S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 4, Стр. 282–291 (2007) УДК 532.511, 517.9
MSC 76B47

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е.Ю. МЕЩЕРЯКОВА

Abstract. We consider rotationally-symmetrical solutions to Euler equations with a linear dependence of axial component of velocity on axial coordinate. By methods of group analysis of differential equations these equations were reduced to one hyperbolic equation of the fourth order. For this equation a local in time unique solvability of initial boundary-value problem was proved. Also, for this equation a generalized Goursat problem was considered. There were formulated sufficient conditions of its solution non-existence and conditions of classical solution existence in case it is defined for all values of the radial coordinate. It is established that in the class of considered solutions to Euler equations, setting up initial velocity field in whole space does not determine the solution to Cauchy problem uniquely.

1. Введение

Исследуются точные решения уравнений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости, записанные в следующей форме [1]:

$$r^3\left(u_t+uu_r+wu_z+\rho^{-1}p_r\right)-\Omega=0,\quad w_t+uw_r+ww_z+\rho^{-1}p_z=0,$$

$$u_r+r^{-1}u+w_z=0,\quad \Omega_t+u\Omega_r+w\Omega_z=0, \tag{1}$$

Meshcheryakova, E.Yu., Solvability of the initial boundary-value problems for hyperbolic model of ideal incompressible liquid motion.

Работа выполнена при поддержке программы "Ведущие научные школы" (грант НШ–5873.2006.1).

Автор выражает глубокую признательность В.В. Пухначеву за постановку задач и полезное обсуждение.

Поступила 23 марта 2007 г., опубликована 29 июня 2007 г.

где $\Omega = (r\tilde{v})^2$ — квадрат циркуляции окружной компоненты скорости, u, $\tilde{v}$, w обозначают проекции вектора скорости на оси r, θ, z цилиндрической системы координат соответственно, p — давление жидкости, ρ — ее плотность. Эти уравнения содержат всего две пространственные переменные r, z и время t. Для плоского и осесимметричного движения идеальной несжимаемой жидкости получены нелокальные результаты существования и единственности [2]. Однако наличие окружной компоненты скорости вносит существенные трудности. Дополнительное понижение размерности задачи возможно на базе теоретико-группового подхода [3]. Один класс частично инвариантных решений был изучен в статьях [4–6]. В данной работе исследуется новый класс решений, которые не являются частично инвариантными (ЧИР), но могут быть получены на базе ЧИР путем применения эвристического подхода к построению точных решений [1]. Положив $\Omega = 0$ в (1), приходим к "укороченной" системе, которая допускает трехпараметрическую группу G, образованную операторами $\{\partial_z,\ t\partial_z + \partial_w,\ \partial_p\}$. По отношению к указанной группе в [1] было выписано частично инвариантное решение ранга 2 и дефекта 2. С помощью полученного ЧИР "укороченной" системы, было построено новое решение полной системы (1). Полагая $u = U(r,t)$, после интегрирования по z второго и третьего уравнений (1), получаем

$$w = \Psi(r,t)\, z, \quad -\frac{p}{\rho} = \left(\Psi_t + U\Psi_r + \Psi^2\right)\frac{z^2}{2} + \mathrm{X}(r,t)\,, \tag{2}$$

где Ψ и X — новые искомые функции переменных r и t, при этом

$$\Psi = -U_r - r^{-1}U. \tag{3}$$

Подстановка полученных выражений для искомых функций u, w, p в первое уравнение системы (1) приводит к следующему представлению функции Ω:

$$\Omega = -r^3\left(\lambda z^2/2 + \nu\right), \tag{4}$$

где

$$\lambda = \left(\Psi_t + U\Psi_r + \Psi^2\right)_r, \tag{5}$$

$$\nu = \mathrm{X}_r - U_t - UU_r. \tag{6}$$

Подстановка (4) в последнее уравнение системы (1) дает еще два уравнения:

$$\lambda_t + U\lambda_r + \left(2\Psi + 3r^{-1}U\right)\lambda = 0, \tag{7}$$

$$\nu_t + U\nu_r + 3r^{-1}U\nu = 0, \tag{8}$$

которые вместе с (3), (5), (6) образуют замкнутую систему для определения пяти функций переменных r и t. Эта система обладает рекуррентной структурой, что значительно упрощает ее анализ.

