

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

Том 4, стр. 20–51 (2007)

УДК 517.95

MSC 35R30

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ  
АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В  
ИЗОТРОПНОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

А.Л. КАРЧЕВСКИЙ

**ABSTRACT.** In the work the algorithm for numerical solving of the inverse problem for reconstruction of the elastic constants of an anisotropic (thinly stratified) layer is presented. In force of the basic restriction the algorithm allow us to reconstruct only part of the elastic constants. Conditions of symmetry for the trace of the direct problem solution on the surface was used together with usual form of the additional information (value of the direct problem solution on the surface). The numerical solution of the inverse problem was suggested to find in the frequency domain. The general statement of the inverse problem was decomposed to the series of the standard statements of inverse problems to reconstruct sequentially the part of the elastic constants.

## ВВЕДЕНИЕ

Как правило, использование математического моделирования в практической сейсморазведке ограничено. При этом в широко распространенных обрабатывающих и интерпретационных комплексах программ оно ограничивается акустическими моделями. Это связано с тем, что до настоящего времени основной целью стандартной обработки является получение временных разрезов, которые в некотором приближении могут соответствовать реакции акустической модели среды на нормальное падение плоской продольной волны. На данном представлении основаны

---

KARCHEVSKY, A.L., ALGORITHM FOR RECONSTRUCTION OF THE ELASTIC CONSTANTS OF AN ANISOTROPIC LAYER LYING IN AN ISOTROPIC HORIZONTALLY STRATIFIED MEDIUM.

© 2007 Карчевский А.Л.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00171, 05-01-00559) и интеграционным грантом СО РАН № 26.

Поступила 29 августа 2006 г., опубликована 8 февраля 2007 г.

многие интерпретационные подходы, например, псевдоакустический каротаж. Однако, при реализации этого подхода происходит значительная потеря информации о среде, содержащаяся в исходных сейсмограммах. Желание не терять данную информацию, а использовать ее при интерпретации, приводит к необходимости использования способов обработки сейсмических данных, в которых параметры среды определяются по полному волновому полю. В этом случае акустическое приближение становится не адекватным и должно быть заменено моделью упругой среды с возможным учетом анизотропии и поглощения в зависимости о ситуации. Естественно, возникает целесообразность использования не только вертикальной, но и горизонтальных компонент вектора смещений, в частности вовлечения в обработку волн  $PS$ .

Теория методов интерпретации, основывающихся на уравнениях теории упругости, развивается давно, но широкого применения в повседневной практике сейсморазведки пока не находит по причине резкого увеличения вычислительной сложности имеющихся алгоритмов. Дело в том, что практически единственным возможным методом численного решения обратной задачи оказывается оптимизационный метод. Оптимизационный метод при решении обратной задачи — это прежде всего многократное решение прямой задачи, то есть на скорость решения обратной задачи существенное влияние оказывает то обстоятельство, каким методом решается прямая задача, сколько для вычислений требуется времени. Численные методы, дающие решение для прямой задачи в необходимой для сейсморазведки пространственно-временной области, требуют значительного времени для вычислений, или условия их применимости могут быть не выполнены, что существенно ограничивают возможность применения на практике данных методов для решения обратной задачи. Таким образом, без эффективных способов решения прямой и обратной задачи для упругих моделей сред при современном объеме реальных сейсмических данных не представляется возможным переход к качественно новым методам их интерпретации.

Решение прямой задачи для целей моделирования и для создания алгоритмов решения обратной задачи — это разные проблемы, и они могут быть решены различными способами. В первом случае результат должен быть представлен в виде сейсмограмм, то есть в пространстве  $(x, t)$ , тогда, как во втором случае, представление решения диктуется только соображениями экономии времени вычислений.

В условиях горизонтальной слоистости и однородности среды в слоях решение системы дифференциальных уравнений (СДУ) теории упругости (ТУ) может быть представлено в форме интегральных разложений по временной и пространственным переменным. То есть возможен переход к решению СДУ ТУ в частотной области и построение в той же области алгоритмов решения обратной динамической задачи сейсмики.

В пользу такого подхода говорят следующие обстоятельства. Во-первых, существует метод решения прямой задачи для СДУ ТУ в частотной области для частного вида горизонтально-слоистых однородных сред (см., например, [1–6]). Численный алгоритм на основе данного метода дает решение прямой задачи за малое время. Во-вторых, для построения функционала невязки могут быть использованы функции, значения которых известны только для ограниченного набора параметров интегральных преобразований, что приведет

к существенному сокращению времени вычисления функционала невязки и числа решений прямой задачи.

При решении обратной задачи в частотной области встают две основные проблемы.

Первая проблема — переход к образам интегральных преобразований от реальных сейсмограмм.

Суть этой проблемы заключается в следующем. На практике области и время наблюдений являются ограниченными. При теоретическом же исследовании области и время наблюдений при интегральных преобразованиях решения СДУ ТУ, зависящего от пространственно-временных переменных, считаются бесконечными. Следовательно, при вычислениях на практике образ интегральных преобразований, полученный от реальных сейсмограмм, будет отличаться от теоретического. Для решения данной проблемы требуется, во-первых, алгоритм, осуществляющий переход от сейсмограмм к их образам, включающий в себя процедуры поправок, учитывающие ограниченность области и времени наблюдений, а во-вторых, проведение исследования, какая часть информации о среде может быть надежно восстановлена, если дополнительная информация о решении прямой задачи в частотной области известна с некоторой ошибкой. На второй вопрос может быть получен частичный ответ при теоретическом и численном исследовании разрешающих свойств обратной динамической задачи сейсмики в частотной области.

Вторая проблема — создание метода решения прямой задачи для СДУ ТУ в частотной области для горизонтально-слоистой анизотропной среды, способного дать решение за короткое время, создание устойчивого вычислительного алгоритма для получения решения данной задачи.

К решению второй проблемы надо также отнести необходимость проведения теоретических и численных исследований поведения функционала невязки и математических свойств обратной динамической задачи сейсмики в частотной области.

Решения выше перечисленных задач должны быть ориентированы на использование адекватной модели типичного, используемого в реальном эксперименте (в частности, взрывного) источника сейсмических волн и должны быть учтены основные ограничения, возникающие на практике.

Необходимо отметить, что порядок решения этих двух достаточно сложных проблем по мнению автора должен быть следующим. Сначала решаются математические задачи, являющиеся составными частями второй проблемы. Их решение поможет оценить тот прирост информации о среде, который может быть получен, если для решения обратной динамической задачи сейсмики будет выбран предлагаемый путь. После их решения могут быть сформулированы основные математические требования, которые должны быть удовлетворены при решении первой проблемы, и даны рекомендации, способствующие решению первой проблемы.

Что же уже сделано в рамках решения второй проблемы?

В работах [7, 8] создан метод решения СДУ ТУ для горизонтально-слоистых однородных сред любого вида анизотропии. Решение представлено в форме интегральных разложений по временной и пространственным переменным. В частотной области решение СДУ устойчиво вычисляется по явным аналитическим выражениям в произвольной точке среды. Алгоритм не имеет

ограничений на толщину слоёв: модель среды может содержать как очень толстые, так и очень тонкие слои. В основе метода лежит сведение СДУ второго порядка к дифференциальному матричному уравнению Риккати, для решения которого также получено решение в явной аналитической форме для каждого слоя среды.

В работах [9, 10] исследованы свойства функционала невязки в частотной области. Показано, что функционал невязки может иметь локальные минимумы и максимумы. Установлен характер поведения функционала невязки в зависимости от своих параметров, что позволило предложить стратегию минимизации функционала невязки, позволяющая найти его глобальный минимум.

В работах [11, 12] предложен метод получения аналитических выражений для компонент градиента функционала невязки. Это позволяет использовать градиентные методы для минимизации функционала, которые имеют более высокую скорость сходимости, чем методы, использующие только значения функционала.

В работах [9, 10, 13, 14] проведено исследование математических свойств обратной динамической задачи сейсмики в частотной области для горизонтально-слоистых изотропных и анизотропных сред. Показано, что имеет место свойство расщепления обратной задачи, т.е. установлена возможность сведения решения обратной задачи по определению нескольких неизвестных упругих постоянных среды к серии последовательно решаемых обратных задач по определению только части из неизвестных постоянных. Установлена разрешающая способность обратной динамической задачи. Показана возможность построения алгоритма решения обратной задачи по восстановлению упругих постоянных среды, начиная с наиболее значимых и заканчивая наименее значимыми по влиянию на поведение функционала невязки. Показано, что доступная для практического использования частотная область разбита на две части: значения пространственных и временных частот, попадающие в первую, запрещены для использования при построении функционала невязки, попадающие во вторую, разрешены.

Модельные примеры восстановления упругих параметров горизонтально-слоистой среды с применением предложенных результатов могут быть найдены в работах [9, 10, 13–17].

В данной работе приводится алгоритм решения обратной динамической задачи сейсмики в частотной области для горизонтально-слоистой среды по определению упругих постоянных анизотропного слоя (тонкослоистой пачки), расположенного в изотропной горизонтально-слоистой среде. В качестве дополнительной информации о решении прямой задачи используется не только значения следа решения прямой задачи на поверхности, но и информация об удовлетворении следа условиям симметричности.

Данная работа имеет систематический характер и может помочь геофизику понять, какие параметры анизотропной среды могут быть определены, если обратная динамическая задача сейсмики будет решаться в частотной области.

## 1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим среду —  $n$ -слойную структуру с границами раздела  $x_3^k$ ,  $k = 0, N_l$ ,  $x_3^0 = 0$ ;  $m$ -ый слой находится в интервале  $[x_3^{m-1}, x_3^m]$ , последний

$N_l + 1$  (подстилающий) слой есть  $[x_3^n, \infty)$ . Физические свойства каждого слоя характеризуются величинами модулей упругости  $C_{mjk}$  и плотностью  $\rho$ , то есть  $C_{mjk}$  и  $\rho$  — кусочно-постоянные функции переменной  $x_3$ ,  $0 < x_3 < \infty$ .

