S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 450–459 (2006) УДК 519.172.2
MSC 05C15

ПУТЕВЫЕ РАЗБИЕНИЯ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

А. Н. ГЛЕБОВ, Д. Ж. ЗАМБАЛАЕВА

Abstract. A graph G is said to be (a, b)-partitionable for positive intergers a, b if its vertices can be partitioned into subsets V_1, V_2 such that in $G[V_1]$ any path contains at most a vertices and in $G[V_2]$ any path contains at most b vertices. Graph G is τ-partitionable if it is (a, b)-partitionable for any a, b such that $a + b$ is the number of vertices in the longest path of G. We prove that every planar graph of girth 5 is τ-partitionable and that planar graphs with girth 8, 9 and 16 are $(2, 3)$-, $(2, 2)$- and $(1, 2)$-partitionable respectively.

1. Введение.

Пусть $a \geq 1$, $b \geq 1$ — целые числа. Граф G называется (a, b)-*разбиваемым*, если существует такое разбиение множества его вершин $V = V_1 \bigcup V_2$, что в подграфе $G_1 = G[V_1]$, порожденном множеством вершин V_1, длина наибольшей простой цепи не превосходит a, а в подграфе $G_2 = G[V_2]$ — не превосходит b (под длиной цепи понимается число ее вершин). Заметим, что $(1, 1)$-разбиваемость графа равносильна его двудольности. Граф G называется τ-*разбиваемым*, если он (a, b)-разбиваем для любых натуральных a, b таких, что $a + b = \tau$, где $\tau = \tau(G)$ обозначает длину наибольшей простой цепи в G.

В работах [2,4] высказывалась следующая

Гипотеза 1. *Любой граф является τ-разбиваемым.*

В [3-6] и ряде других работ справедливость гипотезы 1 была подтверждена для некоторых специальных классов графов. В [1] было доказано, что любой граф является $(a, \tau - a)$-разбиваемым при $a \leq 8$.

Glebov A.N., Zambalaeva D.Z., Path partitions of planar graphs.

Работа поддержана грантом РФФИ (проекты 06-01-00694 и 05-01-00395).

Поступила 30 октября 2007 г., опубликована 8 ноября 2007 г.

Вопрос о τ-разбиваемости планарных графов специально не исследовался. При этом Михоком [7] было показано, что для любых фиксированных значений параметров a, b существуют плоские графы, не являющиеся (a, b)-разбиваемыми. Следует отметить, что во всех примерах графов, приводимых в [7], имеется большое количество циклов длины 3. Поэтому представляет интерес вопрос о том, для какого наименьшего значения $g \geq 4$ существуют такие константы a, b, что любой плоский граф с обхватом не менее g является (a, b)-разбиваемым.

В настоящей работе доказано, что любой планарный граф с обхватом не менее 5 τ-разбиваем (теорема 1). Также установлено, что планарные графы с обхватом не менее 16 являются $(1, 2)$-разбиваемыми, с обхватом не менее 9 — $(2, 2)$-разбиваемыми, а с обхватом не менее 8 — $(2, 3)$-разбиваемыми (теоремы 2, 3, 4). При доказательстве рассматривается раскраска вершин графа в два цвета, соответствующая его (a, b)-разбиению. Для получения такой раскраски используется техника сводимых конфигураций, основанная на применении формулы Эйлера.

Введем необходимые определения и обозначения. Пусть $G(V, E)$ — конечный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Через $g = g(G)$ будем обозначать обхват графа G, т. е. наименьшую длину простого цикла в G. Через $d(v)$ обозначим степень вершины v, а через $\delta(G)$ — минимальную степень вершин графа G. Вершину степени d будем называть d-вершиной. Длиной простой цепи в G назовем число ее вершин. Через $\tau(G)$ обозначим максимальную длину простой цепи в графе G. Через $G[W]$ будем обозначать подграф в G, порожденный множеством вершин $W \subseteq V$. Если граф G является плоским, то через $F = F(G)$ обозначим множество всех его граней. Рангом $r(f)$ грани f в связном плоском графе G называется число ребер в граничном цикле грани f (мосты засчитываются дважды). Под *r-гранью* понимается грань ранга r.

