathbb{Q}$.

    Покажем, что степеней одинаковых образующих элементов быть не может. Предположим, что есть одинаковые степени $x_i^{\alpha_1}$ и $x_i^{\alpha_2}$, тогда в графе Cyc_k они должны стоять рядом, иначе образуется диагональ. Пусть $g_2 = x_i^{\alpha_1}$, а $g_3 = x_i^{\alpha_2}$. Тогда так как g_1 коммутирует с g_2 из этого следует, что g_1 коммутирует с g_3, а так как $k > 3$, следовательно, в Cyc_k получается диагональ.

Следовательно, среди $g_1, ..., g_k$ нет степеней одинаковых образующих элементов. Но такого быть не может, так как по определнию в группе G_n нет подобных соотношений среди образующих.

Полученное противоречие доказывает предложение. ■

Лемма 2. *Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_n для произвольного графа T. Тогда граф T', полученный из графа T полным сжатием первого и второго рода, является деревом.*

Доказательство. Согласно *предложению 3* и *предложению 4* формула $\phi(T')$ выполняется на группе G_n. Пусть T' не дерево, то есть в T' нашелся цикл, согласно *предложению 12*, в T' не может быть циклов длины больше чем 3 без диагоналей, значит есть цикл длины 3.

Обозначим за $g_1,\ g_2,\ g_3$ – элементы группы G_n соответствующие вершинам цикла. Рассмотрим случаи:

(1) Пусть $dim\overline{C(g_1)} = 1$, тогда $g_2 = g_1^{\alpha}$ согласно *лемме 1*, а это значит, что $g_1 \sim g_2$, что противоречит условию, поскольку все эквивалентные вершины были удалены при сжатии первого рода. Значит, элементов с размерностью централизатора 1 быть не может.

(2) Пусть $dim\overline{C(g_1)} = 2$ и $dim\overline{C(g_2)} = 2$. Значит, по *следствию 5*, для любого g_k, $[g_1, g_k] = 1 \iff [g_2, g_k] = 1$, то есть $g_1 \sim g_2$. Значит, среди элементов $g_1,\ g_2,\ g_3$ нет двух с размерностью централизатора 2.

(3) Пусть $dim\overline{C(g_1)} = 3$ и $dim\overline{C(g_2)} = 3$. Значит $g_1 = x_i^{\alpha_i}$ и $g_2 = x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$. Согласно *лемме 1* $g_3 = x_i^{\alpha_1} x_{i+1}^{\alpha_2}$. Если из вершины соответствующей элементу g_3 не выходит больше ребер, то такой цикл должен был быть удален при сжатии второго рода. Значит, существует g_4 такой, что $[g_3, g_4] = 1$, но $g_4 \neq x_i^{\gamma_1}$ и $g_4 \neq x_{i+1}^{\gamma_2}$, иначе были бы эквивалентные элементы. Следовательно, $g_4 = x_i^{\beta_1} x_{i+1}^{\beta_2}$. Значит, $dim\overline{C(g_3)} = 2$ и $dim\overline{C(g_4)} = 2$, из предыдущего пункта следует, что $g_3 \sim g_4$, что противоречит условию.

Разобранные случаи показывают, что циклов в T' быть не может, что и доказывает нашу лемму. ■

Теорема 2. *Формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_n тогда и только тогда, когда $T' \in \overline{Path_k}$, где T' получается из T полным сжатием первого и второго рода.*

Доказательство. Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_n, тогда, по *предложению 3* и *предложению 4*, формула $\phi(T')$ выполняется на G_n. Из *леммы 4* следует, что T' – дерево. Следовательно, по *Теореме 3* существует $k < n$ такое, что $T' \in \overline{Path_k}$.

Обратно. Формула $\phi(T_0)$ выполняется на группе G_n для любого дерева $T_0 \in \overline{Path_k}$ и для $\forall k < n$. Следовательно, $\phi(T')$ выполняется на G_n. Из *предложения 3* и *предложения 4* следует, что формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_n. ■

4. Случай цикла без диагоналей

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда Γ – цикл длины n без диагоналей, будем считать, что $n \geq 4$. Поскольку группа строится по циклу длины n, то мы будем записывать индексы образующих группы по $\mod n$, то есть, если $i = 1$, то индекс $i-1$ будет соответствовать образующему x_n, и наоборот, если $i = n$, то индекс $i+1$ будет соответствовать x_1.

Мы хотим узнать для каких конечных графов T на группе G_{Cyc_n} выполняется формула $\phi(T)$.

Заметим, что как и в группе G_n, в G_{Cyc_n} коммутант группы G'_{Cyc_n} совпадает с центром группы $Z(G_{Cyc_n})$.

Для доказательства основных фактов сформулируем лемму о централизаторах элементов группы G_{Cyc_n}.

Лемма 3. *(1) Если $g = x_i^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, тогда $C(g) = x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \mod Z(G_{Cyc_n})$.*

(2) Если $g = x_i^{\alpha} x_{i+1}^{\beta}$, $\alpha\beta \neq 0$, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \mod Z(G_{Cyc_n})$.