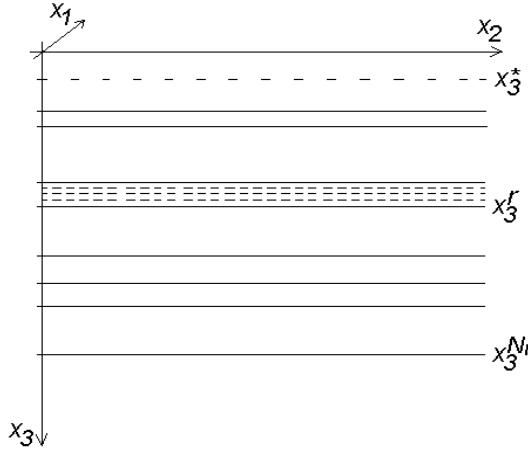


Рис. 1. Горизонтально-слоистая среда

Будем считать, что  $r$ -ый слой является анизотропным, а все слои выше и ниже этого слоя являются изотропными.

Ниже следующие результаты будут в силе, если считать, что анизотропный слой является тонкослоистой пачкой, в которой анизотропия тонких слоев была сформирована под действием каких-то единых геофизических причин (например, слои в пачке могут быть трансверсально-изотропными, значения упругих параметров в каждом тонком слое могут различаться, но ориентация оси симметрии является общей для всей пачки). Тем не менее, везде ниже для простоты будем говорить об определении упругих параметров одного анизотропного слоя.

Источник вида

$$(1) \quad \mathbf{F}(t) \nabla \delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*)$$

в начальный момент времени  $t = 0$  возбуждает в среде упругие колебания. Источник находится в одном из изотропных слоев, то есть  $x_3^* \in (x_3^{k-1}, x_3^k)$  и  $k < r$ .

Смещения в продольных и поперечных волнах под действием источника (1) могут быть определены из СДУ теории упругости следующего вида:

$$(2) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_m}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{mjk} (x_3) \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial x_k} \right) + \mathbf{F}(t) \frac{\partial}{\partial x_m} \delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*),$$

$$m = \overline{1, 3}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В начальный момент времени имеют место следующие условия:

$$(3) \quad \mathbf{u}_m|_{t<0} = 0, \quad m = \overline{1, 3}.$$

Отсутствие нормальных напряжений на поверхности  $x_3 = 0$  обеспечивают краевые условия

$$(4) \quad \sum_{k,l=1}^3 C_{3jkl}(x_3) \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial x_k} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Считаем, что при переходе через точки разрыва среды поля смещений и напряжений остаются непрерывными, т.е. в любой точке  $(x_1, x_2, x_3^k)$  имеют место условия склейки

$$(5) \quad \left[ \sum_{k,l=1}^3 C_{3jkl}(x_3) \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial x_k} \right]_{x_3^k} = 0, \quad [\mathbf{u}_j]_{x_3^k} = 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Поскольку  $C_{mjk}(x_3)$  зависят только от  $x_3$ , то возможно провести преобразование прямой задачи (2)-(5). После преобразования Лапласа по переменной  $t$ , после преобразования Фурье по переменным  $x_1$  и  $x_2$ , приходим к следующей постановке:

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left( A \frac{\partial}{\partial x_3} U + i \hat{B} U \right) + i \check{B} \frac{\partial}{\partial x_3} U - D U = \check{F}(p, x_3, x_3^*),$$

$$(7) \quad \left( A \frac{\partial}{\partial x_3} U + i \hat{B} U \right) \Big|_{x_3=0} = 0,$$

$$(8) \quad \left[ A \frac{\partial}{\partial x_3} U + i \hat{B} U \right]_{x_3^k} = 0, \quad [U]_{x_3=x_3^k} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

К данной постановке необходимо добавить условие затухания

$$(9) \quad U \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow \infty).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad l_1 = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \rho \begin{bmatrix} c_{55} & c_{45} & c_{35} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= \rho \nu_1 \begin{bmatrix} c_{15} & c_{56} & c_{55} \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} \end{bmatrix} + \rho \nu_2 \begin{bmatrix} c_{56} & c_{25} & c_{45} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} \end{bmatrix}, \\ \check{B} &= \rho \nu_1 \begin{bmatrix} c_{15} & c_{14} & c_{13} \\ c_{56} & c_{46} & c_{36} \\ c_{55} & c_{45} & c_{35} \end{bmatrix} + \rho \nu_2 \begin{bmatrix} c_{56} & c_{46} & c_{36} \\ c_{25} & c_{24} & c_{23} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \end{bmatrix}, \\ D &= \rho p^2 E + \rho \nu_1^2 \begin{bmatrix} c_{11} & c_{16} & c_{15} \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} \end{bmatrix} + \rho \nu_2^2 \begin{bmatrix} c_{66} & c_{26} & c_{46} \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \end{bmatrix} \\ &+ \rho \nu_1 \nu_2 \begin{bmatrix} 2c_{16} & c_{12} + c_{66} & c_{14} + c_{56} \\ c_{12} + c_{66} & 2c_{26} & c_{25} + c_{46} \\ c_{14} + c_{56} & c_{25} + c_{46} & 2c_{45} \end{bmatrix}, \\ \check{F}(p, x_3, x_3^*) &= -F(p)(il_1 \delta(x_3 - x_3^*) + l_2 \delta'(x_3 - x_3^*)), \end{aligned}$$

где функции  $u_m(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$  есть образ функций  $\mathbf{u}_m(x_1, x_2, x_3, t)$ , функция  $F(p)$  — образ Лапласа функции  $\mathbf{F}(t)$ ,  $p = -\alpha + i\omega$  — параметр преобразования Лапласа по временной переменной  $t$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — параметры преобразования Фурье по пространственным переменным  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Для приведенных модулей упругости использовано обозначение  $c_{qp} = C_{qp}/\rho$ , упругие постоянные  $C_{qp}$  являются элементами симметричной матрицы  $C$  шестого порядка, которая получена после известной процедуры сокращения индексации:

$$C_{m j k l} = C_{j m k l} = C_{m j l k} = C_{k l m j}, \quad C_{q p} = C_{m j k l}, \quad q = (m j), \quad p = (k l),$$

$$(11) \rightarrow 1, \quad (22) \rightarrow 2, \quad (33) \rightarrow 3, \quad (23) = (32) \rightarrow 4,$$

$$(13) = (31) \rightarrow 5, \quad (12) = (21) \rightarrow 6.$$

Нетрудно видеть, что матрицы  $A$ ,  $D$  — симметричные,  $\hat{B}' = \check{B}$  (штрих обозначает операцию транспонирования).

## 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть решение системы дифференциальных уравнений (2) обладает следующими свойствами:

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1(-x_1, x_2, x_3, t) = -\mathbf{u}_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ \mathbf{u}_2(-x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{u}_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ \mathbf{u}_1(-x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{u}_1(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases},$$

$$(11) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1(x_1, -x_2, x_3, t) = \mathbf{u}_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ \mathbf{u}_2(x_1, -x_2, x_3, t) = -\mathbf{u}_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ \mathbf{u}_3(x_1, -x_2, x_3, t) = \mathbf{u}_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}.$$

Заменим в системе (2) переменные  $x_1$  и  $x_2$  на  $-x_1$  и  $-x_2$  соответственно. Потребуем, чтобы после замены переменных система не изменилась. В этом случае, как нетрудно убедится, матрица модулей упругости для анизотропного слоя должна иметь следующий вид:

$$(12) \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{or} & c_{12}^{or} & c_{13}^{or} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{or} & c_{22}^{or} & c_{23}^{or} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{or} & c_{23}^{or} & c_{33}^{or} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{or} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^{or} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{or} \end{bmatrix}$$

т.е. среда анизотропного слоя должна быть орторомбической, для которой главные нормали упругой симметрии совпадают с осями системы координат (индекс  $^{or}$  говорит о том, что упругая постоянная отвечает орторомбической среде).

С другой стороны, пусть анизотропный слой имеет упругие постоянные, заданные матрицей (12), и пусть след решения прямой задачи (2)-(5)

$\mathbf{u}_{0,j}(x_1, x_2, t) = \mathbf{u}_j(x_1, x_2, 0, t)$  удовлетворяет следующим равенствам:

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_{0,1}(-x_1, x_2, t) = -\mathbf{u}_{0,1}(x_1, x_2, t) \\ \mathbf{u}_{0,2}(-x_1, x_2, t) = \mathbf{u}_{0,2}(x_1, x_2, t) \\ \mathbf{u}_{0,3}(-x_1, x_2, t) = \mathbf{u}_{0,3}(x_1, x_2, t) \end{cases},$$

$$(14) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_{0,1}(x_1, -x_2, t) = \mathbf{u}_{0,1}(x_1, x_2, t) \\ \mathbf{u}_{0,2}(x_1, -x_2, t) = -\mathbf{u}_{0,2}(x_1, x_2, t) \\ \mathbf{u}_{0,3}(x_1, -x_2, t) = \mathbf{u}_{0,3}(x_1, x_2, t) \end{cases},$$

тогда нетрудно видеть (постановка прямой задачи не изменится после замены переменных  $x_1$  и  $x_2$  на  $-x_1$  и  $-x_2$  соответственно), что решение прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет равенствам (10)-(11).

Пусть решение системы дифференциальных уравнений (2) удовлетворяет только равенствам (10). Нетрудно видеть, что в этом случае матрица упругих постоянных для анизотропного слоя должна иметь следующий вид:

$$(15) \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

Рассуждая как выше, предполагая, что анизотропный слой имеет упругие постоянные, заданные матрицей (15), и что след решения прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет равенствам (13), тогда нетрудно видеть, что решение прямой задачи удовлетворяет равенствам (10).