В подсистеме (3), (5), (7), которая может быть решена независимо от остальных уравнений, был осуществлен переход к новой пространственной переменной — лагранжевой координате ξ, определяемой соотношениями

$$\frac{dr}{dt} = U(r,t) \quad \text{при} \quad t > 0, \quad r = \xi \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{9}$$

Введем обозначение $l(\xi,t) = \lambda\left[r(\xi,t),t\right]$. Тогда в силу (3), (7) и соотношений $\lambda_t + U\lambda_r = l_t$, $U_r = r_{\xi t}/r_\xi$, следующих из определения $l(\xi,t)$, получаем соотношение

$$\frac{l_t}{l} + \frac{r_t}{r} - \frac{2r_{\xi t}}{r_\xi} = 0,$$

которое интегрируется по t:

$$\frac{rl}{r_\xi^2} = \sigma(\xi),$$

где σ — произвольная функция ξ. Опуская малосодержательный случай $\sigma = 0$, в окрестности каждой точки, где функция σ сохраняет знак, можно свести рассмотрение к случаю $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ с помощью перенормировки лагранжевой координаты [1]. Итак, получено равенство

$$l = \sigma r^{-1} r_\xi^2.$$

Переходя аналогичным образом к лагранжевой координате для ν, вводим обозначение $n(\xi, t) = \nu[r(\xi, t), t]$. Уравнение (8) перепишется как

$$n_t + 3r^{-1} r_t n = 0,$$

откуда

$$n = \frac{k(\xi)}{r^3}, \tag{10}$$

где k — произвольная функция ξ.

Проведем некоторый анализ соотношения (4). Поскольку Ω есть квадрат циркуляции окружной скорости, то выражение, стоящее в правой части (4), не может быть отрицательным. Это означает, что $\lambda z^2/2 + \nu \leq 0$, что возможно в следующих случаях: а) функции λ и ν не положительны, и б) функции λ и ν имеют противоположные знаки. В последнем случае требование выполнения неравенства $\lambda z^2/2 + \nu \leq 0$ накладывает ограничения на $|z|$.

Исследуемая подсистема (3), (5), (7) была сведена к гиперболическому уравнению четвертого порядка для функции $y(\xi, t) = r^2/8$ [1]:

$$\left(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\right)_{tt} = \left[\left(\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}\right)^2\right]_\xi - \sigma\frac{y_\xi^3}{y^2}, \tag{11}$$

где σ — произвольная функция ξ.

2. Начально-краевая задача для уравнения (11)

Как известно, система уравнений Эйлера в случае несжимаемой жидкости имеет составной тип: у нее имеются как вещественные, так и комплексные характеристики. В рассматриваемой редукции этих уравнений их гиперболическая составляющая отделяется от эллиптической. Ранее исследовались другие гиперболические движения идеальной несжимаемой жидкости [4–6], где была рассмотрена редукция к t-гиперболической системе уравнений, для которой рассматривалась задача Коши. Новая редукция является сведением к гиперболическому, однако не t-гиперболическому уравнению. Такое уравнение допускает разные постановки краевых задач.

