S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 238–248 (2007) УДК 510.67
MSC 03C52, 03C50

ГРАФЫ И МОДЕЛИ С КОНЕЧНЫМИ ЦЕПЯМИ

А.Т. НУРТАЗИН

Abstract. We investigate some properties of graphs with finite simple chains. In every countably categorical infinite graph there is a subgraph, which could be obtained from the infinite complete graph by the exshanging of some chains of the fixed lenght by edges. Classes of all graphs with finite chains and all finite graphs have the same elementary theory. The elementary theory of every graph of the finite lenght desidable. At the end we also introduce the notion. Of the graph of an arbitrary structure and shows that all obtained facts remaines true for classes of structures which graphs have prescribed properties.

В первом параграфе предлагаемой статьи замечается, что любой счетно категоричный граф с бесконечной простой цепью должен содержать подграф Γ_ω^m, который получается из бесконечного полного графа заменой каждого ребра цепью из m вершин.

Во втором параграфе изучаются классы графов с различными условиями конечности на длины простых цепей. Показано, что элементарные теории класса графов с конечными простыми цепями и класса всех конечных графов-совпадают. Элементарная теория класса всех графов любой фиксированной конечной длины и элементарная теория каждого счетно категоричного графа конечной длины разрешимы, в частности, такова элементарная теория любого плоского счетно категоричного графа.

На основном множестве модели произвольной конечной сигратуры можно ввести структуру графа, считая смежными любые два элемента, которые входят в кортеж из некоторого базисного отношения. Таким способом в модели можно ввести понятие цепи и определить ее длину. Тогда все вышеперечисленные результаты о разрешимости переносятся на модели произвольной сигнатуры.

Nurtazin A.T., Graphs and models with finite chains.

Поступила 25 декабря 2006 г., опубликована 28 мая 2007 г.

§0. Предварительные сведения

Графом называется модель вида $\Gamma = \langle G, R\rangle$, где R – бинарное отношение. При этой элементы из G обычно называются вершинами графа, а пары из R – ребрами. Наиболее изученным является класс графов, в которых отношение R симметрично и антирефлексивно. Графы, изучаемые в предлагаемой статье, являются именно такими. Вершины g и g' графа Γ называются смежными, если они соединены ребром. Последовательность $C = \langle c_0, \ldots, c_i, \ldots : i < n\rangle$ различных вершин, в которой любые две соседние соединены ребром, называется простой цепью в графе Γ или, просто, цепью, а число $n = \ell(C)$ – ее длиной. Если в графе Γ длины всех цепей ограничены некоторым натуральным числом, то говорим, что Γ имеет конечную длину, а наименьшее такое число называем длиной графа $\Gamma = \ell(\Gamma)$.

Пусть для натуральных чисел m и n K_n^m класс графов, который получаются из полного графа с n вершинами установкой на каждом ребре не более, чем m новых вершин. Говорят, что Γ опускает K_n^m, если он не содержит ни одного подграфа из этого класса. Если взять произвольный граф Γ , то может оказаться, что для любого m существует n такое, что Γ опускает K_n^m. Более жестким для Γ является условие существования такого n, что опускает K_n^m, для любого m. Первый класс ввели в [10] Падевский и Циглер, а второй - в [9] Херре, Меклер и Смит. Очевидно, класс, состоящий из графов конечной длины, является собственным подклассом обоих вышеопределенных классов. Ив теоремы первого параграфа следует, что эти три класса содержат одни и те же счетно категоричные графы.

В [8] Гейфман естественным образом определил расстояние $\rho(a, b)$ между двумя любыми элементами a и b произвольной модели конечной предикатной сигнатуры. Это расстояние может быть натуральным числом или бесконечностью и в случае графа совпадает с обычным понятием расстояния между вершинами графа. Следующим шагом на этом пути представляется определение на основном множестве модели $\mathfrak{N}$ конечной предикатной сигнатуры σ структуры неориентированного графа $\Gamma_\sigma(\mathfrak{N})$ таким образом, чтобы понятие расстояния между элементами этой модели из [8] совпало с обычным расстоянием между соответствующими вершинами полученного графа. При изучении модели $\mathfrak{N}$ некоторой бесконечной сигнатуры Σ можно рассматривать множество графов $\Big\{\Gamma_\sigma(\mathfrak{N}) : \sigma$ конечная подсигнатура сигнатуры $\Sigma\Big\}$.

Определение. Пусть $\mathfrak{N} = \langle A, \Sigma\rangle$ модель и σ – конечная подсигнатура предикатной сигнатуры Σ. Тогда в графе $\Gamma_\sigma(\mathfrak{N}) = \langle A, R_\sigma\rangle$ по определению полагаем $\Gamma_\sigma(\mathfrak{N}) \models R_\sigma(a, b)$ тогда и только тогда, когда для некоторого n-местного предиката P из σ и натуральных чисел i и j, меньших n, на одной из пар (a, b) или (b, a) в модели $\mathfrak{N}$ выполняется формула

$$\varphi(x_i, x_j) \equiv x_i \doteqdot x_j \& \exists x_0 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_{n-1} P(x_0, \ldots, x_{n-1}).$$

Таким образом, отношение $R_\sigma(x, y)$ оказывается σ-выразимым в модели $\mathfrak{N}$. Если модель $\mathfrak{N}$ является неориентированным графом, то выполняется равенство $\Gamma(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Последовательность элементов в модели $\mathfrak{N}$ называем σ-цепью, если она является цепью в графе $\Gamma_\sigma(\mathfrak{N})$.