### 3. ПОСТАНОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Пусть для некоторой системы координат  $Ox_1x_2x_3$  о решении прямой задачи (2)-(5) известна следующая дополнительная информация:

$$(16) \quad \mathbf{u}_j(x_1, x_2, x_3, t)|_{x_3=0} = \mathbf{u}_{0,j}(x_1, x_2, t), \quad j = \overline{1, 3}.$$

Анализ значений  $\mathbf{u}_{0,j}(x_1, x_2, t)$  может выявить, что на плоскости  $Ox_1x_2$  нашлась пара взаимно перпендикулярных прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , для которой след решения прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет соотношениям типа (13)-(14). Не ограничивая общности, можем считать, что прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  совпадают с осями  $Ox_1$  и  $Ox_2$  соответственно.

Подобный анализ может выявить, что на плоскости  $Ox_1x_2$  нашлась одна прямая  $\ell$ , для которой след решения прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет соотношениям типа (13). Не ограничивая общности, можем считать, что прямая  $\ell$  совпадает с осью  $Ox_1$ .

Соотношения (13)-(14) для следа решения прямой задачи (2)-(5) могут быть использованы как дополнительная информация наряду с дополнительной информацией (16). Они позволяют рассматривать модели сред для анизотропного слоя, которые обладают более простой матрицей упругих элементов.

Ограничим наше исследование рассмотрением моноклинной, орторомбической, кубической и трансверсально-изотропной моделями сред, поскольку они являются основными при математическом моделировании в геофизике. Вообще говоря, существование соотношений (13)-(14) не гарантирует того, что модель среды будет именно этих четырех типов. Тем не менее, как правило, геофизик работает в рамках определенных представлений о среде, которые позволяют ему ограничить количество возможных моделей сред.

Предположим, что упругие постоянные  $c_{mk}$  изотропных слоев и плотность  $\rho$  для всех  $x_3 > 0$  известны. Для изотропной среды

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_{11} - 2c_{44} = \lambda, \\ \text{остальные } c_{qp} = 0.$$

После интегральных преобразований получим дополнительную информацию (16) в следующем виде

$$(17) \quad U(\nu_1, \nu_2, x_3, p)|_{x_3=0} = U_0(\nu_1, \nu_2, p), \quad (p = -\alpha + i\omega)$$

где

$$\alpha \in \Omega_\alpha = \{\alpha \mid \alpha^1, \dots, \alpha^{N_\alpha}\}, \quad \omega \in \Omega_\omega = \{\omega \mid \omega^1, \dots, \omega^{N_\omega}\},$$

$$\nu_1 \in \Omega_{\nu_1} = \{\nu_1 \mid \nu_1^1, \dots, \nu_1^{N_{\nu_1}}\}, \quad \nu_2 \in \Omega_{\nu_2} = \{\nu_2 \mid \nu_2^1, \dots, \nu_2^{N_{\nu_2}}\},$$

и  $N_\alpha, N_\omega, N_{\nu_1}, N_{\nu_2}$  — конечные числа.

**Обратная задача 1:** Определить неизвестные упругие постоянные  $c_{mk}$  анизотропного слоя, если след решения (2)-(5) удовлетворяет условиям (13)-(14) и о решении прямой задачи (6)-(9) известна дополнительная информация (17).

**Обратная задача 2:** Определить неизвестные упругие постоянные  $c_{mk}$  анизотропного слоя, если след решения (2)-(5) удовлетворяет условиям (13) и о решении прямой задачи (6)-(9) известна дополнительная информация (17).

В постановке обратных задач 1 или 2 предполагаем, что пара взаимно перпендикулярных линий или прямая линия, для которых имеют место соотношения типа соотношений (13)-(14), являются единственными.

Обратные задачи 1 и 2 могут быть численно решены при помощи минимизации функционала невязки

$$(18) \quad \Phi = \sum_{\omega \in \Omega_\omega} \sum_{\nu_1 \in \Omega_{\nu_1}} \sum_{\nu_2 \in \Omega_{\nu_2}} h_\omega h_{\nu_1} h_{\nu_2} \sum_{j=1}^3 |u_j(0, \nu_1, \nu_2, p) - u_{j,0}(\nu_1, \nu_2, p)|^2,$$

где постоянные  $h_{\nu_1}, h_{\nu_2}, h_\omega$  являются нормирующими

$$h_\omega^k = \begin{cases} \omega^k - \omega^{k-1}, & N_\omega > 1 \\ 1, & N_\omega = 1 \end{cases}, \quad h_{\nu_l}^n = \begin{cases} \nu_l^n - \nu_l^{n-1}, & N_{\nu_l} > 1 \\ 1, & N_{\nu_l} = 1 \end{cases} \quad l = 1, 2,$$

здесь  $k$  и  $n$  — индексы суммирования в (18), опущенные ради простоты.

В работах [13, 14] установлена разрешающая способность обратной задачи сейсмики в частотной области. Показано, что наибольший вклад в изменения функционала невязки вносят изменения упругих параметров среды, являющихся элементами матрицы  $A$ . Меньший вклад вносят изменения

упругих параметров среды, являющихся элементами матрицы  $\hat{B}$ . Наконец, вклад упругих параметров среды, являющихся элементами матрицы  $D$ , может быть совсем незаметен на фоне ошибок, присутствующих в данных обратной задачи.

Ниже будем считать, что ошибки измерений и вычислений в дополнительной информации (17) велики настолько, что позволяют определять при решении обратной задачи только элементы матриц  $A$  и  $\hat{B}$ , и не позволяют определять элементы матрицы  $D$ . Назовем это *основным ограничением*.

#### 4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

Итак, считаем, что анализ следа решения прямой задачи (2)-(5) показал, что существует единственная пара взаимно перпендикулярных прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , для которой след решения прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет соотношениям типа (13)-(14). Выбираем систему координат  $Ox_1x_2x_3$  так, чтобы прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  совпадали с осями  $Ox_1$  и  $Ox_2$  соответственно. Тогда след решения прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет соотношениям (13)-(14) и для нашей модели среды решение прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет соотношениям (10)-(11). Матрица упругих параметров для анизотропного слоя имеет вид (12) и мы имеем девять независимых упругих постоянных  $c_{mk}^{or}$ . В этом случае матрицы  $A$ ,  $\hat{B}$  и  $D$  в постановке прямой задачи (6)-(9) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A &= \rho \begin{bmatrix} c_{55}^{or} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^{or} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{or} \end{bmatrix}, \\
 (19) \quad \hat{B} &= \rho\nu_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{55}^{or} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{or} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho\nu_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^{or} \\ 0 & c_{23}^{or} & 0 \end{bmatrix}, \\
 D &= \rho p^2 E + \rho\nu_1^2 \begin{bmatrix} c_{11}^{or} & 0 & 0 \\ 0 & c_{66}^{or} & 0 \\ 0 & 0 & c_{55}^{or} \end{bmatrix} + \rho\nu_2^2 \begin{bmatrix} c_{66}^{or} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^{or} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^{or} \end{bmatrix} \\
 &+ \rho\nu_1\nu_2 \begin{bmatrix} 0 & c_{12}^{or} + c_{66}^{or} & 0 \\ c_{12}^{or} + c_{66}^{or} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Согласно *основному ограничению* при решении обратной задачи будем мы можем определить только элементы матриц  $A$  и  $\hat{B}$ :  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{23}^{or}$ ,  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$  и  $c_{55}^{or}$ .

Если рассматривать различные виды анизотропии с точки зрения упругих свойств среды, то, естественно, например, что трансверсально-изотропная среда не является частным видом орторомбической. Если же рассматривать различные виды анизотропии с точки зрения вида матрицы упругих постоянных среды, то можно сказать, например, что трансверсально-изотропная среда является частным видом орторомбической, для которой некоторые упругие постоянные  $c_{mk}^{or}$  связаны соответствующими соотношениями, что уменьшает число независимых упругих постоянных с девяти до пяти.

Рассмотрим ориентации элемента трансверсально-изотропной среды, для которых матрица приведенных модулей упругости будет иметь вид (12). Имеем три случая:

- ось симметрии бесконечного порядка совпадает с осью  $Ox_3$

$$(20) \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{ti} & c_{12}^{ti} & c_{13}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{ti} & c_{11}^{ti} & c_{13}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{ti} & c_{13}^{ti} & c_{11}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{ti} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{ti} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{ti} \end{bmatrix}, \quad c_{66}^{ti} = \frac{1}{2}(c_{11}^{ti} - c_{12}^{ti});$$

- ось симметрии бесконечного порядка горизонтальна и совпадает с осью  $Ox_1$

$$(21) \quad \begin{bmatrix} c_{33}^{ti} & c_{13}^{ti} & c_{13}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{ti} & c_{11}^{ti} & c_{12}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{ti} & c_{12}^{ti} & c_{11}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^{ti} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{ti} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{ti} \end{bmatrix},$$

- ось симметрии бесконечного порядка горизонтальна и совпадает с осью  $Ox_2$

$$(22) \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{ti} & c_{13}^{ti} & c_{12}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{ti} & c_{33}^{ti} & c_{13}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{ti} & c_{13}^{ti} & c_{11}^{ti} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{ti} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{ti} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{ti} \end{bmatrix}.$$

Имеем пять независимых постоянных  $c_{mk}^{ti}$ .

Первый вариант рассматривать не будем, поскольку в этом случае след решения прямой задачи (2)-(5)  $\mathbf{u}_{0,j}(x_1, x_2, t)$  обладает более сильным свойством: для любых двух взаимно перпендикулярных прямых в плоскости  $Ox_1x_2$  выполняются условия (13)-(14).

Рассмотрим ориентации элемента кубической среды (см. Рис. 2), для которых матрица приведенных модулей упругости будет иметь вид (12).