Естественной начально-краевой задачей для (11) является следующая:

$$y(\xi, 0) = y_0(\xi), \quad y_t(\xi, 0) = y_1(\xi), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \tag{12}$$

$$y(\xi_1, t) = c_1, \quad y(\xi_2, t) = c_2, \quad t > 0, \tag{13}$$

где ξ_1, ξ_2 и $c_2 > c_1 > 0$ — заданные постоянные; $y_0(\xi) > 0$, $y_1(\xi)$ — заданные функции. Далее предполагается, что $y_0 \in C^2[\xi_1, \xi_2]$, $y_1 \in C^1[\xi_1, \xi_2]$ и, кроме того, выполнены условия согласования $y_0(\xi_i) = c_i$, $y_1(\xi_i) = 0$ $(i = 1,\ 2)$ и условие монотонности $y_0'(\xi) > 0$ для $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$. Условия (12), (13) имеют ясный физический смысл. Из (12) и соотношений $r = 2(2y)^{1/2}$, $r_t = U$ следует, что при $t = 0$ выполнены равенства $r = 2[2y_0(\xi)]^{1/2}$, $rU = 4y_1(\xi)$. Исключая из них параметр ξ, получаем начальное распределение радиальной компоненты скорости $U(r, 0) = U_0(r)$ при $c_1^2/8 \le r \le c_2^2/8$. Равенства (13) означают, что при $r_i = c_i^2/8 = \mathrm{const}$ выполнены условия непротекания $r_{i,t} = U(r_i, t) = 0$, $i = 1,\ 2$. Это позволяет интерпретировать изучаемое решение уравнений Эйлера как описывающее движение в цилиндрическом слое с непроницаемыми стенками, возникающее из заданного начального состояния.

Заметим, что следует выделять два существенно различных случая: в первом случае $\xi_1 > 0$ и жидкость заполняет пространство между двумя цилиндрами. Во втором случае мы допускаем, что ξ_1 может быть равна нулю, т.е. жидкость заполняет цилиндр, который включает ось ординат. Заметим, что r совпадает с ξ в начальный момент времени. А тогда, в силу определения $y(\xi, t) = r^2/8$, $y \to 0$ при $\xi \to 0$. Таким образом, последнее слагаемое в правой части (11), $\sigma y_\xi^3 \Big/ y^2$ имеет особенность, которой можно избежать, распорядившись произволом функции σ. Поэтому в случае включения оси в область движения жидкости, функция σ была выбрана как $\sigma = \pm\xi^2$. Для описания движения жидкости между двумя цилиндрами, достаточно положить $\sigma = -1$.

При выполнении сформулированных выше условий гладкости, согласования и монотонности входных данных задачи (11)–(13), для нее справедлива теорема существования и единственности классического решения на достаточно малом интервале времени. Сведем дифференциальное уравнение (11) к интегро-дифференциальному. Полагаем $\xi^2 = x$, тогда уравнение (11) перепишется в виде

$$\left(\frac{y_{xx}}{y_x}\right)_{tt} = \left[\left(\frac{y_{xt}}{y_x}\right)^2\right]_x - 4x\sigma\frac{y_x^3}{y^2}. \tag{14}$$

Приведем доказательство этого факта для случая включения оси ординат в область движения жидкости, т.е. выберем $\sigma = -x$. Уравнение (14) примет вид

$$\left(\frac{y_{xx}}{y_x}\right)_{tt} = \left[\left(\frac{y_{xt}}{y_x}\right)^2\right]_x + 4x^2\frac{y_x^3}{y^2}. \tag{15}$$

Дважды интегрируя данное уравнение по t с учетом начальных данных, приходим к уравнению

$$\frac{y_{xx}}{y_x} = \int_0^t (t-\tau)\left\{\left[\left(\frac{y_{x\tau}}{y_x}\right)^2\right]_x + 4x^2\frac{y_x^3}{y^2}\right\}d\tau + \frac{y_{0,xx}}{y_{0,x}} + \left(\frac{y_{xx}}{y_x}\right)_t\bigg|_{t=0} \cdot t. \tag{16}$$

Введем следующие обозначения:

$$\left[\left(\frac{y_{xt}}{y_x}\right)^2\right]_x + 4x^2\frac{y_x^3}{y^2} \equiv N[y(x,t)], \quad \left(\frac{y_{xx}}{y_x}\right)_t\bigg|_{t=0} = \frac{y_0'y_1'' - y_1'y_0''}{(y_0')^2} \equiv B(x). \tag{17}$$