(3) Если $g = x_i^{\alpha_i} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}}$, $\alpha_i\alpha_{i+2} \neq 0$, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma} x_{i+1}^{\beta} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$, $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(4) Если $g = x_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j}$, $\alpha_i\alpha_j \neq 0$, $|j-i| > 2$, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma} x_j^{\alpha_j\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$, $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(5) Если $g = x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}}$, $\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} \neq 0$, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma} x_{i+1}^{\beta} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$, $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(6) Если $g = x_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j} x_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i\alpha_j\alpha_k \neq 0$ и g не удовлетворяет предыдущему случаю, тогда $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma} x_j^{\alpha_j\gamma} x_k^{\alpha_k\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$, $\gamma \in \mathbb{Q}$, то есть централизатор элемента g по модулю $Z(G_{Cyc_n})$ имеет размерность 1.

(7) Размерность централизатора элемента g по модулю $Z(G_{Cyc_n})$ равна 1 если элемент g не удовлетворяет условиям предыдущих пунктов.

Доказательство.

(1) Из определения группы G_{Cyc_n}, $x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$ коммутирует с x_i (по модулю центра $Z(G_n)$). Покажем, что слов другого вида в централизаторе элемента x_i быть не может. Предположим $\exists\, x_k$ такое, что $C(g) = x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_k^{\beta} \mod Z(G_{Cyc_n})$, где $k \neq i-1, i, i+1$ и $\beta \neq 0$. Рассмотрим коммутатор $[x_i, x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_k^{\beta}] = y_{ik}^{\Delta}$, где $\Delta = 1\cdot\beta - 0\cdot\alpha_i = \beta \neq 0$, следовательно, $[x_i, x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_k^{\beta}] \neq 1$. Значит данный элемент не лежит в $C(g)$.

(2) Из определения группы G_{Cyc_n}, $x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$ коммутирует с $x_i^{\alpha} x_{i+1}^{\beta}$. Покажем, что других слов быть в централизаторе быть не может. Предположим, что $\exists\, x_k$, такое, что $C(g) = x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_k^{\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$, где $\gamma \neq 0$ и $k \neq i, i+1$. Без потери общности предположим, что $k > i+1$. Рассмотрим коммутатор $[x_i^{\alpha} x_{i+1}^{\beta}, x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_k^{\gamma}] = y_{ik}^{\Delta}$, где $\Delta = \alpha\cdot\gamma - 0\cdot\alpha_i = \alpha\gamma \neq 0$, следовательно, $[x_i^{\alpha} x_{i+1}^{\beta}, x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_k^{\gamma}] \neq 1$.

(3) Проверим, что $g = x_i^{\alpha_i} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}} \mod Z(G_{Cyc_n})$ коммутирует с элементами вида: $x_i^{\alpha_i\gamma} x_{i+1}^{\beta}\ \ x_{i+2}^{\alpha_{i+2}\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$, где $\gamma \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим коммутатор $[x_i^{\alpha_i} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}}, x_i^{\alpha_i\gamma} x_{i+1}^{\beta} x_{i+2}^{\alpha_{i+2}\gamma}] = y_{ii+2}^{\Delta}$, где $\Delta = \alpha_i \cdot \alpha_{i+2}\gamma - \alpha_{i+2}\cdot\alpha_i\gamma$, т.к. x_{i+1}^{β} коммутирует со всеми данными буквами, то x_{i+1}

– сократится и останется только y^{Δ}_{ii+2}, т.к. $\Delta = 0$, то коммутатор – единичный.

Покажем, что других слов в централизаторе нет. Предположим, что $\exists\ x_k$, такое, что $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma}x_{i+1}^{\beta}x_{i+2}^{\alpha_{i+2}\gamma}x_k^{\xi} \mod Z(G_{Cyc_n}))$, где $k \neq i, i+1, i+2$ и $\xi \neq 0$. Аналогично предыдущим пунктам в коммутаторе $[g, x_i^{\alpha_i\gamma}x_{i+1}^{\beta}x_{i+2}^{\alpha_{i+2}\gamma}x_k^{\xi}]$ найдется неединичный коммутатор y^{Δ}_{ik}, если $k > i$, или y^{Δ}_{ki+2}, если $k < i$.

(4) Проверим, что $g = x_i^{\alpha_i}x_j^{\alpha_j}$ коммутирует с элементами вида: $x_i^{\alpha_i\gamma}x_j^{\alpha_j\gamma}$, где $\gamma \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим коммутатор $[x_i^{\alpha_i}x_j^{\alpha_j}, x_i^{\alpha_i\gamma}x_j^{\alpha_j\gamma}] = y^{\Delta}_{ij}$, где $\Delta = \alpha_i \cdot \alpha_j\gamma - \alpha_j \cdot \alpha_i\gamma = 0$. Следовтельно, $[x_i^{\alpha_i}x_j^{\alpha_j}, x_i^{\alpha_i\gamma}x_j^{\alpha_j\gamma}] = 1$.