Пусть $a \geq 1$, $b \geq 1$ — целые числа. Граф $G(V, E)$ называется *(a, b)-разбиваемым*, если существует такое разбиение множества вершин $V = V_1 \bigcup V_2$, что $\tau(G[V_1]) \leq a$ и $\tau(G[V_2]) \leq b$. Для данного (a, b)-разбиения $V = V_1 \bigcup V_2$ графа $G(V, E)$ рассмотрим раскраску вершин G в два цвета, порожденную этим разбиением, то есть такое отображение $\phi : V \to \{\alpha, \beta\}$, что $\phi(x) = \alpha$, если $x \in V_1$, и $\phi(x) = \beta$, если $x \in V_2$. Указанную раскраску вершин графа G назовем *(a, b)-раскраской* G. Далее под раскраской всюду понимается (a, b)-раскраска. Через $\neg x$ обозначим цвет, отличный от цвета x, где $x \in \{\alpha, \beta\}$. Граф G называется *τ-разбиваемым*, если для любых значений a, b таких, что $a + b = \tau(G)$, граф G является (a, b)-разбиваемым.

2. τ-разбиваемость плоских графов с обхватом 5

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 1. *Любой плоский граф с обхватом не менее 5 является τ-разбиваемым.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для связного плоского графа G. Из результатов [1] следует, что любой граф является $(a, \tau - a)$-разбивемым при $a \leq 8$. Поэтому можно считать, что $a \geq 9$, $b \geq 9$.

Доказательство теоремы начнем со следующего структурного факта.

Лемма 1. *В любом связном плоском графе с обхватом не менее 5 существует либо вершина степени не более 2, либо 5-грань, инцидентная не менее чем четырем вершинам степени 3.*

Доказательство. Запишем формулу Эйлера для графа $G(V,E,F)$ в следующем виде:

$$\sum_{v\in V}(d(v)-4)+\sum_{f\in F}(r(f)-4)=-8.$$

Величину $\mu(v)=d(v)-4$ будем называть *зарядом вершины* $v\in V$, а величину $\mu(f)=r(f)-4$ *зарядом грани* $f\in F$. В силу того, что обхват графа G не меньше 5, заряд любой грани не меньше 1.

Допустим, что существует контрпример, то есть граф G с $\delta(G)\geq 3$, любая 5-грань которого инцидентна не более чем трем 3-вершинам. Заметим, что в G заряд вершины отрицателен (и равен -1) тогда и только тогда, когда ее степень равна 3. Перераспределим заряды между вершинами и гранями G по следующему правилу: каждая грань отдает заряд $1/3$ каждой инцидентной 3-вершине. После перераспределения новый заряд 3-вершины v станет равен

$$\mu_1(v)=\mu(v)+3\cdot 1/3=-1+1=0,$$

заряд 5-грани f:

$$\mu_1(f)=\mu(f)-3\cdot 1/3=1-1=0,$$

а заряд грани f ранга $r\geq 6$:

$$\mu_1(f)=\mu(f)-r/3=r-4-r/3=2(r-6)/3\geq 0.$$

Таким образом, $\mu_1(x)\geq 0$ для любого элемента $x\in V\bigcup F$ графа G, что противоречит формуле Эйлера. Лемма 1 доказана.

Пусть имеется раскраска вершин графа G цветами α и β. Для каждого цвета $x\in\{\alpha,\beta\}$ будем называть *x-цепью* в G любую простую цепь, все вершины которой окрашены цветом x. Назовем α-цепь длины a (β-цепь длины b) *α-максимальной* (*β-максимальной*). Назовем вершину *x-максимальной*, если она является концом x-максимальной цепи, $x\in\{\alpha,\beta\}$.

Предположим, что граф G является контрпримером к теореме 1 с минимальным числом вершин. Докажем, что G обладает следующими свойствами.

Лемма 2. $\delta(G)\geq 3$.