Тогда уравнение (16) перепишется в виде:

$$y_{xx} - \frac{y_0''}{y_0'} y_x = y_x \int\limits_0^t (t-\tau)\, N\,[y\,(x,\tau)]\, d\tau + y_x t B\,(x)\,. \tag{18}$$

Осуществим переход к однородным краевым условиям, перейдем к переменной $v = y - y_0\,(x)$. Уравнение (18) примет вид

$$v_{xx} - \frac{y_0''}{y_0'} v_x = (v_x + y_0') \int\limits_0^t (t-\tau)\, N\,[v + y_0]\, d\tau + (v_x + y_0')\, t B\,(x)\,.$$

При этом $v = O\,(x)$ при $x \to 0$, $v\,(x,t) = 0$ при $x = 1$. Таким образом, мы имеем задачу об обращении оператора $\frac{d^2}{dx^2} - \frac{y_0''}{y_0'}\frac{d}{dx}$ с условиями $v = 0$ при $x = 0$, $x = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x}{y_0'}\right) = \left(\frac{v_x}{y_0'} + 1\right) \int\limits_0^t (t-\tau)\, N\,[v + y_0]\, d\tau + t\left(\frac{v_x}{y_0'} + 1\right) B\,(x)\,.$$

Функция Грина для этого оператора строится явно, так как сразу просматриваются два решения: 1 и y_0. Очевидно, что y_0 удовлетворяет условию на левом конце, $y_0\,(x) - y_0\,(1)$ — на правом. Вронскиан равен $y_0'\,(x)\, y_0\,(1)$. Следовательно, функция Грина дается формулой

$$G\,(x,s) = \begin{cases} \frac{y_0(s)}{y_0(1)}\,(y_0\,(x) - y_0\,(1))\,, & x < s \\ \frac{y_0(x)}{y_0(1)}\,(y_0\,(s) - y_0\,(1))\,, & x > s. \end{cases}$$

Таким образом, функция $v\,(x,t)$ имеет следующее окончательное представление через интегро-дифференциальный оператор, который является Фредгольмовым по x и Вольтеровским по t:

$$\begin{aligned} v\,(x,t) = \int\limits_0^1 G\,(x,s) \cdot \Bigg(\left(\tfrac{v_s(s,t)}{y_0'(s)} + 1\right) \int\limits_0^t (t-\tau)\, N\,[v\,(s,t) + y_0\,(s)]\, d\tau \,+ \\ + \, t\left(\tfrac{v_s(s,t)}{y_0'(s)} + 1\right) B\,(s) \Bigg)\, ds. \end{aligned} \tag{19}$$

Для существования интеграла в (19), мы должны потребовать конечность самой функции $v\,(x,t)$, а также всех производных, входящих в подинтегральное выражение. В силу определения функции $N\,[y\,(x,t)]$ из (17), мы должны также потребовать конечность $x^{-1}\,|v|$, чтобы избежать неопределенности в члене $4x^2 y_x^3 / y^2$ в выражении для N.

Пусть $\bar{\Pi}_T$ — замкнутая область $\{x,t:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$, E_T — банахово пространство функций $v\,(x,t)$, имеющих конечную норму

$$\begin{aligned} \|v\|_{E_T} = \max_{\bar{\Pi}_T} x^{-1}\,|v| + \max_{\bar{\Pi}_T} |v_x| + \max_{\bar{\Pi}_T} |v_t| + \max_{\bar{\Pi}_T} |v_{tt}| + \max_{\bar{\Pi}_T} |v_{xx}| + \max_{\bar{\Pi}_T} |v_{xt}| \,+ \\ + \max_{\bar{\Pi}_T} |v_{xxt}| + \max_{\bar{\Pi}_T} |v_{xtt}| + \max_{\bar{\Pi}_T} |v_{xxtt}|\,. \end{aligned}$$