Строение графов из класса $\Big\{\Gamma_\sigma(\mathfrak{N}) : \sigma$ конечная подсигнатура сигнатуры $\Sigma\Big\}$ полностью определяется типом изоморфизма модели $\mathfrak{N}$. Поэтому, естественно ожидать, что их свойства в какой то мере должны отражать свойства исходной модели. Возможно, в случае моделей с бинарными отношениями и уноидов описанное соответствие может оказаться достаточно полным. Так как графы имеют наглядную геометрическую интерпретацию, то может быть оправданным одновременно с изучением самой модели изучать свойства ее графов.

В некоторых случаях плодотворным может оказаться решение обратной задачи: выделив интересные свойства или классы графов, найти и описать модели, графы которых обладают упомянутыми свойствами или лежат в этих классах. Широкие новые классы стабильных и суперстабильных теорий дает прямой перенос по предложенной схеме теорем Падевского и Циглера из [10] и Херре, Меклера и Смита из [9]. Вторая теорема этой статьи также является результатом такого подхода.

Полная теория T первой ступени называется счетно категоричной (ω - категоричной), если две ее любые счетные модели изоморфны. В свою очередь, модель, имеющая ω-категоричную теорию, также называется ω-категоричной. По теореме Рылль – Нардзевского [12] необходимым и достаточным условием ω-категоричности полной теории T является конечность каждой алгебры Линденбаума - Тарского $B_n(T)$. Следующее утверждение является простым следствием приведенного критерия.

Лемма. *Еели $B = \varphi(\mathfrak{N}, \bar{a})$ бесконечное относительно формульное подмножество в ω-категоричной модели $\mathfrak{N}$, то ограничение $\mathfrak{N} \upharpoonright B$ также ω-категорично.*

Из определения графов модели следует, что для произвольных конечных подсигнатур σ и σ' сигнатуры Σ из включения $\sigma \subseteq \sigma'$ для произвольной модели $\mathfrak{N} = \langle A; \Sigma\rangle$ следует выполнение включения $R_\sigma \subseteq R\sigma'$. По теореме Рылль - Нардзевского для ω-категоричной модели $\mathfrak{N}$ сигнатуры $\Sigma = \bigcup\Big\{\sigma_n : n \in \omega, \sigma_n \subseteq \sigma_{n+1}\Big\}$ возрастающая цепочка формульных бинарных отношений $R_{\sigma_0} \subseteq \ldots \subseteq R_{\sigma_n} \subseteq \ldots$ должна стабилизироваться. В этом случае наибольший из получающихся графов можно называть графом $\Gamma(\mathfrak{N})$ ω-категоричной модели $\mathfrak{N}$.

При доказательстве трех последних предложений второго параграфа применяется метод "перекидки введенный в [4,6,7] для конечной подсигнатуры σ сигнатуры Σ, отношение эквивалентности $\underset{m}{\overset{\sigma}{\approx}}$ вводится индукцией по m следующим образом:

Для $\bar{a} =< a_0, \ldots, a_{n-1} >$ из $\mathfrak{N}$ и $\bar{b} =< b_0, \ldots, b_{n-1} >$ из $\mathfrak{L}$

$$\bar{a} \underset{m}{\overset{\sigma}{\approx}} \bar{b} \rightleftharpoons \mathfrak{N}(\bar{a}) \upharpoonright |\bar{a}| \approx \mathfrak{L}(\bar{b}) \upharpoonright |\bar{b}|;$$

$$\bar{a} \underset{m+1}{\overset{\sigma}{\approx}} \bar{b} \rightleftharpoons \forall a \in |\mathfrak{N}|\, \exists b \in |\mathfrak{L}|\, [\bar{a}^\wedge\langle a\rangle \underset{m}{\overset{\sigma}{\approx}} \bar{b}^\wedge\langle b\rangle] \&$$

$$\& \forall b \in |\mathfrak{L}|\, \exists a \in |\mathfrak{N}|\, [\bar{a}^\wedge\langle a\rangle \underset{m}{\overset{\sigma}{\approx}} \bar{b}^\wedge\langle b\rangle]]$$

В [2] введено понятие "$\sigma - m - n$-диаграммы кортежа $\bar{a}$ которая выделяет класс n-элементных кортежей, смежных с $\bar{a}$ по отношению $\underset{m}{\overset{\sigma}{\approx}}$, и показано, что разрешающая процедура для дополнения элементарной теории данного класса моделей с помощью примитивно рекурсивной процедуры сводится к множеству диаграмм, выполнимых на моделях из этого класса. Таким образом, существование разрешающей процедуры для множеств., выполнимых на моделях данного класса диаграмм гарантирует разрешимость элементарной теории этого класса.