Доказательство. Допустим, что в G есть вершина v степени не больше 2. В силу минимальности G существует раскраска вершин графа $G\setminus\{v\}$. Если $d(v)=1$, то продолжим раскраску, окрашивая вершину v в цвет, отличный от цвета смежной с ней вершины. Если же $d(v)=2$, то обозначим через w_1,w_2 вершины смежные с v. Если $\phi(w_1)=\phi(w_2)=x$, то окрасим вершину v в цвет $\neg x$. Пусть $\phi(w_1)=\alpha$, $\phi(w_2)=\beta$. Заметим, что вершины w_1 и w_2 не могут быть одновременно концами α-максимальной цепи P_1 и β-максимальной цепи P_2, так как иначе в графе G имелась бы цепь $P=P_1vP_2$ длины $a+b+1=\tau+1$. Следовательно, мы можем окрасить v в цвет той из вершин w_i, $i=1,2$, которая не является максимальной. Лемма 2 доказана.

Слабой 5-гранью в G назовем любую 5-грань, инцидентную не менее чем четырем вершинам степени 3. Из лемм 1 и 2 следует, что в G есть слабая 5-грань $f=v_0v_1v_2v_3v_4$, где $d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=d(v_4)=3$. Обозначим через w_1, w_2, w_3, w_4 вершины графа G, смежные с v_1, v_2, v_3, v_4, соответственно. Рассмотрим раскраску графа $G_1 = G \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Определим, в каких случаях ее можно продолжить на вершины v_1, v_2, v_3, v_4.

Замечание 1. Пусть в графе G_1 вершина $y \in \{v_0, w_1\}$ является концом α-цепи P_y длины a_1, а вершина $z \in \{v_0, w_4\}$ — концом β-цепи P_z длины b_1. Тогда $a_1 + b_1 \leq \tau - 4$. В частности, если вершина y α-максимальна, то $b_1 \leq b - 4$, а если вершина z β-максимальна, то $a_1 \leq a - 4$. Действительно, в противном случае в графе G существовала бы цепь $P_y v_1 v_2 v_3 v_4 P_z$ длины больше τ.

Положим $\phi(v_2) = \neg\phi(w_2)$, $\phi(v_3) = \neg\phi(w_3)$. Окрашивание вершин v_1, v_4 зависит от цветов вершин w_1, w_4, v_0. Возможны следующие случаи.

1) $\phi(w_1) = \phi(w_4) = \phi(v_0) = x$. В этом случае положим $\phi(v_1) = \phi(v_4) = \neg x$.

2) $\phi(w_1) = \phi(v_0) = x$, $\phi(w_4) = \neg x$. Не теряя общности, можно считать, что $x = \alpha$. Положим $\phi(v_1) = \beta$. Согласно замечанию 1 в графе G_1 вершины v_0 и w_4 не могут быть максимальными одновременно. Если v_0 и w_4 обе не максимальные, то полагаем $\phi(v_4) = \neg\phi(v_3)$. Предположим, что вершина v_0 максимальна. Тогда согласно замечанию 1 в графе G_1 вершина w_4 может являться концом β-цепи длины не больше $b - 4$. Полагая $\phi(v_4) = \beta$, получим искомую раскраску графа G (так как в G не образуются β-цепи длины больше b). Предположим, что вершина w_4 максимальна. Аналогично предыдущему случаю замечаем, что в графе G_1 вершина v_0 может являться концом α-цепи длины не больше $a - 4$. Полагая $\phi(v_4) = \alpha$, получим искомую раскраску G.