Предложение 1. *Пусть $y_0 \in C^2\,[0,1]$, $y_1 \in C^1\,[0,1]$ и, кроме того, выполнены условия согласования начальных данных, а также условие $C_1 x \le y_0 \le C_2 x$ (C_1, C_2 — произвольные константы, $C_1 > 0$). Тогда существует такое $T > 0$, что уравнение (15) имеет, и притом единственное решение $v\,(x,t) \in E_T$.*

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор из правой части (19) и обозначим его через $F(v)$. Обозначим через B_ρ шар $\|v(x,t)\|_{E_T} \le \rho$, выберем $\rho = C_1/2$. Для применения теоремы Каччиполли—Банаха нужно проверить, что $F(v)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, меньшей единицы в шаре B_ρ, а сам шар оператор переводит в себя. Вольтерровость оператора $F(v)$ гарантирует то, что при достаточно малом T оператор $F(v)$ переводит шар в банаховом пространстве в себя. Покажем выполнение условия Липшица $\|F(v_1) - F(v_2)\|_{E_T} \le K\|v_1 - v_2\|_{E_T}$. Рассмотрим $4x^2 y_x^3/y^2$ из определения (17). Это единственный член, входящий в $F(v)$, для которого следует проверить выполнение условия Липшица. Заметим, что $y(x,t) = v(x,t) + y_0(x)$. Оценивая первое слагаемое нормы $\|F(v_1) - F(v_2)\|_{E_T}$, находим в силу условия $C_1 x \le y_0 \le C_2 x$, что $\max\limits_{\bar{\Pi}_T} \frac{x^2 {y_0'}^3}{y_0^2} |v_2 - v_1| \le C$. Таким образом, можно выбрать такое малое T, при котором условие Липшица было бы выполнено с константой $K < 1$.

Доказательство локальной теоремы существования и единственности в случае движения жидкости в цилиндрическом слое ($\sigma = -1$) проводится аналогичным образом, поэтому здесь не приводится.

3. Обобщенная задача Гурса

Рассмотрим движение жидкости, заполняющей все пространство. Если начальные данные быстро убывают на бесконечности, то решение задачи будет определяться этими данными однозначно [2]. У нас вертикальная и окружная компоненты скорости растут по z линейно. Оказывается, в такой ситуации одни только начальные данные не определяют решение однозначно.

Приведем пример ЧИР осесимметричных уравнений Эйлера, в котором осевая компонента скорости имеет линейную зависимость от z [7]:

$$u = \psi^{-1}\dot{\psi} r, \quad w = -2\psi^{-1}\dot{\psi} z, \quad \text{где} \quad \psi \in C^1[0,\infty), \quad \dot{\psi}(0) = 0.$$

Более интересным примером является решение вида

$$u = U(r,t) = -\frac{1}{r}\int\limits_0^r \Psi(s,t)\, s ds, \quad w = \Psi(r,t)\, z, \tag{20}$$

где Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Psi_t + U\Psi_r + \Psi^2 = f(t) \tag{21}$$

с произвольной функцией $f(t)$. После перехода в (21) к новой пространственной переменной — лагранжевой координате ξ по формуле (9), будем иметь для функции $\mu(\xi,t) = \Psi(r,t)$ уравнение Риккати

$$\mu_t + \mu^2 = f(t). \tag{22}$$

Решение (22) однозначно определено при начальном условии

$$\mu = \mu_0(\xi) \quad \text{при} \quad t = 0, \xi \ge 0. \tag{23}$$

Таким образом, решение (20) обладает произволом в две функции: $f(t)$ и $\mu_0(\xi)$. В силу (20), задание μ_0 означает, что в начальный момент известно поле скоростей.

Это делает содержательным рассмотрение более общих решений, которые не имеют такого простого вида, но которые допускают задание осевой компоненты скорости, линейно зависящей от z.

Вместо y в (14) введем функцию $q = (\ln y_x)_t$, проинтегрируем это равенство по x. Уравнение примет вид:

$$q_t = q^2 + \chi + q_t|_{x=0} - q^2\big|_{x=0}\,, \tag{24}$$

где $\chi = -\int\limits_0^x \sigma\,(s)\, \frac{s y_x^3}{y^2} ds$ — сохраняющая знак функция x, t.