Покажем, что других слов в централизаторе нет. Предположим, что $\exists\ x_k$, такое, что $C(g) = x_i^{\alpha_i\gamma}x_j^{\alpha_j\gamma}x_k^{\xi} \mod Z(G_n)$, где $k \neq i, j$ и $\xi \neq 0$. Аналогично предыдущим пунктам в коммутаторе $[g, x_i^{\alpha_i\gamma}x_j^{\alpha_j\gamma}x_k^{\xi}]$ найдется не единичный коммутатор y^{Δ}_{ik}, если $|i-k| > 1$, или y^{Δ}_{kj}, если $|j-k| > 1$. А одно из неравенств $|i-k| > 1$ или $|k-j| > 1$ всегда будет выполнено (кроме случая п.5).

(5) Аналогично случаю п.3.

(6) Аналогично п.4.

(7) Если элемент g не попадает под условия предыдущих пунктов, то он представлен произведением как минимум четырех образующих, следовательно, из них можно выбрать 3 образующих так, чтобы они попали под условия п.6. Т.е. $C(g) = g^{\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$, где $\gamma \in \mathbb{Q}$. ■

4.1. **T – k-циклический граф.**

Определение 9. *Конечный граф T назовем k-циклическим графом, если в графе T есть только один цикл длины k без диагоналей.*

Предложение 9. *Если формула $\phi(Cyc_k)$, где $k \geq 3$, выполняется на множестве элементов $M = \{g_1, \ldots, g_{k+1}\}$ группы G_n, то ранг множества M равен $k+1$.*

Доказательство. Докажем, что ранг множества M не может быть меньше $k+1$.

Пусть ранг M меньше чем $k+1$. Тогда среди элементов $\{g_1, \ldots, g_n\}$ найдутся по крайней мере два коллинеарных элемента g_i и g_j. Так как $k \geq 3$, то найдется элемент $g_l \in M$ который коммутирует либо с g_i, либо с g_j, причем $g_l \neq g_i$ и $g_l \neq g_j$, для определенности будем считать, что $[g_l, g_i] = 1$. Поскольку $C(g_i) \equiv C(g_j)$, то и $[g_l, g_j] = 1$. Следовательно, в графе $Path_k$ должен быть цикл длины 3. Полученное противоречие доказывает предложение.

Предложение 10. *Пусть $n \geq 4$. Тогда формулы $\phi(Cyc_n)$ и $\phi(Path_k)$, где $k \leq n$, выполняются на группе G_{Cyc_n}, а формулы $\phi(Cyc_{n+1})$ и $\phi(Path_{n+1})$ – не выполняются.*

Доказательство. Сначала покажем, что формула $\phi(Cyc_n)$ выполняется на группе G_{Cyc_n}. Формула $\phi(Cyc_n)$ имеет вид:

$$\exists\, z_1 \dots z_n (\bigwedge_{|i-j|=1} [z_i, z_j] = 1 \wedge\ [z_1, z_n] = 1 \wedge \tag{4.1}$$
$$\bigwedge_{\{(k,l)|\ |k-l|>1,(k,l)\neq(1,n)\}} [z_k, z_l] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i\neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_{i} z_i \neq 1).$$

Образующие $x_1 \dots x_n$ группы G_n удовлетворяют формуле (4.1), это следует из определения группы G_{Cyc_n}. Очевидно, что на образующих $x_1, \dots, x_{k+1}$ группы G_{Cyc_n} будет выполняться формула $\phi(Path_k)$, где $k < n-1$.

Рассмотрим случай, когда $k = n-1$. Тогда формула $\phi(Path_{n-1})$ выполняется на элементах $g_1, \dots, g_n$, где $g_1 = x_1,\ g_2 = x_2, \dots, g_{n-1} = x_{n-1},\ g_n = x_{n-1}x_n$.

Если $k = n$, то формула $\phi(Path_n)$ выполняется на элементах $g_1, \dots, g_{n+1}$, где $g_1 = x_1x_n,\ g_2 = x_1,\ g_3 = x_2, \dots, g_n = x_{n-1},\ g_{n+1} = x_{n-1}x_n$.

Докажем, что формула $\phi(Cyc_{n+1})$ не выполняется на группе G_{Cyc_n}. Формула $\phi(Cyc_{n+1})$ выглядит следующим образом:

$$\exists\, z_1 \dots z_{n+1} (\bigwedge_{|i-j|=1} [z_i, z_j] = 1 \wedge\ [z_1, z_{n+1}] = 1 \wedge \tag{4.2}$$
$$\bigwedge_{\{(k,l)|\ |k-l|>1,(k,l)\neq(1,n+1)\}} [z_k, z_l] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i\neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_{i} z_i \neq 1).$$

Из предыдущей леммы следует, что в группе G_{Cyc_n} есть элементы с централизатором размерности 3 — это степени образующих группы G_{Cyc_n}, то есть $x_i^{\alpha_i} \mod Z(G_{Cyc_n})$, всего таких элементов будет n.