3) $\phi(w_1) = \phi(w_4) = x$, $\phi(v_0) = \neg x$. Не теряя общности, можно считать, что $x = \beta$. Согласно замечанию 1 вершины v_0 и w_1, а также v_0 и w_4 не могут быть одновременно максимальными в G_1. Если все вершины v_0, w_1, w_4 не являются максимальными, то полагаем $\phi(v_1) = \neg\phi(v_2)$, $\phi(v_4) = \neg\phi(v_3)$. Пусть хотя бы одна из вершин w_1, w_4 β-максимальна. В этом случае согласно замечанию 1 вершина v_0 может быть концом α-цепи длины не больше $a - 4$. Полагая $\phi(v_1) = \phi(v_4) = \alpha$, получим искомую раскраску графа G. Предположим, что вершина v_0 максимальна (а вершины w_1 и w_4 являются концами β-цепей длины не больше $b-4$). В этом случае положим $\phi(v_1) = \phi(v_4) = \beta$. Если хотя бы одна из вершин v_2 или v_3 окрашена цветом α, то полученная раскраска графа G является искомой. Если же $\phi(v_2) = \phi(v_3) = \beta$, но при этом какая-то из вершин w_2, w_3 не является α-максимальной, то, перекрасив смежную с ней вершину v_2 или v_3 в цвет α, получим раскраску графа G.

Итак, мы установили, что раскраску графа G_1 нельзя продолжить на вершины v_1, v_2, v_3, v_4 только в том случае, если вершины v_0, w_2, w_3 являются x-максимальными, и $\phi(w_1) = \phi(w_4) = \neg x$. Такую раскраску G_1 будем называть *x-плохой* раскраской окрестности грани f в G.

Лемма 3. *Если $f = v_0 v_1 v_2 v_3 v_4$ — слабая 5-грань в G, то $d(v_0) \geq 5$.*

Доказательство. Предположим, что $3 \leq d(v_0) \leq 4$. Рассмотрим граф $G_1 = G \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Допустим, что при его раскраске реализовалась α-плохая раскраска окрестности грани f. В этом случае перекрасим вершину v_0 в β. При этом в G_1 не образуется β-цепей длины больше b в силу α-максимальности вершин w_2, w_3 и наличия в графе G цепей $v_0 v_1 v_2 w_2$ и $v_0 v_4 v_3 w_3$. Полученная раскраска графа G_1 уже не является плохой, а, следовательно, продолжаема на G. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если в графе G 5-вершина v_0 инцидентна трем слабым 5-граням, то они являются последовательными в окружении v_0.*

Доказательство. Допустим, что в G существует 5-вершина v_0, инцидентная трем слабым 5-граням $f_1 = v_0v_1v_2v_3v_4$, $f_2 = v_0v_5v_6v_7v$, $f_3 = v_0vv_8v_9v_{10}$ таким, что только две из них являются смежными. В силу условия $g(G) \geq 5$ все вершины v_i различны. Обозначим через w_i вершины, смежные с v_i при $i = 1, \dots, 10$. Удалим из графа G все вершины, инцидентные граням f_1, f_2, f_3, и рассмотрим раскраску ϕ_1 полученного графа. Положим $\phi(v_i) = \neg\phi_1(w_i)$ для каждого $i = 1, \dots, 10$. Далее окрасим вершины v_0 и v. Нетрудно убедиться, что это можно сделать так, чтобы в графе G не возникало новых одноцветных цепей длины больше 9. Лемма 4 доказана.

Следствие 1. *В графе G любая 5-вершина инцидентна не более чем трем слабым 5-граням.*

Запишем формулу Эйлера для графа G в виде

$$\sum_{v \in V}(d(v) - 4) + \sum_{f \in F}(r(f) - 4) = -8.$$

Зарядом вершины $v \in V$ назовем величину $\mu(v) = d(v) - 4$, а зарядом грани $f \in F$ — величину $\mu(f) = r(f) - 4$. Ввиду условия $g(G) \geq 5$ заряд любой грани не меньше 1. Перераспределим заряды в G по следующим правилам:

П1: Любая грань отдает каждой инцидентной 3-вершине заряд 1/3.

П2: Любая вершина степени не менее 5 отдает каждой инцидентной слабой 5-грани заряд 1/3.

Обозначим через $\mu_1(x)$ заряд элемента $x \in V \bigcup F$ после применения правил П1, П2. Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно убедиться в справедливости следующего факта.

Лемма 5. *Для любого $x \in V \bigcup F$ выполняется неравенство $\mu_1(x) \geq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим в графе G произвольную вершину $v \in V$ степени d. Согласно лемме 1 имеем $d \geq 3$.