Для исходного уравнения (11) линии $\xi = 0$ и $t = 0$ являются двукратными характеристиками. Естественным обобщением задачи Гурса является задание y и y_t при $t = 0$ и y и y_x при $x = 0$.

Рассмотрим случай, когда исследуется движение жидкости в области, содержащей ось z. В этом случае асимптотика функции y при $x \to 0$ имеет вид:

$$y = a(t)x + b(t)x^2 + ..., \tag{25}$$

где a, b — некоторые функции t. Поскольку в силу определения x и ξ имеем $x|_{\,t=0} = r^2/8$, без потери общности можем считать $y_0 = x$, что дает $a\,(0) = 1$. Заметим также, что в силу определения y, функция $a\,(t)$ положительна.

Итак, в особом случае, мы рассматриваем сингулярный аналог задачи Гурса: вместо q и q_x задаем $a\,(t)$. В силу определения q и равенства (25) имеем:

$$q|_{x=0} = \frac{\dot a}{a}, \quad q_t|_{x=0} = \frac{a\ddot a - \dot a^2}{a^2}. \tag{26}$$

Далее, уравнение (24) сводится к интегральному с учетом начального условия $a\,(t)$, и полученное уравнение решается методом последовательных приближений. Но сначала нужно избавиться от функции y в исходном уравнении путем интегрирования равенства $q = (\ln y_x)_t$, что дает:

$$y(x,t) = \int\limits_0^x \exp\left[\int\limits_0^t q(s,\tau)d\tau\right] ds. \tag{27}$$

После интегрирования уравнения (24) по t мы получим:

$$\begin{gathered} q(x,t) = q_0(x) + \tfrac{\dot a(t)}{a(t)} - \dot a(0) - \int\limits_0^t \tfrac{\dot a^2(\tau)}{a^2(\tau)} d\tau + \int\limits_0^t q^2(x,\tau)d\tau - \\ - \int\limits_0^t \left\langle \int\limits_0^x \sigma\,(s) \left\{ \int\limits_0^\eta \exp\left[\int\limits_0^\tau q(s,\tilde\tau)d\tilde\tau\right]\right\}^{-2} s \exp\left[3\int\limits_0^\tau q(s,\tilde\tau)d\tilde\tau\right] ds \right\rangle d\tau. \end{gathered} \tag{28}$$

Уравнение (28) является Вольтеровским по обеим переменным x и t. Уравнение (28) будем рассматривать в классе непрерывных функций $q(x,t) \in C(\bar\Pi_{\alpha,\beta})$, где $\Pi_{\alpha,\beta}$ — прямоугольник $\{t, x:\ 0 < t < \alpha,\ 0 < x < \beta\}$. Сначала для уравнения (28) доказывается теорема существования "в малом" (т.е. для достаточно малых α и β). Здесь знак σ не играет роли. Затем, при определенных ограничениях типа неравенств на функции $q_0(x)$, $a(t)$ и знак σ, устанавливается априорная оценка нормы q. В благополучном случае она позволяет продолжить решение на любой интервал времени. В противоположном случае мы получаем разрушение решения за конечное время.

Предложение 2. *Если $\sigma \le 0$, $a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 \ge 0$ и $\min q_0(x) = \gamma > 0$, то решение разрушится за время, не большее чем $1/\gamma$.*

Доказательство. Пусть $\sigma \le 0$, $a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 \ge 0$ и $\min q_0(x) = \gamma > 0$. Тогда в прямоугольнике $\bar{\Pi}_{\alpha,\beta}$ выполнено неравенство $q_t \ge q^2$, равносильное следующему: $-d(q^{-1}) \ge dt$. Интегрируя его от 0 до текущего t, получаем:

$$-\frac{1}{q} \ge t - \frac{1}{q_0}. \tag{29}$$

При $t = 0$ функция q строго положительна для всех $x \in [0, \beta]$. Рассуждение от противного показывает, что она сохраняет это свойство на всем интервале существования решения задачи. Тогда из (29) следует, что

$$q \ge \frac{q_0}{1 - q_0 t} \ge \frac{\gamma}{1 - \gamma t}$$

для $0 \le x \le \beta$.