§I. Счетно категоричные графы с бесконечными цепями.

Содержание этого параграфа целиком исчерпывается следующей теоремой:

Теорема I. *Если в счетно категоричном графе* Γ *имеется бесконечная цепь, то для некоторого натурального числа* m *он содержит подграф* Γ_ω^m.

Доказательство. Пусть $C = \langle c_0, \ldots, c_n, \ldots \rangle$ простая бесконечная цепь в графе Γ. Так как все вершины цепи C связаны между собой, то в графе Γ все они оказываются в одной связной компоненте, которую мы обозначим через $[C]_\Gamma$. В предыдущем параграфе замечено, что для любого натурального числа n бинарное отношение на вершинах графа "быть на расстоянии не более, чем n $\rho_\Gamma(x,y) \leq n$, формульно. Но теореме Рылль - Нардзевского, возрастающая цепочка множеств

$$\{(a,b) : \rho_\Gamma(x,y) \leq 0\} \subseteq \ldots \leq \{(a,b) : \rho_\Gamma(x,y) \leq n\} \subseteq \ldots$$

стабилизируется на некотором конечном шаге. Поэтому, связная компонента $|C|_\Gamma$ в графе Γ совпадает о окрестностью конечного радиуса n к некоторой вершины $d : |C|_\Gamma = \{g : \rho_\Gamma(g,d) \leq n\}$ ω-категорична по лемме из предыдущего параграфа.

Для элемента d выполняется следующее условие:

(1) $\forall s \in \omega \exists A \quad [A -$ бесконечное подмножество $C \& \forall a \in A[\rho_\Gamma(d,a) = n]]$.

Ясно, что вершин d, удовлетворяющих этому условию, может быть много. Выберем среди них d_0 такую, что число $s = s_0$ в условии (1) при этом оказывается наименьшим. Для любой вершины a из A выполняется $\rho_\Gamma(d,a) = s_0$. Поэтому, d_0 соединена с каждой вершиной a из A некоторой цепью длины s_0, которую зафиксируем и обозначим через C_a^0.

Покажем, что для множества цепей $\mathcal{L} = \left\{C_a^0 : a \in A\right\}$: выполняется следующее условие:

(2) Никакое бесконечное подмножество цепей из $\mathcal{L}$ не может пересекаться в одной точке d, отличной от d_0.

Действительно, в противном случае расстояние от вершины d лежащей на цепи C_a, до вершины a из A не превышало бы длины участка цепи C_a от d до a и было бы строго меньше s_0. Тогда, для некоторого натурального числа s_1, меньшего s_0, оказалось бы бесконечным подмножество $A_1 = \{a \in A : \rho_\Gamma(d,a) = s_1\}$.

Что противоречит минимальности s в условии (1).

Если $d_0 = c_{i_0} \in C$, то последовательность $C_0 = \langle c_{i_0+1}, \ldots, c_{i_0+k}, \ldots \rangle$ является подцепью цепи C, которая содержит все вершины из C начиная с c_{i_0+1}. В противном случае в качестве C_0 берем исходную цепь C.

Воспользовавшись условием (2), в бесконечном пересечении $C_0 \bigcap A$ можно выделить бесконечное подмножество $_0$ такое, что для любых различных вершин a_0 и a_1 из цепи C_{a_0} и C_{a_1}, соединяющие их с d_0, не пересекаются.

По лемме из предыдущего параграфа, граф $\Gamma_0 = \Gamma \backslash \{d_0\}$ счетно категоричен. В этом графе цепь C_0 лежит в бесконечной связной компоненте, которую обозначим через $[C_0]_{\Gamma_0}$. Если в предыдущих рассуждениях компоненту $[C]_\Gamma$ заменить на $[C_0]_{\Gamma_0}$, а цепь C на множество A_0, то в результате можно получить: вместо d_0 – новую вершину d_1, вместо числа s_0 – s_1, вместо цепей C_a^0 – цепи C_a^1, вместо множества A_0 – A_1, вместо цепи C_0 – C_1 и вместо подграфа Γ_0 – Γ_1.

В дальнейшем этот процесс можно повторить сколько угодно раз. После n-го шага мы будем иметь вершины d_0, ..., d_{n-1}, каждая d_i из которых соединяется попарно непересекающимися цепями C_a^i, $a \in A_{n-1}$, длины s_i с вершинами a из A_{n-1}.

Для a из A_{n-1} две вершины d_i и d_j, $i < j < n$, можно соединить цепью C_a^{ij}, составленной из цепей C_a^i и C_a^j. Эту цепь можно сделать простой, выбросив лишние вершины. Часть C_a^i цепи C_a^{ij} не пересекается ни с какой цепью вида $C_{a'}^i$, $a' \neq a$, и может пересекаться лишь с конечным числом цепей вида $C_{a'}^j$, $a' \neq a$, так как последние попарно не пересекаются. Поэтому, любая цепь вида C_a^{ij} пересекается лишь с конечным числом цепей вида $C_{a'}^{ij}$, $a' \neq a$. Так как множество A_{n-1} бесконечно, то таких цепей бесконечно много, и среди них можно выбрать бесконечно много попарно непересекающихся. Ввиду произвольности числа n мы показали, что любые две вершины d_i и d_j, $i \neq j$, можно соединить бесконечным числом попарно непересекающихся цепей.