Если $d = 3$, то в результате применения правила П1 получаем $\mu_1(v) = \mu(v) + 3 \cdot 1/3 = -1 + 1 = 0$. Если $d = 4$, то $\mu_1(v) = \mu(v) = 0$, так как 4-вершины не участвуют в перераспределении зарядов. Если $d = 5$, то после применения правила П2 в силу следствия 1 имеем $\mu_1(v) \geq \mu(v) - 3 \cdot 1/3 = 1 - 1 = 0$. Наконец, при $d \geq 6$ применение правила П2 дает: $\mu_1(v) \geq \mu(v) - d \cdot 1/3 = d - 4 - d/3 = 2(d-6)/3 \geq 0$.

Рассмотрим произвольную грань $f \in F(G)$ ранга r. Из условия $g(G) \geq 5$ следует, что $r \geq 5$. Если $r \geq 6$, то в результате применения правила П1 получаем $\mu_1(f) = \mu(f) - r \cdot 1/3 = r - 4 - r/3 = 2(r-6)/3 \geq 0$. Пусть $r = 5$. Если грань f не является слабой, то после применения правила П1 имеем $\mu_1(f) \geq (f) - 3 \cdot 1/3 = 1 - 1 = 0$. Если же f — слабая 5-грань в G, то ввиду леммы 3 и правил П1, П2 получаем $\mu_1(f) = 1 - 4 \cdot 1/3 + 1/3 = 0$. Лемма 5 и теорема 1 доказаны.

3. (a, b)-РАЗБИВАЕМОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

В этом разделе мы покажем, что планарные графы с большим обхватом являются (a, b)-разбиваемыми при малых значениях a, b.

Назовем k-*цепью* в графе любую простую цепь, состоящую не менее чем из k вершин степени 2 (при этом ребро будем считать 0-цепью). Под (k_1, k_2, k_3)-*вершиной* будем понимать вершину степени 3, являющуюся концом k_1-цепи, k_2-цепи и k_3-цепи.

Теорема 2. *Любой планарный граф с обхватом не менее 16 является (1,2)-разбиваемым.*

Доказательство начнем со следующего структурного факта.

Лемма 6. *В любом плоском графе с обхватом не менее 16 имееется либо 1-вершина, либо 3-цепь.*

Доказательство Предположим, что граф G является контрпримером к лемме 6. Не теряя общности, можно считать, что G — связный плоский граф. Заменим в G каждую k-цепь, где $k \geq 1$, на ребро. В результате получим плоский граф G_1 с минимальной степенью не меньше 3. Из формулы Эйлера следует, что в графе G_1 существует грань ранга не более 5. Тогда соотвтетствуюшая грань в G имеет ранг не более 15 (так как в G нет 3-цепей), что противоречит условию $g(G) \geq 16$. Лемма 6 доказана.

Пусть граф G — контрпример к теореме 2 с минимальным числом вершин. Покажем, что G обладает следующими свойствами:

(1) $g(G) > 1$.

Допустим, что в G есть 1-вершина v. В силу минимальности G граф $G \setminus \{v\}$ является (1,2)-разбиваемым. Соответствующую раскраску графа $G \setminus \{v\}$ можно продолжить на граф G, окрашивая вершину v в цвет, отличный от цвета смежной с ней вершины.

(2) *В G нет 3-цепей.*

Предположим, что в G есть 3-цепь $v_1v_2v_3$. Тогда в силу минимальности контрпримера существует раскраска ϕ вершин графа $G \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$. Обозначим через w_1, w_3 вершины смежные с v_1, v_3, соответственно. Продолжим раскраску ϕ на граф G, полагая $\phi(v_1) = \neg\phi(w_1)$, $\phi(v_3) = \neg\phi(w_3)$. Если $\phi(v_1) = \phi(v_3) = x$, то красим v_2 в $\neg x$, иначе — в β.

Полученное противоречие между леммой 6 и свойствами (1), (2) завершает доказательство теоремы 2.

Теорема 3. *Любой планарный граф с обхватом не менее 9 является (2,2)-разбиваемым.*

Доказательство. Пусть граф $G(V, E)$ — контрпример к теореме 3 с минимальным числом вершин. Покажем, что G обладает следующими свойствами.