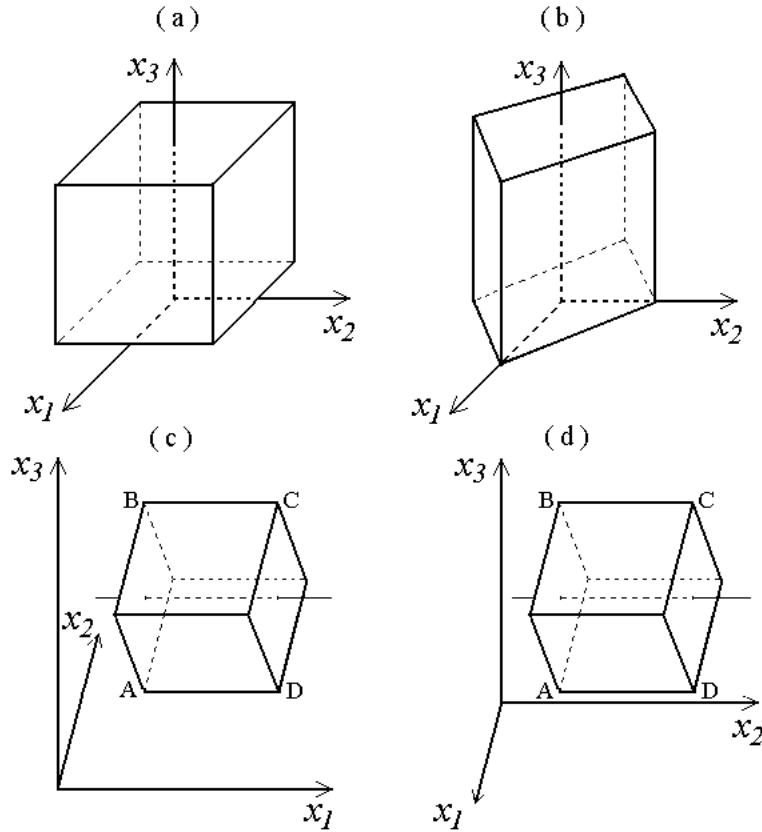


Рис. 2. Элемент кубической среды условно показан в виде куба. (а) ориентация элемента среды соответствует матрице упругих постоянных (23); (б) произведен поворот системы координат на угол  $\pi/4$  относительно оси  $Ox_3$ ; матрица упругих постоянных примет вид (24), (с) ориентация элемента кубической среды:  $ABCD \perp Ox_1x_2$ ,  $AD \parallel Ox_1$ ; (д) ориентация элемента кубической среды:  $ABCD \perp Ox_1x_2$ ,  $AD \parallel Ox_2$ .

На Рис. 2а показан элемент кубической среды, которому соответствует матрица упругих постоянных следующего вида:

$$(23) \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{cub} & c_{12}^{cub} & c_{12}^{cub} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{cub} & c_{11}^{cub} & c_{12}^{cub} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{cub} & c_{12}^{cub} & c_{11}^{cub} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} \end{bmatrix}$$

Нетрудно получить, применяя формулы пересчета упругих постоянных при смене системы координат, что при повороте системы координат на угол

$\pi/4$  вокруг оси  $0x_3$  (см. Рис. 2б) матрица упругих постоянных будет иметь следующий вид:

$$(24) \quad \begin{bmatrix} c_{33} & c_{13} & c_{12}^{cub} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{12}^{cub} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{cub} & c_{12}^{cub} & c_{11}^{cub} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} c_{33} &= c_{11}^{cub} - \frac{1}{2} [c_{11}^{cub} - (c_{12}^{cub} + 2c_{44}^{cub})], \\ c_{13} &= c_{12}^{cub} + \frac{1}{2} [c_{11}^{cub} - (c_{12}^{cub} + 2c_{44}^{cub})], \\ c_{66} &= c_{44}^{cub} + \frac{1}{2} [c_{11}^{cub} - (c_{12}^{cub} + 2c_{44}^{cub})]. \end{aligned}$$

Таким образом, существуют две пары взаимно перпендикулярных прямых (см. Рис.3), для которых след решения прямой задачи удовлетворяет соотношениям типа соотношений (13)-(14), и, следовательно, рассматривать этот случай мы не будем.

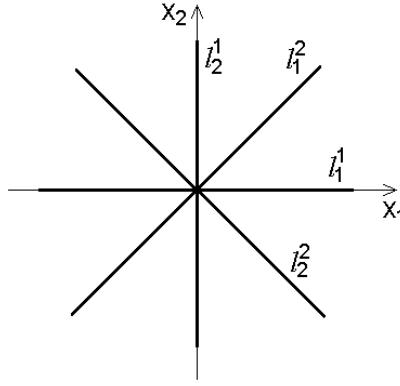


Рис. 3. Взаимно перпендикулярные линии  $\ell_k^1$  и  $\ell_k^2$  ( $k = 1, 2$ ), для которых след решения прямой задачи удовлетворяет соотношениям типа соотношений (13)-(14).

Для кубической среды возможно два положения ориентации элемента среды, которые будут удовлетворять предположению существования единственной пары взаимно перпендикулярных прямых. Первому типу ориентации (см. Рис. 2с) отвечает матрица

$$(25) \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{cub} & c_{12}^{cub} & c_{12}^{cub} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{cub} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{cub} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} \end{bmatrix}.$$

Второму типу ориентации (см. Рис. 2d) отвечает матрица

$$(26) \quad \begin{bmatrix} c_{33} & c_{12}^{cub} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{cub} & c_{11}^{cub} & c_{12}^{cub} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{12}^{cub} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{cub} \end{bmatrix}.$$

Имеем три независимых упругих постоянных  $c_{mk}^{cub}$  (здесь значения для  $c_{13}$ ,  $c_{33}$  и  $c_{66}$  даны в (24)).

Таким образом, естественно предложить следующий алгоритм решения обратной задачи 1:

- (1) предполагаем, что анизотропный слой является орторомбическим,
- (2) определяем упругие постоянные среды  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{23}^{or}$ ,  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$  и  $c_{55}^{or}$ ,
- (3) проверяем выполнение соответствующих равенств для упругих постоянных, сравнивая матрицы (21), (22), (25) и (26) с матрицей (12),
- (4) если соответствующие равенства для элементов найденной матрицы выполняются, то имеем основание предполагать, что среда анизотропного слоя является трансверсально-изотропной или кубической.

При реализации пунктов 1 и 2 полезно воспользоваться свойством расщепления обратной задачи (6)-(9), (17) (см. [13, 14]).

**4.1. Расщепление обратной задачи 1.** Положим  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , тогда из соотношений (6)-(9) следует

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \rho c_{33}^{or} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - \rho p^2 u_3 &= -F(p) \delta'(x_3 - x_3^*), \\ \left. \left( \rho c_{33}^{or} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right|_{x_3=0} &= 0, \quad u_3 \rightarrow 0 \ (x_3 \rightarrow \infty), \\ \left. \left[ \rho c_{33}^{or} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] \right|_{x_3^k} &= 0, \quad [u_3]_{x_k} = 0. \end{aligned}$$

Используя дополнительную информацию

$$(28) \quad u_3(0, 0, 0, p) = u_{3,0}(0, 0, p),$$

получаем постановку обратной задачи по восстановлению неизвестной постоянной  $c_{33}^{or}$ .

Ниже будем использовать следующее обозначение:

$$\mathbf{f}(\nu, x_3 - x_3^*) = -i\nu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(x_3 - x_3^*) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta'(x_3 - x_3^*).$$

Положим  $\nu_1 \neq 0$  и  $\nu_2 = 0$ , из соотношений (6)-(9) следует

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( A_1 \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 + i\hat{B}_1 U_1 \right) + i\check{B}_1 \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 - D_1 U_1 &= F(p) \mathbf{f}(\nu_1, x_3 - x_3^*), \\ \left. \left( A_1 \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 + i\hat{B}_1 U_1 \right) \right|_{x_3=0} &= 0, \quad U_1 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow \infty), \\ \left[ A_1 \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 + i\hat{B}_1 U_1 \right]_{x_3^k} &= 0, \quad [U_1]_{x_k} = 0. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \rho \begin{bmatrix} c_{55}^{or} & 0 \\ 0 & c_{33}^{or} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \rho \nu_1 \begin{bmatrix} 0 & c_{55}^{or} \\ c_{13}^{or} & 0 \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \rho p^2 E + \rho \nu_1^2 \begin{bmatrix} c_{11}^{or} & 0 \\ 0 & c_{55}^{or} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Используя дополнительную информацию

$$(30) \quad u_1(\nu_1, 0, 0, p) = u_{3,0}(\nu_1, 0, p), \quad u_3(\nu_1, 0, 0, p) = u_{3,0}(\nu_1, 0, p),$$

получаем постановку обратной задачи по определению функций  $c_{55}^{or}$  и  $c_{13}^{or}$ .

Положим  $\nu_1 = 0$  и  $\nu_2 \neq 0$ , из соотношений (6)-(9) следует

$$(31) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( A_2 \frac{\partial}{\partial x_3} U_2 + i\hat{B}_2 U_2 \right) + i\check{B}_2 \frac{\partial}{\partial x_3} U_2 - D_2 U_2 &= F(p) \mathbf{f}(\nu_2, x_3 - x_3^*), \\ \left. \left( A_2 \frac{\partial}{\partial x_3} U_2 + i\hat{B}_2 U_2 \right) \right|_{x_3=0} &= 0, \quad U_2 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow \infty), \\ \left[ A_2 \frac{\partial}{\partial x_3} U_2 + i\hat{B}_2 U_2 \right]_{x_3^k} &= 0, \quad [U_2]_{x_k} = 0. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_2 &= \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \rho \begin{bmatrix} c_{44}^{or} & 0 \\ 0 & c_{33}^{or} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \rho \nu_2 \begin{bmatrix} 0 & c_{44}^{or} \\ c_{23}^{or} & 0 \end{bmatrix}, \\ D_2 &= \rho p^2 E + \rho \nu_2^2 \begin{bmatrix} c_{22}^{or} & 0 \\ 0 & c_{44}^{or} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Используя дополнительную информацию

$$(32) \quad u_2(0, \nu_2, 0, p) = u_{2,0}(0, \nu_2, p), \quad u_3(0, \nu_2, 0, p) = u_{3,0}(0, \nu_2, p).$$

получаем постановку обратной задачи по определению функций  $c_{44}^{or}$  и  $c_{23}^{or}$ .