Теперь мы воспользуемся счетной категоричностью графа Γ, чтобы найти натуральное число ℓ_0 , ограничивающее длины счетного числа попарно непересекающихся цепей, соединяющих произвольные вершины d_i и d_j. Действительно, для любых натуральных чисел k и ℓ в графе Γ формульно бинарное отношение: $R_\ell^k(x,y) \leftrightharpoons$ “вершины x и y можно соединить k попарно непересекающимися цепями длины, не более ℓ". Множества пар, выделяемых с помощью формул R_ℓ^k увеличиваются при возрастании ℓ и уменьшаются при возрастании k. Ввиду счетной категоричности графа Γ, в рассматриваемом случае должна произойти стабилизация. То есть, найдутся натуральные числа k_0 и ℓ_0 такие, что для любых i и j справедливо $\Gamma \models R_{\ell_0}^{k_0}(x,y) \longleftrightarrow R_{\ell_0+j}^{k_0+i}(x,y)$. Положим $R(x,y) \leftrightharpoons R_{\ell_0}^{k_0}(x,y)$. Тогда для любых различных i и j выполняется $\Gamma \models R(d_i,d_j)$.

Из теоремы компактности и счетной категоричности графа Γ вытекает возможность соединения двух любых вершин d_i, и d_j счетным числом попарно непересекающихся цепей длины, не более ℓ_0. Фиксируем эти цепи и индукцией по канторовским номерам пар $\langle i,j\rangle$ из них выбираем по одной цепи C_{ij} так, чтобы каждая новая не пересекалась ни с одной из ранее выбранных. Тогда все цепи из множества $\{C_{ij} : i \neq j\}$ попарно не пересекаются, и длина каждой из них не превышает числа ℓ_0.

Если для $\ell \leq \ell_0$ положить $M_\ell = \{\{d_i,d_j\} : i \neq j,\ \text{длины}\, \ell_0\}$, то семейство двухэлементных подмножеств множества $\{d_0,\ldots,d_n,\ldots\}$ разбивается на ℓ_0 частей. Теорема Рамсея [11] позволяет среди d_i, $i \in \omega$, выделить бесконечное подмножество вершин, соединенных попарно цепями C_{ij} одинаковой длины $m+1$ $(\leq \ell_0)$. Множество всех этих вершин вместе с соединяющими их цепями и образует искомый подграф Γ_ω^m. Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы следует, что в счетно категоричных графах из классов Падевского - Циглера [10] и Херре - Маклера - Смита [9] не может быть бесконечных цепей. Теорема компактности в применении к таким

графам показывает, что в них дли
ны всех простых цепей должны быть огреничены некоторыми натуральными числами.

§2. Графы и модели с конечными цепями.

В этом параграфе мы хотим изучить некоторые свойства графов и моделей с различными условиями конечности содержащихся в них цепей. В трех первых предложениях изучаются графы, в которых длины всех цепей ограничены некоторый натуральным числом.

В обычной теории графов традиционной является проблема раскраски, которую можно сформулировать следующим образом: "Можно ли основное множество некоторого графа Γ (из данного класса $\mathcal{K}$) разбить на r попарно непересекающихся подмножеств так, чтобы при этом любые две смежные вершины оказались в разных подмножествах?" Разбиение с этим свойством называется r-раскраской, а граф Γ – r-раскрашиваемым. Наименьшее возможное число r - хроматическим числом графа Γ (или класса $\mathcal{K}$).

Длина полного n-элементного графа Γ_n равна $n-1$, а его хроматическое число - n. Покажем, что хроматическое число любого графа длины $n-1$ не превышает числа n.

Предложение 1. *Если длина графа Γ равна $n-1$, то он n - раскрашиваем.*

Доказательство. Доказательство индукцией по $n \geq 1$. В графе нулевой длины все вершины изолированы и для его раскраски можно взять семейство, состоящее из одного основного множества этого графа.

Пусть граф Γ имеет длину $n > 0$. Цепь вида $\langle c_0, \ldots, c_n \rangle$ для которой выполняется соотношение $\Gamma \models R(c_0, c_n)$, назовем циклом. Любой цикл в графе Γ составляет отдельную связную компоненту, а множество всех вершин графа Γ, входящих в некоторые циклы, выделяется некоторой формулой $C(x)$. Если $\langle c_0, \ldots, c_n \rangle$ цепь в $\Gamma \backslash C(\Gamma)$, то вершины c_1, ..., c_{n-1} назовем внутренними. Если B множество всех внутренних вершин Γ, то длина подграфа $\Gamma \restriction B$ строго меньше n. Класс подграфов графа Γ, расширяющих $\Gamma \restriction B$ и имеющих длину меньше n, индуктивен относительно включения и содержит некоторый максимальный элемент $\Gamma_0 = \langle G_0, R \rangle$. Длина Γ_0 равна $n-1$ и в $G \backslash G_0$ нет внутренних вершин графа Γ. Ввиду максимальности Γ_0, для любой вершины g из множества $G \backslash G_0$ длина подграфа $\Gamma \restriction G_{0 \bigcup \{g\}}$ равна n. Это означает, что в подграфе $\Gamma \restriction G_0 \cup \{g\}$ найдется цепь длины $n - \langle g_0, \ldots, g_{n-1}, g \rangle$, в которой g не является внутренней вершиной. Если бы в $G \backslash G_0$ нашлась хотя бы одна вершина g', смежная с g, то в графе Γ последовательность $\langle g_0, \ldots, g_{n-1}, g, g' \rangle$ оказалась бы цепью длины $n+1$.