(1) $\delta(G) > 1$.

Доказывается аналогично свойству (1) в теореме 2.

(2) *В графе G нет смежных 2-вершин, то есть 2-цепей.*

Допустим, что в G есть смежные 2-вершины v_1 и v_2. Обозначим через w_1, w_2 вершины, смежные с v_1, v_2, соответственно. В силу минимальности G существует раскраска ϕ графа $G \setminus \{v_1, v_2\}$. Эту раскраску можно продолжить на граф G, полагая $\phi(v_1) = \neg\phi(w_1)$, $\phi(v_2) = \neg\phi(w_2)$.

(3) *В G нет (1,1,1)-вершин.*

Предположим, что в G есть (1,1,1)-вершина v, смежная с 2-вершинами x, y, z. Рассмотрим (2,2)-раскраску графа $G \setminus \{v, x, y, z\}$. Окрасим вершины x, y, z в цвета, отличные от цветов смежных с ними окрашенных вершин. Далее покрасим вершину v в цвет, которым окрашена не более чем одна из вершин x, y, z. В результате получим (2,2)-раскраску графа G.

(4) *В G нет смежных (1,1,0)-вершин.*

Предположим, что в G есть смежные (1,1,0)-вершины v_1, v_2, где v_1 также смежна с 2-вершинами x_1, y_1, а v_2 — с 2-вершинами x_2, y_2. Рассмотрим (2,2)-раскраску ϕ графа $G \setminus \{v_1, v_2, x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Окрасим вершины x_1, x_2, y_1, y_2 в цвета, отличные от цветов смежных с ними окрашенных вершин.

Если $\phi(x_i) = \phi(y_i)$, $i = 1, 2$, то положим $\phi(v_i) = \neg\phi(x_i)$, $i = 1, 2$. Если $\phi(x_1) = \phi(y_1)$ и $\phi(x_2) \neq \phi(y_2)$, положим $\phi(v_1) = \neg\phi(x_1)$, $\phi(v_2) = \phi(x_1)$. Наконец, при $\phi(x_i) \neq \phi(y_i)$, $i = 1, 2$, произвольным образом окрасим вершины v_1, v_2 в различные цвета.

(5) *Никакая (1,0,0)-вершина в G не смежна с двумя (1,1,0)-вершинами.*

Пусть в G есть (1,0,0)-вершина u, смежная с 2-вершиной z и двумя (1,1,0)-вершинами v_1 и v_2, где v_1 также смежна с 2-вершинами x_1, y_1, а v_2 — с 2-вершинами x_2, y_2. Рассмотрим (2,2)-раскраску ϕ графа $G \setminus \{u, z, v_1, v_2, x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Окрасим вершины x_1, x_2, y_1, y_2, z в цвета, отличные от цветов смежных с ними окрашенных вершин. Далее выберем цвета для вершин v_1, v_2, соблюдая правило $\phi(v_i) = \neg\phi(x_i)$ в случае $\phi(x_i) = \phi(y_i)$. Окрасим вершины v_1, v_2 в одинаковый цвет c, если это возможно, и положим $\phi(u) = \neg c$. Если указанная раскраска невозможна, то $\phi(x_1) = \phi(y_1) = \phi(v_2) = c$ и $\phi(x_2) = \phi(y_2) = \phi(v_1) = \neg c$. В этом случае положим $\phi(u) = \neg\phi(z)$.

Запишем формулу Эйлера для графа G в виде

$$\sum_{v \in V} \left(\frac{7d(v)}{2} - 9\right) + \sum_{f \in F} (r(f) - 9) = \sum_{x \in V \bigcup F} \mu(x) = -18,$$

где $\mu(v) = 7d(v)/2 - 9$ — заряд вершины $v \in V$; $\mu(f) = r(f) - 9$ — заряд грани $f \in F$. Из условия $g(G) \geq 9$ следует, что заряд любой грани в G неотрицателен, заряд 2-вершины равен -2, заряд 3-вершины равен $3/2$, а заряд любой другой вершины не меньше 5.