Пусть в группе G_{Cyc_n} существуют элементы $g_1, \dots, g_{n+1}$ удовлетворяющие формуле (4.2). Среди этих элементов не может быть степеней одного и того же образующего элемента, иначе образовался бы цикл длинны меньше чем $n+1$, что не удовлетворяет формуле $\phi(Cyc_{n+1})$. Следовательно, среди этих элементов найдется один элемент у которого размерность централизатора будет меньше чем 3. Покажем, что такого быть не может.

Если g_i имеет централизатор размерности 1, то есть $C(g_i) = g_i^{\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$, то тогда $g_{i-1} = g_i^{\beta} \mod Z(G_{Cyc_n})$, а $g_{i+1} = g_i^{\gamma} \mod Z(G_{Cyc_n})$. Это значит, что $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 1$, что не удовлетворяет формуле $\phi(Cyc_{n+1})$.

Рассмотрим случай когда g_i имеет централизатор размерности 2. Из предыдущей леммы следует, что:

(1) $g_i = x_k^{\alpha} x_{k+1}^{\beta},\ \alpha\beta \neq 0$ с централизатором $C(g_i) = x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$.
(2) $g_i = x_k^{\alpha_k} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}},\ \alpha_k\alpha_{k+2} \neq 0$ с централизатором $C(g_i) = x_k^{\alpha_k\gamma} x_{k+1}^{\beta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma}$, $\gamma, \beta \in \mathbb{Q}$.
(3) $g_i = x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}},\ \alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2} \neq 0$, тогда $C(g_i) = x_k^{\alpha_k\gamma} x_{k+1}^{\beta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma}$, $\gamma, \beta \in \mathbb{Q}$.

Пусть g_i из п.1. Тогда $g_{i-1} = x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$, а $g_{i+1} = x_k^{\beta_k} x_{k+1}^{\beta_{k+1}}$, из *леммы 3* следует, что $g_{i-1} \in C(g_{i+1})$, следовательно, $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 1$, что не удовлетворяет формуле $\phi(Cyc_{n+1})$.

Пусть g_i из п.2. Тогда $g_{i-1} = x_k^{\alpha_k\gamma_1} x_{k+1}^{\beta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma_1}$, а $g_{i+1} = x_k^{\alpha_k\gamma_2} x_{k+1}^{\delta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma_2}$, из *леммы 3* следует, что $g_{i-1} \in C(g_{i+1})$, следовательно, $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 1$, что не удовлетворяет формуле $\phi(Cyc_{n+1})$.

Пусть g_i из п.3. Тогда $g_{i-1} = x_k^{\alpha_k\gamma_1} x_{k+1}^{\beta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma_1}$, а $g_{i+1} = x_k^{\alpha_k\gamma_2} x_{k+1}^{\delta} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}\gamma_2}$, из *леммы 3* следует, что $g_{i-1} \in C(g_{i+1})$, следовательно, $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 1$, что не удовлетворяет формуле $\phi(Cyc_{n+1})$.

Таким образом, мы пришли к противоречию. Это означает, что формула $\phi(Cyc_{n+1})$ не выполняется на группе G_{Cyc_n}.

Докажем, что формула $\phi(Path_{n+1})$ не выполняется на группе G_{Cyc_n}. Из вышедоказанного следует, что внутренним вершинам графа $Path_{n+1}$ могут соответствовать только степени различных образующих группы G_{Cyc_n}, поскольку размерность их централизатора равна 3 (иначе возникают циклы длины 3). Всего внутренних вершин в графе $Path_{n+1}$ будет n. Значит, в формуле $\phi(Path_{n+1})$ должны быть использованы все образующие группы G_{Cyc_n}, но по определению группы они образуют цикл. Следовательно, формула $\phi(Path_{n+1})$ не может выполняться на группе G_{Cyc_n}. ■

Из доказательства *предложения 10* легко вывести следующие факты.

Следствие 6. *Если $\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n} на элементах $\{g_i\}$, где T – дерево или n-циклический граф, то среди $\{g_i\}$ не может быть элементов с размерностью централизатора 1.*

Следствие 7. *Если $\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n} на элементах $\{g_i\}$, где T – дерево или n-циклический граф, то g_k с размерностью централизатора 2 могут соответствовать только висячим вершинам графа T.*

Следствие 8. *Если $\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n} на элементах $\{g_i\}$, где T – дерево или n-циклический граф, то элементы соответствующие внутренним вершинам графа T являются степенями образующих группы G_{Cyc_n}.*

Следствие 9. *Если $\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n} на элементах $\{g_i\}$, где T – конечный связный граф с количеством вершин не меньше трех, и среди элементов $\{g_i\}$ есть элемент с размерностью централизатора 1, то в графе T будет цикл длины 3.*