Знание характера овражности функционала невязки (18) позволяет произвести дальнейшее расщепление обратных задач (29)-(30) и (31)-(32) (см. [13, 14]).

Заметим, что в постановках прямых задач (29) и (31) участвуют коэффициенты  $c_{11}$  и  $c_{22}$ , которые являются неизвестными и не могут быть определены. В работах [13, 14] показано, что для малых значениях пространственных частот  $\nu_k$  ( $k = 1, 2$ ) изменения этих упругих постоянных в достаточно широких пределах вносят незначительный вклад в изменения величины функционала невязки, которые могут быть незаметны благодаря ошибкам вычислений и измерений, присутствующих в дополнительной информации (17). С другой стороны, данные функции присутствуют в постановках прямых задач (29) и (31) и их требуется учитывать.

В работах [18, 19] представлены выражения упругих постоянных для анизотропных сред через постоянные Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  и некоторые добавочные коэффициенты. Например, для трансверсально-изотропной среды имеем следующее представление:

$$\begin{aligned} c_{11}^{ti} &= v_p^2, & c_{12}^{ti} &= v_p^2 - 2v_s^2, & c_{13}^{ti} &= v_p^2 - 2v_s^2 - \kappa_\lambda, \\ c_{33}^{ti} &= v_p^2 - \kappa_p, & c_{44}^{ti} &= v_s^2 - \kappa_\mu, & (c_{11}^{ti} - c_{12}^{ti})/2 &= v_s^2, \\ v_p^2 &= (\lambda + 2\mu)/\rho, & v_s^2 &= \mu/\rho. \end{aligned}$$

Для реальных анизотропных сред эти добавочные коэффициенты составляют не более 10-15% от соответствующих значений  $v_p^2$  и  $v_s^2$ . Таким образом, мы можем положить в постановках (29) и (29)  $c_{33}^{or}$  вместо  $c_{11}^{or}$  и  $c_{22}^{or}$ .

**4.2. Проверка на принадлежность к частному виду анизотропии.** Предполагаем, что упругие постоянные  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$  и  $c_{23}^{or}$  анизотропного слоя определены.

Воспользуемся тем, что в частных случаях постоянные  $c_{mk}^{or}$  могут быть связаны некоторыми соотношениями.

**4.2.1. Трансверсально-изотропная среда.** Проведем следующий анализ величин приведенных модулей упругости.

Сравним матрицы (12) и (22). Если

$$(33) \quad c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or}, \quad c_{55}^{or} = \frac{1}{2}(c_{33}^{or} - c_{13}^{or})$$

тогда мы можем предположить, что среда является трансверсально-изотропной и

$$c_{11}^{ti} = c_{33}^{or}, \quad c_{13}^{ti} = c_{23}^{or}, \quad c_{12}^{ti} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{ti} = c_{44}^{or}$$

и ось симметрии трансверсально-изотропной среды совпадает с осью  $Ox_2$ .

Сравним матрицы (12) и (21). Если

$$(34) \quad c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or}, \quad c_{44}^{or} = \frac{1}{2}(c_{33}^{or} - c_{23}^{or})$$

тогда мы можем предположить, что среда является трансверсально-изотропной и

$$c_{11}^{ti} = c_{33}^{or}, \quad c_{12}^{ti} = c_{23}^{or}, \quad c_{13}^{ti} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{ti} = c_{55}^{or},$$

и ось симметрии трансверсально-изотропной среды совпадает с осью  $Ox_1$ .

В обоих случаях упругая постоянная  $c_{33}^{ti}$  не может быть определена.

**4.2.2. Кубическая среда.** Сравним матрицы (12) и (26). Если

$$(35) \quad c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or},$$

и

$$(36) \quad c_{23}^{or} - c_{13}^{or} = c_{44}^{or} - c_{55}^{or}, \quad c_{33}^{or} - c_{13}^{or} = 2c_{44}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$(37) \quad c_{11}^{cub} = 2c_{33}^{or} - (c_{23}^{or} + 2c_{44}^{or}), \quad c_{12}^{cub} = c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{44}^{or}$$

с ориентацией как на Рис. 2d.

Сравним матрицы (12) и (25). Если

$$(38) \quad c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or},$$

и

$$(39) \quad c_{23}^{or} - c_{13}^{or} = c_{44}^{or} - c_{55}^{or}, \quad c_{33}^{or} - c_{23}^{or} = 2c_{55}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$(40) \quad c_{11}^{cub} = 2c_{33}^{or} - (c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or}), \quad c_{12}^{cub} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{55}^{or}$$

с ориентацией как на Рис. 2с.

Сравнивая матрицы, для определения трех неизвестных  $c_{mk}^{cub}$  в (37) и (40) мы имеем пять линейных уравнений, которые являются совместными в случае выполнения условий (36) и (39) соответственно.

**Замечание 4.1.** Для трансверсально-изотропной и кубической среды наши предположения о строении среды обладают различной степенью обоснованности. В первом случае, нам неизвестна только одна упругая постоянная  $c_{33}^{ti}$ . Во втором же случае у нас нет информации о значениях упругих постоянных  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{12}^{or}$ ,  $c_{22}^{or}$  и  $c_{66}^{or}$  и о выполнении соответствующих равенств для них.

Для того чтобы иметь возможность утверждать, что среда является трансверсально-изотропной или кубической необходимо привлечение еще некоторой дополнительной геофизической информации о среде.

**Замечание 4.2.** Очевидно, что удовлетворение равенств в (33), (34), (35), (36), (38) и (39) должно пониматься с некоторой точностью, поскольку соответствующие  $c_{mk}^{or}$  получены численно.

## 5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2

Считаем, что анализ следа решения прямой задачи (2)-(5) показал, что существует единственная прямая  $\ell$ , для которой след решения прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет соотношениям типа (13). Выбираем систему координат  $Ox_1x_2x_3$  так, чтобы прямая  $\ell$  совпала с осью  $Ox_1$ . Тогда след решения прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет соотношениям (13) и для нашей модели среды решение прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет соотношениям (10). Матрица упругих параметров для анизотропного слоя имеет вид (15) и мы имеем тринадцать независимых упругих постоянных  $c_{mk}$ . В этом случае матрицы

$A$ ,  $\hat{B}$  и  $D$  в постановке прямой задачи (6)-(9) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A &= \rho \begin{bmatrix} c_{55} & 0 & 35 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 35 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}, \\
 \hat{B} &= \rho \nu_1 \begin{bmatrix} c_{15} & 0 & c_{55} \\ 0 & c_{46} & 0 \\ c_{13} & 0 & c_{35} \end{bmatrix} + \rho \nu_2 \begin{bmatrix} 0 & c_{25} & 0 \\ c_{46} & 0 & c_{44} \\ 0 & c_{23} & 0 \end{bmatrix}, \\
 D &= \rho p^2 E + \rho \nu_1^2 \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{15} \\ 0 & c_{66} & 0 \\ c_{15} & 0 & c_{55} \end{bmatrix} + \rho \nu_2^2 \begin{bmatrix} c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \\
 &+ \rho \nu_1 \nu_2 \begin{bmatrix} 0 & c_{12} + c_{66} & 0 \\ c_{12} + c_{66} & 0 & c_{25} + c_{46} \\ 0 & c_{25} + c_{46} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Согласно ограничению из параграфа 3 при решении обратной задачи будем мы можем определить только элементы матриц  $A$  и  $\hat{B}$ :  $c_{33}$ ,  $c_{55}$ ,  $c_{35}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{15}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{25}$  и  $c_{46}$ .

Для моноклинной среды, когда плоскость упругой симметрии совпадает с плоскостью  $Ox_1x_3$ , матрица приведенных модулей упругости будет совпадать по строению с матрицей (15):

$$(41) \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{mc} & c_{13}^{mc} & c_{12}^{mc} & 0 & -c_{16}^{mc} & 0 \\ c_{13}^{mc} & c_{33}^{mc} & c_{23}^{mc} & 0 & -c_{26}^{mc} & 0 \\ c_{12}^{mc} & c_{23}^{mc} & c_{22}^{mc} & 0 & -c_{36}^{mc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{mc} & 0 & -c_{45}^{mc} \\ -c_{16}^{mc} & -c_{26}^{mc} & -c_{36}^{mc} & 0 & c_{66}^{mc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{45}^{mc} & 0 & c_{55}^{mc} \end{bmatrix}$$

В данном параграфе ограничимся рассмотрением только моноклинной, орторомбической, кубической и трансверсально-изотропной сред.

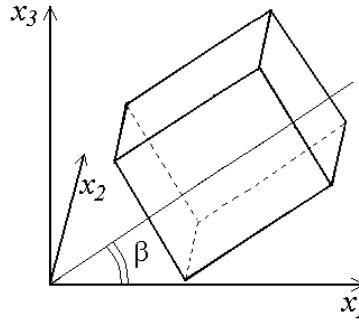


Рис. 4. Элемент орторомбической среды условно показан в виде параллелепипеда. Одна из плоскостей упругой симметрии совпадает с  $Ox_1x_3$ .

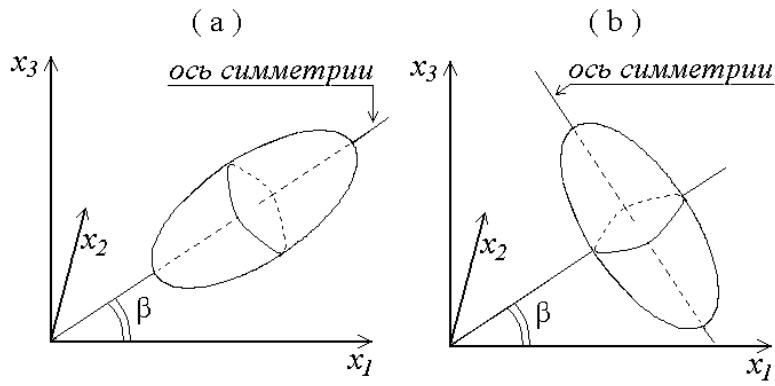


Рис. 5. Элемент трансверсально-изотропной среды условно показан в виде эллипсоида. Ось симметрии лежит в плоскости  $Ox_1x_3$  и пересекает прямую  $Ox_1$  под углом а)  $\beta$  или б)  $\beta + \frac{\pi}{2}$ .