Перераспределим заряды в G по следующим правилам.

П1: Каждая вершина степени не менее 3 отдает заряд 1 каждой смежной 2-вершине.

П2: Каждая (1,1,0)-вершина получает заряд 1/2 от смежной вершины степени не менее 3.

Обозначим через $\mu_1(x)$ заряд элемента $x \in V \bigcup F$ после применения правил П1, П2. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 3.

Лемма 7. *Для любого $x \in V \bigcup F$ выполняется неравенство $\mu_1(x) \geq 0$.*

Доказательство. Так как грани не участвуют в перераспределении зарядов, то для любой грани $f \in F$ имеем $\mu_1(f) = \mu(f) \geq 0$.

Рассмотрим вершину $v \in V$ степени d. Согласно свойству (1) имеем $d \geq 2$.

Если $d = 2$, то из (2) и правила П1 следует, что $\mu_1(v) = -2 + 1 + 1 = 0$.

Пусть $d = 3$. Если v является (0,0,0)-вершиной, то v не передает заряд по правилу П1. В этом случае после применения правила П2 получаем $\mu_1(v) \geq$

$3/2 - 3 \cdot 1/2 = 0$. Если v — (1,0,0)-вершина, то из (5) следует, что v передает заряд $1/2$ по правилу П2 не более чем одной (1,1,0)-вершине. Кроме того, v отдает заряд 1 смежной 2-вершине по правилу П1. Следовательно, $\mu_1(v) \geq 3/2 - 1 - 1/2 = 0$. Наконец, пусть v — (1,1,0)-вершина. Из (4) следует, что v не передает заряд по правилу П2, и получает по этому правилу заряд $1/2$ от смежной вершины степени не менее 3. Кроме того, v передает по правилу П1 заряд 1 двум смежным 2-вершинам. Следовательно, $\mu_1(v) \geq 3/2 - 2 \cdot 1 + 1/2 = 0$.

Остается рассмотреть случай $d \geq 4$. Поскольку v передает каждой смежной вершине не более 1, имеем $\mu_1(v) \geq 7d/2 - 9 - d = (5 \cdot d - 18)/2 > 0$. Лемма 7 и теорема 3 доказаны.

Теорема 4. *Любой планарный граф с обхватом не менее 8 является (2,3)-разбиваемым.*

Доказательство. Пусть G — минимальный контрпример к теореме 4. Тогда в G нет

(1) *1-вершин,*

(2) *смежных 2-вершин,*

(3) *(1,1,1)-вершин.*

Доказательство (1) — (3) аналогично доказательству соответствующих утверждений для случая (2,2)-разбиваемости.

Лемма 8. *а) Никакие две (1,1,0)-вершины графа G не соединены цепью, состоящей из (0,1,0) вершин. В частности, в G нет смежных (1,1,0)-вершин.*

б) Любая (0,0,0)-вершина соединена цепью, состоящей из (0,1,0)-вершин, не более чем с одной (1,1,0)-вершиной.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда в G существует цепь P, соединяющая две (1,1,0)-вершины, у которой все внутренние вершины кроме, возможно, одной являются (0,1,0)-вершинами, а последняя внутренняя вершина имеет тип (0,1,0) (в случае а)) или (0,0,0) (в случае б)). Обозначим эту исключительную вершину через v.

Удалим из G все вершины цепи P и все смежные с ними 2-вершины. Полученный граф G_1 является (2,3)-разбиваемым в силу минимальности контрпримера. Продолжим (2,3)-раскраску G_1, окрашивая вершины, смежные с неудаленными, в цвета, отличные от цветов смежных вершин. Далее окрасим все вершины цепи, строго чередуя их цвета, так, чтобы цвет вершины v был отличен от цвета смежной с ней окрашенной вершины. Если при этом какая-то из (1,1,0)-вершин и обе смежные с ней 2-вершины оказались окрашены в α, то перекрасим соответствующую (1,1,0)-вершину в β. Последними окрасим удаленные 2-вершины, смежные с двумя вершинами из P. Если такая 2-вершина, смежна с двумя вершинами цвета β, то красим ее в α, иначе — в β. Из чередования цветов на P следует, что при этом не образуется цепей из четырех вершин цвета β. Таким образом, получаем (2,3)-раскраску графа G — противоречие. Лемма 8 доказана.