Следствие 10. *Если $\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n} на элементах $\{g_i\}$, где T – конечный связный граф с количеством вершин не меньше трех, и среди элементов $\{g_i\}$ есть элемент с размерностью централизатора 2 соответствующий внутренней вершине, то в графе T будет цикл длины 3.*

Определение 10. *Обозначим за $\overline{Cyc_k}$ класс n-циклических графов, полученных из Cyc_k добавлением висячих вершин к невисячим вершинам. (См. Рис. 4.1).*

Предложение 11. *$\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n} для $T \in \overline{Cyc_n}$, а также $\forall\ T \in \overline{Path_k}$, где $k \le n$.*

Доказательство. Зафиксируем $k \le n$. Из *предложения 10* следует, что формула $\phi(Path_k)$ выполняется на группе G_{Cyc_n}. Покажем, что $\forall\ T \in \overline{Path_k}$ формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_{Cyc_n}.

Найдем элементы на которых выполняется формула $\phi(T)$. Выделим в графе T длиннейший путь – T_0. Его длина будет равна k. Поставим в соответствие вершинам T_0 элементы $g_1, \dots, g_{k+1}$. В зависимости от k возможны случаи:

(1) Если $k < n - 1$, то элементам g_i будут соответствовать образующие x_i, то есть $g_i = x_i\ \forall\ i = 1, \dots, k+1$.

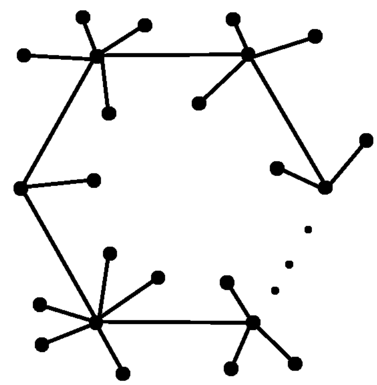

Рис. 4.1. Граф из класса $\overline{Cyc_k}$

(2) Если $k = n-1$, то $g_1 = x_1,\ g_2 = x_2, \dots, g_{n-1} = x_{n-1},\ g_n = x_{n-1}x_n$.
(3) Если $k = n$, то $g_1 = x_1x_n,\ g_2 = x_1,\ g_3 = x_2, \dots, g_n = x_{n-1},\ g_{n+1} = x_{n-1}x_n$.

Возьмем внутреннюю вершину v графа T_0, пусть ей соответствует g_i, где $1 < i \leq k$. Рассмотрим все висячие вершины соединенные с v ребром. Поставим им в соответствие элементы вида $g_{i-1}^{\alpha}g_{i+1}^{\beta}$, где $\alpha\beta \neq 0$. Так как $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, то мы всегда сможем выбрать α и β так, чтобы элементы соответствующие висячим вершинам между собой не коммутировали (то есть в них не происходило сокращений), а коммутировали только с g_i. Аналогично для других внутренних вершин графа T_0.

Теперь покажем, что $\forall\ T \in \overline{Cyc_n}$ формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_{Cyc_n}. Аналогичным образом найдем в графе T цикл длинны n и обозначим его за T_0. Сопоставим внутренним вершинам цикла образующие группы $x_1, \dots, x_n$. А всем висячим вершинам сопоставим слова аналогично вышеприведенному методу. Таким образом, получим те элементы группы на которых выполняется формула $\phi(T)$. ■

Теорема 3. *Если $\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n}, где T – дерево, то найдется $k \leq n$, такое, что $T \in \overline{Path_k}$.*

Доказательство. Предположим, что $T \notin \overline{Path_k}\ \forall\ k \leqslant n$. Рассмотрим длиннейший путь в дереве T, пусть его длина равна m обозначим этот путь за $Path_m$. Поскольку $\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n}, то из *предложения 10* следует, что $m < n$. Так как $T \notin \overline{Path_m}$, то найдется внутренняя вершина g_l в $Path_m$ из которой выходят три пути с длиной не меньше 2. Значит, у g_l будут три соседние внутренние вершины, обозначим их за $g_1,\ g_2,\ g_3$.

Так как $g_l,\ g_1,\ g_2,\ g_3$ – внутренние вершины, то из *следствия 8* следует, что $g_l = x_i^{\alpha_i},\ g_1 = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}},\ g_2 = x_{i_2}^{\alpha_{i_2}},\ g_3 = x_{i_3}^{\alpha_{i_3}}$, то есть являются степенями образующих группы G_{Cyc_n}. Это значит, что g_l коммутирует со всеми элементами вида $x_i^{\beta_i}x_{i_1}^{\beta_{i_1}}x_{i_2}^{\beta_{i_2}}x_{i_3}^{\beta_{i_3}}$ для $\forall\ \beta_i, \beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \beta_{i_3} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, у элемента g_l размерность централизатора больше 3, что противоречит *лемме 3*. Полученное противоречие доказывает, что $T \in \overline{Path_m}$.