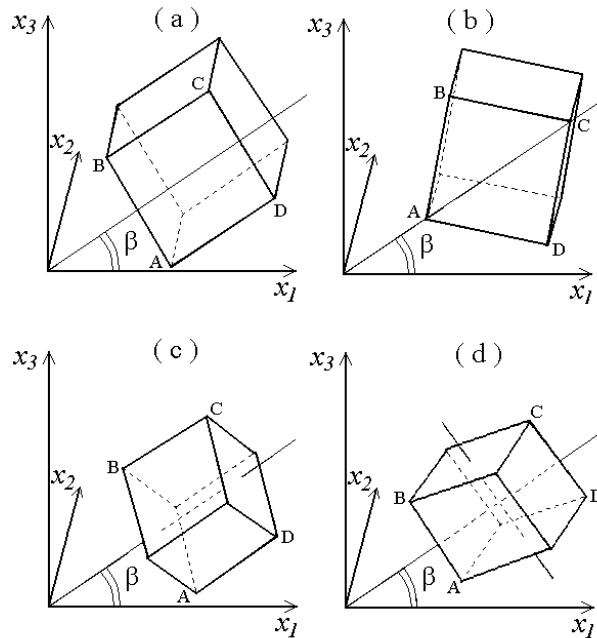


Рис. 6. Элемент кубической среды условно показан в виде куба. Ориентация элемента среды а)  $ABCD \parallel Ox_1x_3$ , угол между  $AD$  и  $Ox_1$  равен  $\beta$ ; б)  $ABCD \parallel Ox_1x_3$ , угол между  $AC$  и  $Ox_1$  равен  $\beta$ ; в)  $ABCD \perp Ox_1x_2$ , угол между  $AD$  и  $Ox_1$  равен  $\beta$ ; г)  $ABCD \perp Ox_1x_2$ , угол между  $AB$  и  $Ox_1$  равен  $\beta + \pi/2$ .

Для орторомбической среды матрица приведенных модулей упругости имеет вид (15), если одна из плоскостей упругой симметрии совпадает плоскостью  $Ox_1x_3$  (см. Рис. 4).

Для трансверсально-изотропной среды матрица приведенных модулей упругости имеет вид (15), если ось симметрии лежит в плоскости  $Ox_1x_3$  и пересекает прямую  $Ox_1$  под углом  $\beta$  или  $\beta + \pi/2$  (см. Рис. 5).

Для кубической среды также имеется четыре возможных ориентации элемента среды (см. Рис. 6).

Далее алгоритм решения обратной задачи строится по той же схеме, что и в параграфе 4: сначала проведем расщепление обратной задачи 2, затем рассмотрим частные случаи вида матрицы упругих постоянных.

**5.1. Расщепление обратной задачи 2.** Положим  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , тогда из соотношений (6)-(9) следует

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( A_0 \frac{\partial}{\partial x_3} U_0 \right) - p^2 U_0 &= F(p) \mathbf{f}(0, x_3 - x_3^*), \\ \left( A_0 \frac{\partial}{\partial x_3} U_0 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad U_0 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow \infty), \\ \left[ A_0 \frac{\partial}{\partial x_3} U_0 \right]_{x_3^k} &= 0, \quad [U_0]_{x_k} = 0. \end{aligned}$$

где

$$U_0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \rho \begin{bmatrix} c_{55} & c_{35} \\ c_{35} & c_{33} \end{bmatrix},$$

Используя дополнительную информацию

$$(43) \quad u_1(0, 0, 0, p) = u_{3,0}(0, 0, p), \quad u_3(0, 0, 0, p) = u_{3,0}(0, 0, p),$$

имеем постановку обратной задачи по нахождению неизвестных постоянных  $c_{33}$ ,  $c_{55}$  и  $c_{35}$ .

Заметим, если  $u_{3,0}(0, 0, p) = 0$ , то, очевидно,  $c_{35} = 0$ . Однако для реальных моноклинных сред  $c_{35} \neq 0$  [19].

Положим  $\nu_1 \neq 0$ ,  $\nu_2 = 0$ , из соотношений (6)-(9) следует

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( A_1 \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 + i \hat{B}_1 U_1 \right) + i \check{B}_1 \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 - D_1 U_1 &= F(p) \mathbf{f}(\nu_1, x_3 - x_3^*), \\ \left( A_1 \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 + i \hat{B}_1 U_1 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad U_1 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow \infty), \\ \left[ A_1 \frac{\partial}{\partial x_3} U_1 + i \hat{B}_1 U_1 \right]_{x_3^k} &= 0, \quad [U_1]_{x_k} = 0. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \rho \begin{bmatrix} c_{55} & c_{35} \\ c_{35} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \rho \nu_1 \begin{bmatrix} c_{15} & c_{55} \\ c_{13} & c_{35} \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \rho p^2 E + \rho \nu_1^2 \begin{bmatrix} c_{11} & c_{15} \\ c_{15} & c_{55} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Используя дополнительную информацию

$$(45) \quad u_1(\nu_1, 0, 0, p) = u_{3,0}(\nu_1, 0, p), \quad u_3(\nu_1, 0, 0, p) = u_{3,0}(\nu_1, 0, p),$$

мы получаем постановку обратной задачи по определению неизвестных постоянных  $c_{13}$  и  $c_{15}$ .

Положим  $\nu_1 = 0$  и  $\nu_2 \neq 0$ , из соотношений (6)-(9) следует

$$(46) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( A_2 \frac{\partial}{\partial x_3} U_2 + i \hat{B}_2 U_2 \right) + i \check{B}_2 \frac{\partial}{\partial x_3} U_2 - D_2 U_2 &= \tilde{F}(\nu_2, p, x_3, x_3^*), \\ \left( A_2 \frac{\partial}{\partial x_3} U_2 + i \hat{B}_2 U_2 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad U_2 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow \infty), \\ \left[ A_2 \frac{\partial}{\partial x_3} U_2 + i \hat{B}_2 U_2 \right]_{x_3^k} &= 0, \quad [U_2]_{x_k} = 0. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_2 &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \rho \begin{bmatrix} c_{55} & 0 & c_{35} \\ 0 & c_{44} & 0 \\ c_{35} & 0 & c_{33} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \rho \nu_2 \begin{bmatrix} 0 & c_{25} & 0 \\ c_{46} & 0 & c_{44} \\ 0 & c_{23} & 0 \end{bmatrix}, \\ D_2 &= \rho p^2 E + \rho \nu_2^2 \begin{bmatrix} c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Используя дополнительную информацию

$$(47) \quad \begin{aligned} u_1(0, \nu_2, 0, p) &= u_{1,0}(0, \nu_2, p), \\ u_2(0, \nu_2, 0, p) &= u_{2,0}(0, \nu_2, p), \\ u_3(0, \nu_2, 0, p) &= u_{3,0}(0, \nu_2, p). \end{aligned}$$

мы получаем постановку обратной задачи по определению постоянных  $c_{44}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{25}$  и  $c_{46}$ .

Знание характера овражности функционала невязки (18) позволяет произвести дальнейшее расщепление обратной задачи (46)-(47) (см. [13, 14]).

Как и параграфе 4.1 при решении прямой задачи (44) в матрице  $D$  можем заменить упругую постоянную  $c_{11}$  на  $c_{33}$ , при решении прямой задачи (46) упругие постоянные  $c_{22}$  и  $c_{66}$  можем заменить на постоянные  $c_{33}$  и  $c_{55}$  соответственно.

**5.2. Проверка на принадлежность к частному виду анизотропии.** Предполагаем, что девять упругих постоянных  $c_{33}$ ,  $c_{55}$ ,  $c_{35}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{15}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{25}$  и  $c_{46}$  определены.

Таким образом, для моноклинной среды мы можем определить девять упругих постоянных:

$$\begin{aligned} c_{12}^{mc} &= c_{13}, & c_{16}^{mc} &= -c_{15}, & c_{23}^{mc} &= c_{23}, \\ c_{26}^{mc} &= -c_{25}, & c_{22}^{mc} &= c_{33}, & c_{36}^{mc} &= -c_{35}, \\ c_{44}^{mc} &= c_{44}, & c_{46}^{mc} &= -c_{45}, & c_{66}^{mc} &= c_{55}. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что в частных случаях постоянные  $c_{mk}$  могут быть связаны некоторыми соотношениями.

5.2.1. *Орторомбическая среда.* Принимая во внимание формулы пересчета упругих параметров среды при переходе от одной системы координат к другой (см., например, [20]), для поиска упругих параметров орторомбической среды получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 (48) \quad c_{44} &= c_{44}^{or} \sin^2 \beta + c_{66}^{or} \cos^2 \beta, \\
 c_{46} &= \sin \beta \cos \beta [c_{44}^{or} - c_{66}^{or}], \\
 c_{23} &= c_{23}^{or} \sin^2 \beta + c_{12}^{or} \cos^2 \beta, \\
 c_{46} &= \sin \beta \cos \beta [c_{23}^{or} - c_{12}^{or}], \\
 c_{55} &= c_{55}^{or} + \sin^2 \beta \cos^2 \beta [c_{11}^{or} + c_{33}^{or} - 2(c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or})], \\
 c_{13} &= c_{13}^{or} + \sin^2 \beta \cos^2 \beta [c_{11}^{or} + c_{33}^{or} - 2(c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or})], \\
 c_{33} &= c_{33}^{or} \sin^2 \beta + c_{11}^{or} \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \beta [c_{11}^{or} + c_{33}^{or} - 2(c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or})], \\
 c_{15} + c_{35} &= \sin \beta \cos \beta [c_{33}^{or} - c_{11}^{or}], \\
 c_{15} - c_{35} &= \sin \beta \cos \beta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) [c_{11}^{or} + c_{33}^{or} - 2(c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or})],
 \end{aligned}$$

которая распадается на три независимые подсистемы.