К примеру, функция $a\,(t) = \frac{1}{t+c}$ удовлетворяет неравенству $a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 \ge 0$.

Теперь переходим к интегральному уравнению (28). Обозначим $q\,(0, 0) = d$ (заметим, что в силу (26) $d = \dot{a}\,(0)$). Для применения теоремы Каччиполли—Банаха нужно проверить, что интегральный оператор удовлетворяет условию Липшица с константой, меньшей единицы в некотором шаре $|q(x, t) - d| \le c$, а сам шар оператор переводит в себя. И то, и другое можно обеспечить за счет малости α и β. Единственный момент, требующий оговорок, — это регулярность при $x \to 0$ функции

$$x^2 \left\{ \int\limits_0^x \exp\left[\int\limits_0^t q(s, \tau) d\tau \right] ds \right\}^{-2},$$

но это следует из ограниченности функции u в прямоугольнике $\bar{\Pi}_{\alpha,\beta}$. Получив решение уравнения (28) в классе $C\left(\bar{\Pi}_{\alpha,\beta}\right)$, мы обычным способом повышаем его гладкость при подходящей гладкости функции $a(t)$. Тогда из соотношения (27) будет следовать непрерывность производных y_{xxt}, y_{xtt} и y_{xxtt}, а также и всех младших производных, входящих в исходное уравнение. Таким образом, имеет место следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть в (24) $\sigma = x$, $q_0(x) \in C\,[0, \beta]$, $a\,(t) \in C^2\,[0, \alpha]$. Тогда найдутся такие α и β, что существует единственное решение $q\,(x, t) \in C\left(\bar{\Pi}_{\alpha,\beta}\right)$ задачи (24), (26).*

Далее рассмотрим задачу о продолжении решения по переменной x, т.е. при $\beta \to \infty$. Рассмотрим уравнение (28) и сделаем предположение об ограниченности функции $q\,(x, t)$: $|q(x, t) - d| \le c$ для $x, t \in \bar{\Pi}_{\alpha,\beta}$. Тогда в силу оценок $\exp\left[\int\limits_0^\tau q(s, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}\right] \le e^{\tau c}$ и $\exp\left[\int\limits_0^\tau q(s, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}\right] \ge e^{-\tau c}$ имеем следующую оценку подинтегрального выражения из (28):

$$\sigma\,(s) \left\{ \int\limits_0^\eta \exp\left[\int\limits_0^\tau q(s, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right] \right\}^{-2} s \exp\left[3 \int\limits_0^\tau q(s, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right] \le e^{5c\tau} \sigma\,(s)\, s^{-1}.$$

Для сходимости интеграла в (28), потребуем выполнения неравенства

$$|\sigma\,(s)| \le K s\,(1 + s)^{-1-\delta}, \tag{30}$$

где K и δ — положительные константы. Тогда интегральный оператор в (28) будет удовлетворять условию Липшица в шаре $|q(x,t)-d| \le c$ для $q(x,t) \in C(\bar{\Pi}_{\alpha,\infty})$ при любом фиксированном $c > 0$. Зафиксируем c и выберем α настолько малым, чтобы интегральный оператор переводил указанный шар в себя. Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 4. *Предположим, что функция $\sigma(x) \in C^1[0,\infty)$ и для нее выполнено условие (30). Тогда найдется такое $\alpha > 0$, что задача (24), (26) имеет, и притом единственное решение $q(x,t) \in C(\bar{\Pi}_{\alpha,\infty})$.*

Если $\sigma < 0$ и $k(\xi) < 0$ (где $k(\xi)$ — произвольная функция из (10)), то положительность Ω имеет место для любых z. Если $\sigma > 0, \nu < 0$, то неравенство $\lambda z^2/2 + \nu \le 0$ будет выполнено только для $|z| \le \sqrt{-2\nu/\lambda}$. Поверхность $|z| = \pm\sqrt{-2\nu/\lambda}$, на которой циркуляция окружной скорости обращается в нуль, отделяет область закрученного движения от незакрученного. В лагранжевых координатах данная поверхность является неподвижной. Если допустить существование разрыва производных скорости на линии $\Omega = 0$, то возможно сопряжение закрученного течения с осесимметричным течением. Этот вопрос не рассматривался в данной работе. Примеры задач сопряжения можно найти в [8].