По индуктивному предположению подграф Γ_0 можно покрыть подмножествами P_0, ..., P_{n-1} со свойством раскраски. Если теперь положить $P_n = G \backslash G_0$, то система подмножеств $P_0, \ldots, P_n$ является раскраской исходного графа Γ. Предложение доказано. □

При доказательстве второго, третьего и четвертого предложений нам понадобится следующее утверждение:

Лемма. *1). Пусть $\Gamma = \langle G, R \rangle$; множество G разбито на два подмножества G_0 и G_1; $G_1' \subseteq G_1$; g_0, ..., $g_{n-1} \in G_0$; подграф $\Gamma \restriction G_1$ замкнут относительно связности в $\Gamma \restriction G_1 \backslash \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ и для натурального числа m*

имеет место

$$\langle G_1 \cup \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}; R, g_0, \ldots, g_{n-1}\rangle \underset{m}{\approx} \langle G' \cup \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}; R, g_0, \ldots, g_{n-1}\rangle.$$

Тогда выполняется соотношение $\Gamma \underset{m}{\approx} \Gamma \restriction G_0 \cup G_1'$.

2). Существует примитивно рекурсивная функция $f(m,n)$ такая, что в предыдущем пункте подграф $\Gamma \restriction G_1$ можно взять состоящим не более чем из $f(m,n)$ связных компонент.

Доказательство. 1). В графе Γ ни одна вершина из множества $G_0 \backslash \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ не смежна ни с одной вершиной из G_1. Теперь перекидку на m шагов между Γ и $\Gamma \restriction G_0 \cup G_1'$ можно проводить, оставляя на месте вершины из G_0, а между G_1 и G_1 - используя соотношение $\langle G_1 \cup \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}; R, g_0, \ldots, g_{n-1}\rangle \underset{m}{\approx} \langle G' \cup \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}; R, g_0, \ldots, g_{n-1}\rangle$.

2). Во первых заметим, что число попарно не m - эквивалентных связных графов с n, выделенными вершинами можно ограничить с помощью некоторой примитивно рекурсивной функции $g(m,n)$. Для произвольных вершин g_0, $\ldots$, g_{n-1}, в некотором графе $\Gamma = \langle G; R\rangle$ связные компоненты в $\Gamma \restriction G \backslash \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ по отношению $\overset{\langle R; g_0, \ldots, g_{n-1}\rangle}{\underset{m}{\approx}}$ разбиваются на смежные классы. Если мощность произвольного такого класса не превышает m, то в Γ' включаем все компоненты из этого класса, если же число компонент в этом смежном классе больше чем m, то в Γ' включаем любые m из них. Нетрудно видеть, что $\Gamma'(g_0, \ldots, g_{n-1}) \underset{m}{\approx} \Gamma(g_0, \ldots, g_{n-1})$ и в $\Gamma' \backslash \{(g_0, \ldots, g_{n-1})\}$ не более $m \cdot g(m,n) = f(m,n)$ связных компонент. □

Предложение 2. *Пусть в графе $\Gamma = \langle G; R\rangle$ выделено n вершин $g_0, \ldots, g_{n-1}$ и подграф $\Gamma \restriction G \backslash \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ имеет длину s. Тогда для любого натурального числа m в Γ найдется конечный подграф Γ', удовлетворяющий соотношению*

$$\Gamma(g_0, \ldots, g_{n-1}) \underset{m}{\approx} \Gamma'(g_0, \ldots, g_{n-1}).$$

Причем мощность этого подграфа ограничивается некоторой примитивно рекурсивной функцией $h(m,n,s)$, зависящей от переменных m, n и s и не зависящей от самого графа Γ.

Доказательство. Искомую функцию $h(m,n,s)$ зададим индукцией по параметру s. Для s равного нулю подграф $\Gamma \restriction G \backslash \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ состоит из изолированных вершин. Смежный класс $\Gamma(g_0, \ldots, g_{n-1})$ по отношению $\underset{m}{\approx}$ целиком определяется типом изоморфизма подграфа

$$\Gamma(g_0, \ldots, g_{n-1}) \restriction \{(g_0, \ldots, g_{n-1})\}$$

и m - диаграммой модели

$$\langle G \backslash \{(g_0, \ldots, g_{n-1})\}; P_0, \ldots, P_{n-1}\rangle,$$

в которой одноместные предикаты задаются равенствами:

$$P_0 = \{g \in G \backslash \{g_0, \ldots, g_{n-1}\} : \Gamma \models R(g_0, g)\}, \ldots$$
$$P_{n-1} = \{g \in G \backslash \{g_0, \ldots, g_{n-1}\} : \Gamma \models R(g_{n-1}, g)\}.$$

Из теоремы Бемана [5] (см. также [2, §4, пример 1] следует существование примитивно рекурсивной функции $g(m,n)$ такой, что любая модель сигнатуры $\langle P_0^{(1)}, \ldots, P_{n-1}^{(1)}\rangle$ m - эквивалентна некоторой своей конечной подмодели, мощность которой не превышает $g(m,n)$. Но тогда функцию $f(m,n,0)$ можно положить равной $g(m,n)+n$.