Нелинейная система (48) имеет девять уравнений для определения девяти неизвестных: восемь упругих постоянных и угол.

Формальное решение системы (48) может существовать или не существовать.

Мы можем считать среду моноклинной в следующих случаях:

- формальное решение системы (48) не существует;
- формальное решение системы (48) существует, однако какая-либо из найденных упругих постоянных  $c_{mk}^{or}$  не имеет физического смысла (например,  $c_{mk}^{or} \leq 0$ ), или какая-либо из найденных упругих постоянных  $c_{mk}^{or}$  не принадлежит некоторому доверительному интервалу (например,  $0 \leq c_{mk}^{or} \leq c_{mk,min}^{or}$  или  $c_{mk,max}^{or} \leq c_{mk}^{or}$ ).

Если формальное решение системы (48) существует и найденные упругие параметры  $c_{mk}^{or}$  принадлежат доверительным интервалам, тогда мы можем предположить, что среда является орторомбической.

Найдем формальное решение системы (48).

Прежде всего заметим, что угол  $\beta$  достаточно искать в интервале  $(0, \pi/2)$ . При  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi/2$  орторомбическая среда будет ориентирована так, что главные направления упругости будут совпадать с осями координат, что приведет к тому, что решение системы (2) будет удовлетворять условиям (10)-(11). Данный случай нами уже рассмотрен в параграфе 4.1, поэтому везде ниже

$$\sin \beta \neq 0, \quad \cos \beta \neq 0.$$

Заметим, что исключительным событием является выполнение равенства  $c_{15} - c_{35} = 0$ , тогда

$$1) \quad \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{или/и} \quad 2) \quad c_{11}^{or} + c_{33}^{or} - 2(c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or}) = 0.$$

В первом случае нетрудно вычислить упругие параметры

$$(49) \quad \begin{aligned} c_{11}^{or} &= (c_{33} + c_{13})/2 + c_{55} + 2c_{35}, & c_{44}^{or} &= c_{44} + c_{46}, \\ c_{33}^{or} &= (c_{33} + c_{13})/2 + c_{55} - 2c_{35}, & c_{66}^{or} &= c_{44} - c_{46}, \\ c_{13}^{or} &= (c_{33} + c_{13})/2 - c_{55}, & c_{23}^{or} &= c_{23} + c_{25}, \\ c_{55}^{or} &= (c_{33} - c_{13})/2, & c_{12}^{or} &= c_{23} - c_{25}. \end{aligned}$$

Во втором случае получаем

$$(50) \quad \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{(c_{13} + 2c_{55}) - c_{33}}{2c_{35}},$$

$$(51) \quad \begin{cases} c_{11}^{or} \cos \beta = c_{33} \cos \beta - 2c_{35} \sin \beta, \\ c_{33}^{or} \sin \beta = c_{33} \sin \beta + 2c_{35} \cos \beta, \\ c_{13}^{or} = c_{13}, \\ c_{55}^{or} = c_{55}, \end{cases}$$

$$(52) \quad \begin{cases} c_{44}^{or} \sin \beta = c_{44} \sin \beta + c_{46} \cos \beta, \\ c_{66}^{or} \cos \beta = c_{44} \cos \beta - c_{46} \sin \beta, \\ c_{23}^{or} \sin \beta = c_{23} \sin \beta + c_{25} \cos \beta, \\ c_{12}^{or} \cos \beta = c_{23} \cos \beta - c_{25} \sin \beta. \end{cases}$$

Соотношение (50) позволяет найти угол  $\beta$ . Для некоторых величин  $c_{ij}$  его значение может быть близко к 0 или к  $\pi/2$ . Поскольку значения упругих постоянных  $c_{33}$ ,  $c_{55}$ ,  $c_{35}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{15}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{25}$  и  $c_{46}$  могут быть восстановлены с некоторыми ошибками, следовательно, мы можем рассчитывать, что достаточно точно можем определить или  $c_{11}^{cub}$ ,  $c_{13}^{cub}$ ,  $c_{55}^{cub}$ ,  $c_{66}^{cub}$  и  $c_{12}^{cub}$ , или  $c_{33}^{cub}$ ,  $c_{13}^{cub}$ ,  $c_{55}^{cub}$ ,  $c_{44}^{cub}$  и  $c_{23}^{cub}$  (см. соотношения (51) и (52)). Это полностью соответствует результатами параграфа 4.1.

Предположим, что  $c_{15} - c_{35} \neq 0$ . В этом случае существует две возможности получения решения нелинейной системы (48).

Первая возможность: подставим соотношение

$$\sin \beta \cos \beta [c_{11}^{or} + c_{33}^{or} - 2(c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or})] = \frac{c_{15} - c_{35}}{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta}$$

в пятое, шестое, седьмое и восьмое уравнение системы (48), после чего нетрудно получить

$$(53) \quad \begin{aligned} c_{11}^{or} \cos \beta &= c_{33} \cos \beta + \frac{1}{2}(c_{15} - c_{35}) \cos \beta \operatorname{tg} 2\beta - (c_{15} + c_{35}) \sin \beta, \\ c_{33}^{or} \sin \beta &= c_{33} \sin \beta + \frac{1}{2}(c_{15} - c_{35}) \sin \beta \operatorname{tg} 2\beta + (c_{15} + c_{35}) \cos \beta, \\ c_{13}^{or} &= c_{13} - \frac{1}{2}(c_{15} - c_{35}) \operatorname{tg} 2\beta, \\ c_{55}^{or} &= c_{55} - \frac{1}{2}(c_{15} - c_{35}) \operatorname{tg} 2\beta. \end{aligned}$$

Вторая возможность: выберем пятое, шестое, седьмое и восьмое уравнение системы (48) и запишем в виде матричного уравнения

$$KV^{or} = V,$$

где

$$V^{or} = \begin{bmatrix} c_{55}^{or} \\ c_{11}^{or} \cos \beta \\ c_{33}^{or} \sin \beta \\ c_{13}^{or} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} c_{55} \\ c_{13} \\ c_{33} \\ c_{15} + c_{35} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 - 4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta & \sin^2 \beta \cos \beta & \sin \beta \cos^2 \beta & -2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ -4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta & \sin^2 \beta \cos \beta & \sin \beta \cos^2 \beta & 1 - 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ 4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta & \cos^3 \beta & \sin^3 \beta & 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix};$$

найдем  $K^{-1}$ , после чего нетрудно получить

$$(54) \quad \begin{aligned} c_{11}^{or} \cos \beta &= \left( c_{33} \frac{2 - 3 \sin^2 2\beta}{2 \cos 4\beta} - \frac{1}{2} (c_{13} + 2c_{55}) \frac{\sin^2 2\beta}{\cos 4\beta} \right) \cos \beta \\ &\quad - (c_{15} + c_{35}) (1 - 6 \cos^2 \beta) \frac{\sin^3 \beta}{\cos 4\beta}, \\ c_{33}^{or} \sin \beta &= \left( c_{33} \frac{2 - 3 \sin^2 2\beta}{2 \cos 4\beta} - \frac{1}{2} (c_{13} + 2c_{55}) \frac{\sin^2 2\beta}{\cos 4\beta} \right) \sin \beta \\ &\quad - (c_{15} + c_{35}) (1 - 6 \sin^2 \beta) \frac{\cos^3 \beta}{\cos 4\beta}, \\ c_{13}^{or} &= c_{13} \frac{2 - 3 \sin^2 2\beta}{2 \cos 4\beta} - \frac{1}{2} (c_{33} - 2c_{55}) \frac{\sin^2 2\beta}{\cos 4\beta} - \frac{1}{4} (c_{15} + c_{35}) \operatorname{tg} 4\beta, \\ c_{55}^{or} &= c_{55} \frac{\cos^2 2\beta}{\cos 4\beta} - \frac{1}{2} (c_{33} - c_{13}) \frac{\sin^2 2\beta}{\cos 4\beta} - \frac{1}{4} (c_{15} + c_{35}) \operatorname{tg} 4\beta. \end{aligned}$$

Анализ равенств (53) и (54) показывает, что

- вычисление  $c_{11}^{or}$  и  $c_{33}^{or}$  из равенств (53) будет неустойчивым при углах  $\beta$  близких к  $\pi/4$ , поскольку  $\operatorname{tg} 2\beta \rightarrow \infty$  и разность  $c_{15} - c_{35}$  известна с некоторой ошибкой (очевидно, для точных значений  $\lim_{\beta \rightarrow \pi/4} \frac{c_{15} - c_{35}}{\cos 2\beta} = \text{const}$  (см. последнее уравнение системы (48)));
- равенства (54) теряют смысл при  $\beta = \pi/8$  и  $\beta = 3\pi/8$ , поскольку  $\det K = \cos 4\beta = 0$ ; очевидно, что при углах  $\beta$  близких к значениям  $\pi/8$  и  $3\pi/8$  возможны большие ошибки вычислений;
- из равенств (54) упругие постоянные  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$  и  $c_{55}^{or}$  могут быть устойчиво вычислены при угле  $\beta$  близким к  $\pi/4$ ;
- из равенств (53) упругие постоянные  $c_{11}^{or}$  и  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$  и  $c_{55}^{or}$  могут быть устойчиво вычислены при угле  $\beta$  близком к  $\pi/8$  или  $3\pi/8$ ;
- значения упругих постоянных в (49) и в (54) при  $\beta = \pi/4$  совпадают.

Подстановка соотношений (53) или (54) в последнее уравнение системы (48) приводит нас в обоих случаях к уравнению для нахождения угла  $\beta$

$$(55) \quad 2c_{35} \operatorname{ctg}^2 2\beta - [(c_{13} + 2c_{55}) - c_{33}] \operatorname{ctg} 2\beta - (c_{35} - c_{15}) = 0,$$

решение которого можно представить в следующем виде:

$$(56) \quad \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{(c_{13} + 2c_{55}) - c_{33}}{4c_{35}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{8c_{35}(c_{15} - c_{35})}{[(c_{13} + 2c_{55}) - c_{33}]^2}} \right),$$

знак перед корнем выбран так, чтобы значения (56) и (50) совпадали при  $c_{15} - c_{35} = 0$ .