Для каждой (1,1,0)-вершины графа G рассмотрим максимальную цепь (возможно, ребро) с началом в этой вершине, все внутренние вершины которой имеют тип (0,1,0). Из леммы 8 следует, что такая цепь оканчивается в (0,0,0)-вершине или вершине степени не меньше 4. Назовем эту цепь *цепью питания* для данной (1,1,0)-вершины.

Запишем формулу Эйлера для графа G в виде

$$\sum_{v\in V}(3d(v)-8)+\sum_{f\in F}(r(f)-8)=\sum_{x\in V\bigcup F}\mu(x)=-16,$$

где $\mu(v)=3d(v)-8$ — заряд вершины $v\in V$; $\mu(f)=r(f)-8$ — заряд грани $f\in F$. Из условий $\delta(G)\geq 2$ и $g(G)\geq 8$ следует, что в графе G только 2-вершины имеют отрицательный заряд.

Перераспределим заряды в G по следующим правилам:

П1. Любая вершина степени не менее 3 отдает заряд 1 каждой смежной 2-вершине.

П2. Каждая (1,1,0)-вершина получает заряд 1 по цепи питания от второго конца этой цепи.

Обозначим через $\mu_1(x)$ заряд элемента $x\in V\bigcup F$ после применения правил П1, П2.

Лемма 9. *Для любого* $x\in V\bigcup F$ *выполняется неравенство* $\mu_1(x)\geq 0$.

Доказательство. Так как грани не участвуют в перераспределении зарядов, то для любой грани $f\in F$ имеем $\mu_1(f)\geq\mu(f)\geq 0$.

Рассмотрим вершину $v\in V$ степени $d\geq 2$. Если $d=2$, то из (2) и правила П1 следует, что $\mu_1(v)=-2+1+1=0$. Пусть $d=3$. Если v является (0,1,0)-вершиной, то после применения правила П1 имеем $\mu_1(v)=1-1=0$. Если v — (0,0,0)-вершина, то в силу леммы 8 (б) вершина v отдает по правилу П2 не более 1, откуда $\mu_1(v)\geq 1-1=0$. Наконец, если v — (1,1,0)-вершина, то из леммы 8 (а) и правил П1, П2 следует, что $\mu_1(v)=1-2+1=0$. Осталось рассмотреть случай $d\geq 4$. Поскольку v передает вдоль каждого инцидентного ребра заряд не более 1, имеем $\mu_1(v)\geq\mu(v)-d=3d-8-d=2d-8\geq 0$. Лемма 9 доказана.

Полученное противоречие с формулой Эйлера завершает доказательство теоремы 4.

Список литературы

[1] Мельников Л.С., Петренко И.В., *О путевых ядрах и разбиениях в неориентированных графах*, Дискретный анализ и исследование операций, **9**:1 (2) (2002), 21–35.

[2] Borowiecki M., Broere I., Frick M., Mihok P., Semanisin G., *A survey of hereditary properties of graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 1997. **17**: 1 (1997), 5–50.

[3] Broere I., Dorfling M., Dunbar J. E., Frick M., *A path (ological) partition problem*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, **18**: 1 (1998), 113–125.

[4] Broere I., Hajnal P., Mihok P., Semanisin G., *Partition problems and kernels of graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, **17**:2 (1997), 311–313.

[5] Dunbar J. E., Frick M., *Path kernels and partitions*, Math. Combin. Comput., **31** (1999), 137–149.

[6] Dunbar J. E., Frick M., Bullock F., *Path partitions and Pn-free sets*, Discrete Math., **289**:1–3 (20004), 145–155.

[7] Mihok J., *Graphs, hypergraphs and matroids*, Zielon Gora: Higher College Engrg., 1985.

Алексей Николаевич Глебов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: angle@math.nsc.ru

Долгор Жамьяновна Замбалаева
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 4,
630090, Новосибирск, Россия