Таким образом, для завершения доказательства остается найти схему примитивной рекурсии, соответствующей индукционному переходу от s к $s+1$. Пусть граф $\Gamma \restriction G\backslash\{g_0,\dots,g_{n-1}\}$ имеет длину $s+1$. По второй части предыдущей леммы в нем можно выделить не более $f(n,s)$ связных компонент $\Gamma_0 = \langle G_0 : R\rangle$, ..., $\Gamma_{k-1} = \langle G_{k-1} : R\rangle$ таких, что для подграфа $\Gamma' = \langle G' : R\rangle$ и $G' = \{g_0,\dots,g_{n-1}\} \cup G_0 \cup \ldots \cup G_{k-1}$, выполняется соотношение $\Gamma'(g_0,\dots,g_{n-1}) \underset{m}{\approx} \Gamma(g_0,\dots,g_{n-1})$. Длина некоторых из этих компонент равна $s+1$. Если Γ_i такая компонента, то в ней найдется цепь $\langle g_0^i,\dots,g_{s+1}^i\rangle$ длины $s+1$. Тогда $\Gamma_i(g_0,\dots,g_{n-1},\, g_0^i,\dots,g_{s+1}^i)$ удовлетворяет условиям предложения для тройки m, $n+s+2$, s и, по индуктивному предположению, содержит m-эквивалентный себе подграф $\Gamma_i'(g_0,\dots,g_{n-1},g_0^i,\dots,g_{s+1}^i)$, мощность которого ограничена чмслом $h(m,n+s+2,s)$. Проделав такую же процедуру с оставшимися компонентами, мы в результате получим искомый подграф Γ', мощность которого ограничивается числом $f(n,s)\cdot h(m,n+s+2,s)$. Полученное выражение является рекуррентным соотношением для вычисления функции $f(m,n,s)$. Предложение доказано. $\square$

Следствие. *Для любого фиксированного числа s элементарная теория класса графов длины s разрешима, а все алгебры Линденбаума - Тарского этой теории атомны.*

Сигнатура Σ состоящая из одного двуместного предиката и счетного множества констант g_0, ..., g_n, ..., допускает геделевскую нумерацию. В формулировке и доказательстве следующего предложения для краткости говорим, что функция перечисляет множество формул вместо того, что она перечисляет геделевские номера формул из этого множества.

Предложение 3. *Существует примитивно рекурсивная функция F от четырех переменных такая, что для любых фиксированных n, s и k функция от одного аргумента $F(n,s,k,t)$ перечисляет теорию ω-категоричного графа $\Gamma = \langle G;R\rangle$ с n выделенными вершинами g_0, ..., g_{n-1}, в котором длина подграфа $\Gamma \restriction G\backslash\{g_0,\dots,g_{n-1}\}$ равна s. И для любого ω-категоричного графа $\Gamma = \langle G;R\rangle$ с n выделенными вершинами g_0, ..., g_{n-1}, в котором подграф $\Gamma \restriction G\backslash\{g_0,\dots,g_{n-1}\}$ имеет длину s найдется соответствующий параметр k.*

Доказательство. Требуемую функцию можно будет получить формализацией предлагаемого ниже эффективного процесса, в ходе которого индукцией по s будут описаны ω-категоричные графы вида $\Gamma = \langle G;R\rangle$ с n выделенными вершинами $g_0,\dots,g_{n-1}$, в которых подграфы $\Gamma \restriction G\backslash\{g_0,\dots,g_{n-1}\}$ имеют длину s.

Пусть в графе $\Gamma = \langle G;R\rangle$ выделены вершины g_0, ..., g_{n-1}, подграф $\Gamma \restriction G\backslash\{g_0,\dots,g_{n-1}\}$ имеет длину s и состоит из связных компонент $\Gamma_i = \langle G_i;R\rangle$, $i\in\alpha$, $\alpha\le\omega$. Элементарная теория этого графа ω-категорична тогда и только тогда, когда ω-категорична элементарная теория любого его подграфа вида $\Gamma(g_0,\dots,g_{n-1}) \restriction G_i\backslash\{g_0,\dots,g_{n-1}\}$, $i\in\alpha$, и среди последних имеется лишь конечное число попарно неизоморфных. Поэтому, эффективное описание всех таких графов станет возможным как только будет получено эффективное описание всех таких связных графов. Оба эти вопроса будем решать совместной индукцией по s.

Случай s равного нулю очевиден.