Ниже на основании предложения 4 строится пример неединственности решения задачи Коши для системы (1). Для этого рассмотрим начальные данные вида

$$u = u_0(r), \quad \Omega = -r^3\left[\lambda_0(r)z^2/2 + \nu_0(r)\right],$$
$$w = -\left(\frac{du_0}{dr} + \frac{u_0}{r}\right)z \quad r \ge 0,\ z \in R,\ t = 0. \tag{31}$$

Здесь функции

$$u_0 \in C^3[0,\infty), \quad \lambda_0 \in C^1[0,\infty), \quad \nu_0 \in C^1[0,\infty) \tag{32}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_0 \le 0, \quad \nu_0 \le 0, \quad r \in [0,\infty), \tag{33}$$

$$|u_0| \le Kr, \quad |\nu_0| \le Kr, \quad |\lambda_0| \le Kr\left(1 + r^2\right)^{-1-\delta}. \tag{34}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (32)–(34). Тогда найдется такое $\alpha > 0$, что задача Коши (1), (31) имеет в области $S_\alpha = \{r,z,t : r > 0,\ z \in R,\ t \in (0,\alpha)\}$ семейство классических решений, зависящих от произвольной функции $m(t) = w_z|_{r=0}$, $m(t) \in C^2[0,\alpha]$, $t \in [0,\alpha]$.*

Действительно, в силу (2), $m(t) = \Psi(0,t)$. На основании (3) имеем $2U(r,t) = -r\Psi(0,t) + O(r^3)$, $r \to 0$. С другой стороны, вследствие (9), $\frac{\partial r}{\partial \xi}(0,t) = \exp\left[\int\limits_0^t U_r(0,\tau)\,d\tau\right]$. Далее, из определения $y = r^2/8$ и формулы (25) следует, что $a(t) \equiv \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{8}\left[\frac{\partial r}{\partial \xi}(0,t)\right]^2$. Поэтому $8a(t) = \exp\left[-\int\limits_0^t m(\tau)\,d\tau\right]$, что связывает произвол в решении задачи Коши (1), (31) и обобщенной задачи Гурса.

Список литературы

[1] В.В. Пухначев, *Точные решения уравнений гидродинамики, построенные на основе частично инвариантных*, ПМТФ, **44**:3 (2003), 18–25.

[2] М.Р. Уховский, В.И. Юдович, *Осесимметричные течения идеальной и вязкой жидкости, заполняющей все пространство*, ПММ, **32**:1 (1968), 59–69.

[3] Л.В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1978.

[4] В.В. Пухначев, *Новый класс точных решений уравнений Эйлера*, Докл. РАН. Т. 382, № 6 (2002), 777–780.

[5] Е.Ю. Мещерякова, *Точные решения уравнений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости*, ПМТФ, **43**:3 (2002), 66–75.

[6] Е.Ю. Мещерякова, *О новых стационарных и автомодельных решениях уравнений Эйлера*, ПМТФ, **44**:4 (2003), 3–9.

[7] В.В. Пухначев, *Симметрии в уравнениях Навье—Стокса*, Успехи механики, **4**:1 (2006), 6–76.

[8] Е.Ю. Мещерякова, В.В. Пухначев, *Интегрируемые модели вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости*, Докл. РАН, **412**:2 (2007), 188–192.

Елена Юрьевна Мещерякова
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Пр. академика Лаврентьева 15,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: helenmesh@gmail.com