Теорема 4. *Если $\phi(T)$ выполняется на G_{Cyc_n}, где T – n-циклический граф, то $T \in \overline{Cyc_n}$.*

Доказательство. Предположим, что $T \notin \overline{Cyc_n}$. Так как T – n-циклический граф, то по определению в нем есть единственный цикл длины n. Обозначим этот цикл за Cyc_n. Так как $T \notin \overline{Cyc_n}$ то найдется внутренняя вершина g_l в Cyc_n из которой выходят три пути с длиной не меньше 2. Значит, у g_l будут три соседние внутренние вершины, обозначим их за $g_1,\ g_2,\ g_3$.

Так как $g_l,\ g_1,\ g_2,\ g_3$ – внутренние вершины, то из *следствия 8* следует, что $g_l = x_i^{\alpha_i},\ g_1 = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}},\ g_2 = x_{i_2}^{\alpha_{i_2}},\ g_3 = x_{i_3}^{\alpha_{i_3}}$, то есть являются степенями образующих группы G_{Cyc_n}. Это значит, что g_l коммутирует со всеми элементами вида $x_i^{\beta_i}x_{i_1}^{\beta_{i_1}}x_{i_2}^{\beta_{i_2}}x_{i_3}^{\beta_{i_3}}$ для $\forall\ \beta_i, \beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \beta_{i_3} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, у элемента g_l размерность централизатора больше 3, что противоречит *лемме 3*. Полученное противоречие доказывает, что $T \in \overline{Cyc_n}$.

4.2. **T – произвольный конечный граф.** В этом пункте мы разберем случай, когда T – произвольный конечный граф.

Предложение 12. *Если формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_{Cyc_n}, то в графе не существует циклов длины больше 3, кроме цикла длины n, без диагоналей.*

Доказательство. Пусть в графе T нашелся цикл длины $k > 3$ без диагоналей, причем $k \neq n$. Это значит, что формула $\phi(Cyc_k)$ выполняется на группе G_{Cyc_n}. Рассмотрим множество элементов $M = \{g_1, ..., g_k\}$ группы G_{Cyc_n} на которых выполнена формула $\phi(Cyc_k)$. *Следствие 9* и *Следствие 10* накладывает следующие ограничения на множество элементов M:

(1) В множестве M нет элементов с размерностью централизатора 1. Иначе, согласно *Следствию 9*, в графе Cyc_k будет цикл длины 3. Это значит, что в Cyc_k будет диагональ.

(2) В множестве M нет элементов с размерностью централизатора 2. Иначе, по *Следствию 10* в графе Cyc_k будет цикл длины 3. Это значит, что в Cyc_k будет диагональ.

Следовательно, в множестве M могут быть только элементы с размерностью централизатора 3, значит, по *Лемме 3* в множестве M будут только степени образующих группы G_{Cyc_n}.

По *Предложению 9* ранг множества M равен k, следовательно, в множестве M нет двух степеней одного и того же образующего элемента группы G_{Cyc_n}. Но тогда и в графе Cyc_n – графе по которому строилась группа G_{Cyc_n}, будет подцикл длины k.

Полученное противоречие полностью доказывает предложение. ■

Лемма 4. *Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группа G_{Cyc_n} для произвольного графа T, тогда граф $T^{'}$, полученный из графа T полным сжатием первого и второго рода, является деревом или n-циклическим графом.*

Доказательство. Согласно *предложению 3* и *предложению 4* формула $\phi(T^{'})$ выполняется на группе G_{Cyc_n}. Пусть $T^{'}$ не дерево, то есть в $T^{'}$ нашелся цикл отличный от Cyc_n, согласно *предложению 12*, в $T^{'}$ не может быть циклов длины больше чем 3, кроме Cyc_n, без диагоналей, значит, есть цикл длины 3.

Обозначим за g_1, g_2, g_3 – элементы группы G_{Cyc_n} соответствующие вершинам цикла. Рассмотрим случаи:

(1) Пусть $dim\overline{C(g_1)} = 1$, тогда согласно *лемме 3* $g_2 = g_1^{\alpha}$, а это значит, что $g_1 \sim g_2$, что противоречит условию, поскольку все эквивалентные вершины были удалены при сжатии первого рода. Значит, элементов с размерностью централизатора 1 быть не может.
(2) Пусть $dim\overline{C(g_1)} = 2$ и $dim\overline{C(g_2)} = 2$. Значит, по *следствию 10*, для любого g_k, $[g_1, g_k] = 1 \Longleftrightarrow [g_2, g_k] = 1$, то есть $g_1 \sim g_2$. Следовательно, среди элементов g_1, g_2, g_3 нет двух с размерностью централизатора 2.
(3) Пусть $dim\overline{C(g_1)} = 3$ и $dim\overline{C(g_2)} = 3$. Значит, $g_1 = x_i^{\alpha_i}$ и $g_2 = x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$. Согласно *лемме 1* $g_3 = x_i^{\alpha_1} x_{i+1}^{\alpha_2}$. Если из вершины соответствующей элементу g_3 не выходит больше ребер, то такой цикл должен был быть удален при сжатии второго рода. Значит, существует g_4 такой, что $[g_3, g_4] = 1$, но $g_4 \neq x_i^{\gamma_1}$ и $g_4 \neq x_{i+1}^{\gamma_2}$, иначе были бы эквивалентные элементы. Следовательно, $g_4 = x_i^{\beta_1} x_{i+1}^{\beta_2}$. Значит, $dim\overline{C(g_3)} = 2$ и $dim\overline{C(g_4)} = 2$, из предыдущего пункта следует, что $g_3 \sim g_4$, что противоречит условию.