Пусть дан ω-категоричный граф $\Gamma = \langle G; R\rangle$, в котором выделены вершины $g_0, \ldots, g_{n-1}$ и подграф $\Gamma \restriction G \backslash \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ имеет длину $s+1$. В подграфе $\Gamma \restriction G\backslash\{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ зафиксируем произвольную цепь длины $s+1-\langle g'_0, \ldots, g'_{s+1}\rangle$. Как и предыдущем предложении подграф $\Gamma \restriction G\backslash\{g_0, \ldots, g_{n-1}, g'_0, \ldots, g'_{s+1}\}$ имеет длину не более s. Полученное сведение случая $s+1$ к случаю s удовлетворяет схеме примитивной рекурсии. Предложение доказано. $\square$

Предложение 4. *Пусть в графе Γ все цепи конечны. Тогда для любого натурального числа m, в Γ найдется конечный подграф Γ', m - эквивалентный Γ.*

Доказательство. Граф Γ можно считать счетным. В противном случае в Γ достаточно взять счетную элементарную подмодель. Как и при доказательстве двух предыдущих утверждений рассуждение сводится к рассмотрению случая, когда граф Γ связен.

Зададим индуктивный процесс, на каждом шаге n, которого конечным числом последовательностей вида $\eta = \langle i_0, \ldots, i_{n-1}\rangle$ из ${}^n\omega$ будут отмечаться различные подграфы Γ_η и вершины g_η графа Γ. При этом отмечаемые подграфы и вершины будут обладать следующими свойствами.

1. Если на шаге n последовательностью η из ${}^n\omega$ отмечается подграф Γ_η и вершина g_η, то $g_\eta \in \Gamma_\eta$.

2. Если на шаге $n+1$ для $\eta \in^n \omega$ и натурального числа i последовательностью $\eta^\wedge\langle i\rangle$ отмечается некоторая вершина $g_{\eta^\wedge\langle i\rangle}$, то на предыдущем шаге n последовательностью η также была отмечена некоторая вершина g_η и в графе Γ g_η и $g_{\eta^\wedge\langle i\rangle}$ связаны ребром.

3. Пусть последовательностью $\eta = \langle i_0, \ldots, i_{n-1}\rangle \in^n \omega$ на шаге n отмечается подграф Γ_η и для натурального числа $k < n$ $\eta \restriction k\langle i_0, \ldots, i_{n-1}\rangle$. Тогда Γ_η является связной компонентой в подграфе $\Gamma\backslash \{g_{\eta\restriction 0}, \ldots, g_{\eta\restriction k-1}\}$.

Индуктивное определение.

Шаг 0. $\Gamma_{\langle\,\rangle} = \Gamma$, $g_{\langle\,\rangle}$ - произвольная вершина из Γ .

Шаг $n+1$. Пусть на n-м шаге последовательностью η были отмечены подграф Γ_η и вершина g_η. Покажем какие подграфы и вершины в Γ отмечаются последовательностями вида $\eta^\wedge\langle i\rangle$ на шаге $n+1$.

Если подграф Γ_η состоит из одной вершины и $\Gamma_\eta\backslash\{g_\eta\}$, пусто, то последовательностями вида $\eta^\wedge\langle i\rangle$ на $n+1$ шаге ничего не отмечается.

В противном случае по лемме в $\Gamma_\eta\backslash\{g_\eta\}$ можно выделить конечное число компонент $\Gamma_{\eta^\wedge\langle 0\rangle}, \ldots, \Gamma_{\eta^\wedge\langle k-1\rangle}$ таких, что выполняется соотношение

$$\Gamma_\eta(a_{\eta\restriction 0}, \ldots, a_\eta) \underset{m}{\approx} \Gamma_{\eta^\wedge\langle 0\rangle}(g_{\eta\restriction 0}, \ldots, g_\eta) \cup \ldots \cup \Gamma_\eta(g_{\eta\restriction 0}, \ldots, g_\eta).$$

В каждой из этих компонент $\Gamma_{\eta^\wedge\langle i\rangle}$ найдется хотя бы одна вершина $g_{\eta^\wedge\langle i\rangle}$, смежная с g_η. Этим способ размечивания на шаге $n+1$ указан полностью. Определение закончено.

Свойства 1–3 замечаются непосредственно. Пусть Γ' - подграф в Γ, состоящий из отмеченных вершин. Доказательство предложения будет следовать из следующих двух свойств.

4. Подграф Γ' конечен.

Это свойство проверяется с помощью такого довольно известного рассуждения. На Γ' введем отношение порядка $<$, считая, что для натуральных чисел k и n, $k < n$, последовательностей $\eta = \langle i_0, \ldots, i_{k-1} \rangle$ и $\tau = \langle i_0, \ldots, i_{k-1}, \ldots i_{n-1} \rangle$ и вершин g_η и g_τ выполняется неравенство $g_\eta < g_\tau$. Основное множество графа Γ' с так определенными частичным порядком оказывается конечно ветвящимся деревом, а любая максимальная возрастающая цепь в нем оказывается цепью в исходном графе Γ. Покажем, что длины всех таких цепей в графе Γ' ограничены некоторым натуральным числом.

Пусть, наоборот, в графе $\langle \Gamma'; < \rangle$ имеются сколь угодно длинные возрастающие цепи. Индукцией по n определим последовательность натуральных чисел $\langle i_0, \ldots, i_n, \ldots \rangle$, выбирая число i_n таким, что в $\langle \Gamma'; < \rangle$ имеются возрастающие цепи сколь угодно большой длины, содержащие вершину $g_{\langle i_0, \ldots, i_n \rangle}$. Для каждого n выбор соответствующего члена в этой последовательности оказывается возможным благодаря тому, что дерево $\langle \Gamma'; < \rangle$ является конечно ветвящимся. Но тогда последовательность $\langle g_{\langle\ \rangle}, \ldots, g_{\langle i_0, \ldots, i_n \rangle}, \ldots \rangle$ оказывается бесконечной цепью в графе Γ. Противоречие.

Используя тот факт, что $\langle \Gamma'; < \rangle$ конечно ветвящееся дерево, индукцией по n можно показать конечность множеств $\{g_\eta \in \Gamma' : \eta \in^n \omega\}$. Теперь, конечность Γ' следует из того, что длины всех возрастающих цепей в $\langle \Gamma'; < \rangle$ ограничены некоторым натуральным числом. Свойство доказано.

Пусть последовательностью η из ${}^n\omega$ в графе Γ отмечен подграф Γ_η и $\Gamma'_\eta = \Gamma' \cap \Gamma_\eta$. По третьему свойству Γ_η является связной компонентой в подграфе $\Gamma \setminus \{g_{\eta\restriction 0}, \ldots, g_{\eta\restriction n-1}\}$. Индукцией по наибольшей из длин максимальных цепей в дереве $\langle \Gamma'_\eta; < \rangle$ из первой леммы вытекает соотношение $\Gamma_\eta\,(g_{\eta\restriction 0}, \ldots, g_{\eta\restriction n-1}) \underset{m}{\approx} \Gamma_\eta\,(g_{\eta\restriction 0}, \ldots, g_{\eta\restriction n-1})$. В случае $\eta = \langle\ \rangle$ получается заключительное свойство.

5. $\Gamma \underset{m}{\approx} \Gamma'$.

Предложение доказано. □

Теперь мы хотим результаты о графах, полученные во втором, третьем и четвертом предложениях перенести на случай моделей произвольной конечной сигнатуры σ. Для этого оказывается достаточным соответствующим образом модернизировать лемму, использованную при доказательстве всех этих утверждении.

Непустую подмодель $\mathfrak{N}'$ модели $\mathfrak{N}$ называем связной σ - компонентой, если в $\mathfrak{N}$ она является минимальной непустой подмоделью со свойством:

$$\mathfrak{N} \models P(a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}),\ a \in A' \ \text{влечет}\ a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1} \in A'.$$

Для моделей конечной предикатной сигнатуры σ аналоги второго, третьего и четвертого предложений сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 2. *1). Элементарная теория класса моделей с конечными цепями совпадает с элементарной теорией классе всех конечных моделей.*

2). Для элементарной теории класса моделей конечной фиксированной длины существует примитивно рекурсивная процедура разрешения.

3). Элементарная теория любой ω - категоричной модели конечной длины разрешима.

Список литературы

[1] Г.Крейслер, Ч.Ч.Чен, *Теория моделей*, М., 1977, 614 с.

[2] Нуртазин А.Т., *Базисные совокупности и элиминация кванторов*, (в печати).
[3] Оре 0., *Теория графов*, М. Наука, 1980, 336 с.
[4] Тайманов А.Д., *Характеристики аксиоматизируемых классов моделей*, Алгебра и логика, **I**:4 (1962), 5–32.
[5] Behman H., *Beitrage zum Algebra der Logic, insbesondere zum Entseheidungsproblem*, Math. Ann, 86(1922), 163–220.
[6] Ehrenfeucht A., *An application of games to the completeness problem for formalized theories*, Fund. Math., 49, 129–141.
[7] Fraisse R., *Sur quelques classificacions des systemes de velations*, Publ. Sci. Univ. Alger, Ser. A, 1954, I, 35–182.
[8] Gaifman H., *On local and nonlocal properties*, Proceedings of the Herbrand Symposium, Log. Colloquium' 81, North-Holland Publ. Company, 1982, 105–135.
[9] Herre H., Mecler A.H., Smith K.W., *Superstable graphs*, Fund. Math., **118**:2 (1983), 75–79.
[10] Podewsky K. and Ziegler M., *Stable graphs*, Fund. Math., 100 (1978), 101–107.
[11] Ramsey F.P., *On a problem in formal logic*, Proc. Math. Soc., Ser. 2, 30, 264–286.
[12] Ryll-Nardzewski, *On the categoricity in power* N_0, Bull. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys., 7, 545–548.

Нуртазин Абыз Темиргалиевич
Механико-математический факультет КазНУ им.Аль-Фараби,
ул.Масанчи 39/47,
Алматы, Республика Казахстан
E-mail address: abyznurtazin@mail.ru