Разобранные случаи показывают, что циклов кроме Cyc_n в $T^{'}$ быть не может. Покажем единственность данного цикла. Если нашлось два таких цикла, то внутренним вершинам циклов могут соответствовать только степени образующих элементов группы G_{Cyc_n}. Следовательно, у нас встретятся две степени одного образующего элемента, но такие вершины эквивалентны и, следовательно, они должны были быть удалены при сжатии первого рода. Полученное противоречие доказывает, что $T^{'}$ – n-циклический граф. ■

Теорема 5. *Формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_{Cyc_n} тогда и только тогда, когда $T^{'} \in \overline{Path_k}$ или $T^{'} \in \overline{Cyc_n}$, $k \leq n$, где $T^{'}$ получается из T полным сжатием первого и второго рода.*

Доказательство. Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_n. Тогда, по *предложению 3* и *предложению 4*, формула $\phi(T^{'})$ выполняется на G_{Cyc_n}. Из *леммы 4* следует, что $T^{'}$ – дерево или n-циклический граф. Следовательно, если $T^{'}$ – дерево, то по *Теореме 3* существует $k \leq n$ такое, что $T^{'} \in \overline{Path_k}$, а если $T^{'}$ – n-циклический граф, то по *Теореме 4* следует, что $T^{'} \in \overline{Cyc_n}$.

Обратно. Формула $\phi(T_0)$ выполняется на группе G_{Cyc_n} для любого дерева $T_0 \in \overline{Path_k}$ и для любого n-циклического графа $T_0 \in \overline{Cyc_n}$, где k – любое не превосходящее n. Следовательно, $\phi(T^{'})$ выполняется на G_n. Из *предложения 3* и *предложения 4* следует, что формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_{Cyc_n}. ■

5. Произвольный случай

Определение 11. *Будем говорить, что граф $\check{\Gamma}$ получен из графа Γ элементарным раздутием третьего рода если существуют две вершины v_1 и $v_2 \in V(\Gamma)$ и вершина $v_0 \in V(\check{\Gamma})$ такие, что ребро $v_1v_2 \notin E(\Gamma)$ и граф $\check{\Gamma}$ отличается от графа Γ только на вершину v_0 и множество ребер $\{v_0x_i|\ x_i \in B_1(v_1,\Gamma) \cap B_1(v_2,\Gamma)\}$.*

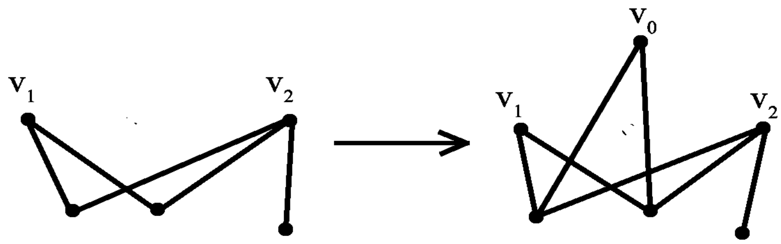

Рис. 5.1. Элементарное раздутие третьего рода

Предложение 13. *Пусть граф $\check{T}$ – элементарное раздутие третьего рода графа T. Тогда формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ, тогда и только тогда, когда формула $\phi(\check{T})$ выполняется на группе G_Γ.*

Доказательство. Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ. Пусть v_0 – вершина, которую мы добавили при элементарном раздутии третьего рода графа T, v_1 и $v_2 \ \in V(T)$ – вершины, с помощью которых произошло раздутие. Пусть вершине v_1 соответствовал элемент g_1, а вершине v_2 – элемент g_2 группы G_Γ, тогда поставим в соответствие вершине v_0 элемент g_0 равный $g_1^\alpha g_2^\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Понятно, что элемент g_0 будет коммутировать только с теми элементами, которые коммутировали и с g_1 и с g_2, а это значит, что формула $\phi(\check{T})$ будет выполнятся на G_Γ.

Обратно. Пусть формула $\phi(\check{T})$ выполняется на G_Γ на элементах $g_1 \dots g_k$, где вершина соответствующая g_k была получена при элементарном раздутии третьего рода. Значит, формула $\phi(T)$ будет выполнена на элементах $g_1 \dots g_{k-1}$. ■

Определение 12. *Граф Γ_0 является подграфом графа Γ в особом смысле ($\Gamma_0 \lhd \Gamma$) тогда и только тогда, когда $V_0 \subseteq V$ и $E_0 = \{v_iv_j|\ v_i, v_j \in V_0, v_iv_j \in E\}$*

Предложение 14. *Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ. Тогда для любого графа $T_0 \lhd T$ формула $\phi(T_0)$ выполняется на группе G_Γ.*

Доказательство. Пусть формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ на элементах $g_1, \dots, g_k$, обозначим это множество $G_1 = \{g_1, \dots, g_k\}$. Пусть граф T_0 строится на подмножестве вершин $V_0 = V(T_0) \subset V(T)$. Возьмем те элементы группы, которые соответствуют вершинам множества V_0. Обозначим это множество G_2. Очевидно, что $G_2 \subset G_1$. Формула $\phi(T_0)$ будет выполнятся на группе G_Γ на элементах из множества G_2. ■

Теорема 6. *Формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ для произвольного графа T тогда и только тогда, когда существует граф Γ_0 – полученный из Γ последовательностью элементарных раздутий и сжатий первого, второго и третьего рода, такой, что $T \lhd \Gamma_0$.*

Доказательство. Будем считать $G_\Gamma =< x_1, \dots, x_n | \; R(\Gamma) >$, где $R(\Gamma)$ – соотношения построенные на графе Γ.

Пусть существуют $g_1, \dots, g_k \in G_\Gamma$ на которых выполнена формула $\phi(T)$. Запишем элементы g_i через образующие по модулю коммутанта группы G_Γ:

$$g_1 = x_1^{\alpha_{11}} \cdots x_n^{\alpha_{1n}},$$
$$g_2 = x_1^{\alpha_{21}} \cdots x_n^{\alpha_{2n}},$$
$$\dots$$
$$g_n = x_1^{\alpha_{n1}} \cdots x_n^{\alpha_{nn}},$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим граф Γ, на группе G_Γ выполнена формула $\phi(\Gamma)$, так как вместо искомых элементов можно взять образующие группы. Добавим в граф Γ элементарным раздутием первого рода вершину $x_1^{\alpha_{11}}$, эквивалентную x_1, а затем уберем элементарным сжатием первого рода вершину x_1, эквивалентную $x_1^{\alpha_{11}}$. Заметим, что полученный граф Γ_1 изоморфен графу Γ. Будем считать его за Γ. Аналогичным образом получим вершины $x_2^{\alpha_{12}}, \dots, x_n^{\alpha_{1n}}$.

Далее, применяя элементарное раздутие второго или третьего рода к вершинам $x_1^{\alpha_{11}}$ и $x_2^{\alpha_{12}}$, добавим в граф Γ вершину $t_1 = x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}}$. Затем, применяя элементарное раздутие второго или третьего рода к вершинам t_1 и $x_3^{\alpha_{13}}$, добавим в граф вершину $t_2 = x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}}$, и так далее, пока не получим вершину

$$t_s = x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \cdots x_n^{\alpha_{1n}} = g_1.$$

Действуя аналогичным образом, добавим в граф вершину $g_2 = x_1^{\alpha_{21}} \cdots x_n^{\alpha_{2n}}$. И так далее, пока не добавим в граф все вершины g_i. Полученный граф назовем Γ_0.

Понятно, что если слова g_i и g_j коммутируют, то соответствующие вершины в графе Γ_0 будут соединены ребром. Следовательно, если взять множество вершин, которым соответствуют слова g_i $\forall i$, и взять максимальный подграф на этом множестве вершин, то мы получим граф T. Следовательно, граф $T \lhd \Gamma_0$.

Обратно. Пусть существует Γ_0 – раздутие графа Γ такое, что $T \lhd \Gamma_0$. Формула $\phi(\Gamma)$ выполняется на группе G_Γ. Так как Γ_0 – раздутие графа Γ, следовательно, формула $\phi(\Gamma_0)$ выполняется на группе G_Γ. Так как $T \lhd \Gamma_0$, то по *предложению 14* следует, что $\phi(T)$ выполняется на G_Γ. ■

Список литературы

[1] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И., *Основы теории групп*, М.: Наука, 1982, 288.

[2] Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп*, М.: Мир, 1980.

[3] Evgenii S. Esyp, Ilia V. Kazatchkov, Vladimir N. Remeslennikov, *Divisibility Theory and Complexity of Algorithms for Free Partially Commutative Groups*, Groups, Languages, Algorithms. Contemoprary Mathematics, 378 (2005), 319–348.

[4] Andrew J. Duncan, Ilia V. Kazatchkov, Vladimir N. Remeslennikov, *Centraliser Dimension and Universal Classes of Groups*, submitted to Proceedings of the LMS.

[5] R. Brauer, K.A. Fowler, *On groups of even order*, Ann. Math. 62 (1955), 565–583.

[6] C. Bates, D. Bundy, S. Perkins, P. Rowley, *Commuting Involution Graphs for Symmetric Groups*, J. Algebra 266 (2003), 133-–153.

Алексей Александрович Мищенко
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644099, Омск, Россия
E-mail address: alexei.mishenko@gmail.com

Александр Викторович Трейер
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644099, Омск, Россия
E-mail address: trayer_sas@rambler.ru