Если  $(c_{13} + 2c_{55}) - c_{33} = 0$ , тогда уравнение (55) решений не имеет, поскольку для реальной моноклинной среды  $(c_{35} - c_{15})/c_{35} < 0$  (см. [19]).

Разобьем интервал  $(0, \pi/2)$  на две части

$$\Omega_1 = \left( 0, \frac{\pi}{16} \right) \cup \left( \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16} \right) \cup \left( \frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2} \right), \quad \Omega_2 = \left( \frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16} \right) \cup \left( \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16} \right).$$

Итак, формальное решение системы (48) строится следующим образом: сначала, используя (56), вычисляем угол  $\beta \in (0, \pi/2)$ , далее, в зависимости от значения угла  $\beta$  для определения упругих постоянных используем соотношения либо (52) и (54) (если  $\beta \in \Omega_1$ ), либо (52) и (53) (если  $\beta \in \Omega_2$ ).

Таким образом, если решение уравнения (56) существует, угол  $\beta$  не близок к значениям 0 и  $\pi/2$ , и значения упругих постоянных  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$ ,  $c_{66}^{or}$ ,  $c_{23}^{or}$  и  $c_{12}^{or}$  попадают в доверительные интервалы, тогда имеем основание предполагать, что среда является орторомбической, для которой нам неизвестна только упругая постоянная  $c_{22}^{or}$ .

В случае, если решение уравнения (56) существует, угол  $\beta$  близок к значению 0, и значения упругих постоянных  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{66}^{or}$  и  $c_{12}^{or}$  попадают в доверительные интервалы, тогда имеем основание предполагать, что среда является орторомбической, для которой нам неизвестны упругие постоянные  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$ ,  $c_{23}^{or}$  и  $c_{22}^{or}$ .

В случае, если решение уравнения (56) существует, угол  $\beta$  близок к значению  $\pi/2$ , и значения упругих постоянных  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$  и  $c_{23}^{or}$  попадают в доверительные интервалы, тогда имеем основание предполагать, что среда является орторомбической, для которой нам неизвестны упругие постоянные  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{66}^{or}$ ,  $c_{12}^{or}$  и  $c_{22}^{or}$ .

Далее можем провести проверку на принадлежность среды к другим видам анизотропии.

### 5.2.2. Трансверсально-изотропная среда.

1. Пусть угол не близок к значениям 0 и  $\pi/2$ , и найденные значения упругих постоянных  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$ ,  $c_{66}^{or}$ ,  $c_{23}^{or}$  и  $c_{12}^{or}$  определены и попадают в доверительные интервалы.

Сравниваем матрицы (12) и (20). Если

$$(57) \quad c_{13}^{or} = c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{or} = c_{55}^{or}, \quad c_{66}^{or} = \frac{1}{2}(c_{11}^{or} - c_{12}^{or}),$$

тогда мы можем предположить, что среда является трансверсально-изотропной с

$$c_{11}^{ti} = c_{11}^{or}, \quad c_{12}^{ti} = c_{12}^{or}, \quad c_{13}^{ti} = c_{13}^{or}, \quad c_{33}^{ti} = c_{33}^{or}, \quad c_{44}^{ti} = c_{44}^{or},$$

ось симметрии лежит в плоскости  $Ox_1x_3$  и составляет угол  $\beta$  с осью  $Ox_1$ .

Сравниваем матрицы (12) и (21). Если

$$(58) \quad c_{12}^{or} = c_{13}^{or}, \quad c_{55}^{or} = c_{66}^{or}, \quad c_{44}^{or} = \frac{1}{2}(c_{33}^{or} - c_{23}^{or}),$$

тогда мы можем предположить, что среда является трансверсально-изотропной с

$$c_{11}^{ti} = c_{33}^{or}, \quad c_{12}^{ti} = c_{23}^{or}, \quad c_{13}^{ti} = c_{13}^{or}, \quad c_{33}^{ti} = c_{11}^{or}, \quad c_{44}^{ti} = c_{55}^{or},$$

ось симметрии лежит в плоскости  $Ox_1x_3$  и составляет угол  $\beta + \pi/2$  с осью  $Ox_1$ .

Наши предположения мы делаем только на основании выполнения равенств (57) и (58). С другой стороны нам не известна упругая постоянная  $c_{22}^{or}$  и у нас нет информации о выполнении равенства  $c_{22}^{or} = c_{11}^{or}$  для первого случая или  $c_{22}^{or} = c_{33}^{or}$  для второго.

2. Пусть угол  $\beta$  близок к значению 0, и найденные значения упругих постоянных  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{66}^{or}$  и  $c_{12}^{or}$  попадают в доверительные интервалы.

Сравниваем матрицы (12) и (20). Если

$$c_{12}^{or} \neq c_{13}^{or}, \quad c_{55}^{or} \neq c_{66}^{or}, \quad c_{66}^{or} = \frac{1}{2}(c_{11}^{or} - c_{12}^{or}),$$

тогда мы можем предположить, что среда является трансверсально-изотропной с

$$c_{11}^{ti} = c_{11}^{or}, \quad c_{12}^{ti} = c_{12}^{or}, \quad c_{13}^{ti} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{ti} = c_{55}^{or}$$

и ось симметрии лежит в плоскости  $Ox_1x_3$  и составляет угол  $\beta$  с осью  $Ox_1$ .

Упругая постоянная  $c_{33}^{ti}$  неизвестна.

Сравниваем матрицы (12) и (21). Если

$$c_{12}^{or} = c_{13}^{or}, \quad c_{55}^{or} = c_{66}^{or}$$

тогда мы можем предположить, что среда является трансверсально-изотропной с

$$c_{33}^{ti} = c_{11}^{or}, \quad c_{13}^{ti} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{ti} = c_{55}^{or}$$

и ось симметрии лежит в плоскости  $Ox_1x_3$  и составляет угол  $\beta + \pi/2$  с осью  $Ox_1$ . Упругая постоянная  $c_{11}^{ti}$  и  $c_{12}^{ti}$  неизвестны.

3. Пусть угол  $\beta$  близок к значению  $\pi/2$ , и найденные значения упругих постоянных  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$  и  $c_{23}^{or}$  попадают в доверительные интервалы.

Сравниваем матрицы (12) и (20). Если

$$c_{13}^{or} = c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{or} = c_{55}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является трансверсально-изотропной с

$$c_{33}^{ti} = c_{33}^{or}, \quad c_{13}^{ti} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{ti} = c_{55}^{or}$$

и ось симметрии среды лежит в плоскости  $Ox_1x_3$  и составляет угол  $\beta$  с осью  $Ox_1$ . Постоянны  $c_{11}^{ti}$  и  $c_{12}^{ti}$  неизвестны.

Сравниваем матрицы (12) и (21). Если

$$c_{13}^{or} \neq c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or}, \quad c_{44}^{or} = \frac{1}{2}(c_{33}^{or} - c_{13}^{or})$$

тогда мы можем предположить, что среда является трансверсально-изотропной с

$$c_{11}^{ti} = c_{33}^{or}, \quad c_{12}^{ti} = c_{23}^{or}, \quad c_{13}^{ti} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{ti} = c_{55}^{or}$$

и ось симметрии лежит в плоскости  $Ox_1x_3$  и составляет угол  $\beta + \pi/2$  с осью  $Ox_1$ . Упругая постоянная  $c_{33}^{ci}$  неизвестна.

4. Имеется полное согласование результатов пунктов **2** и **3** с результатами параграфа 4.2.1.

Если ось симметрии трансверсально-изотропной среды близка к совпадению с осью  $Ox_1$ , тогда мы можем определить четыре упругих постоянных (см. параграф 4.2.1).

Если ось симметрии трансверсально-изотропной среды близка к совпадению с осью  $Ox_3$ , тогда мы можем устойчиво определить только три упругих постоянных. Для доказательства этого достаточно сравнить матрицу (12) с матрицей (20) и учесть, что нам известны только следующие упругие постоянные:  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$  и  $c_{23}^{or}$ .

### 5.2.3. Кубическая среда.

1. Пусть угол не близок к значениям 0 и  $\pi/2$ , и вычисленные значения упругих постоянных  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$ ,  $c_{66}^{or}$ ,  $c_{23}^{or}$  и  $c_{12}^{or}$  попадают в доверительные интервалы.

Сравниваем матрицы (12) и (24). Если

$$c_{11}^{or} \neq c_{33}^{or}, \quad c_{12}^{or} \neq c_{13}^{or}, \quad c_{55}^{or} \neq c_{66}^{or}$$

и

$$(59) \quad \begin{aligned} c_{13}^{or} &= c_{23}^{or}, & 2c_{11}^{or} &= c_{33}^{or} + (c_{13}^{or} + 2c_{44}^{or}), \\ c_{44}^{or} &= c_{55}^{or}, & 2(c_{12}^{or} - c_{13}^{or}) &= c_{33}^{or} - (c_{13}^{or} + 2c_{44}^{or}), \\ & & 2(c_{66}^{or} - c_{44}^{or}) &= c_{33}^{or} - (c_{13}^{or} + 2c_{44}^{or}), \end{aligned}$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$(60) \quad c_{11}^{cub} = c_{33}^{or}, \quad c_{12}^{cub} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{44}^{or}.$$

Ориентация элемента среды показана на Рис. 6d.

Сравниваем матрицы (12) и (25). Если

$$c_{11}^{or} \neq c_{33}^{or}, \quad c_{12}^{or} \neq c_{23}^{or}, \quad c_{55}^{or} \neq c_{44}^{or}$$

и

$$(61) \quad \begin{aligned} c_{12}^{or} &= c_{13}^{or}, & 2c_{33}^{or} &= c_{11}^{or} + (c_{12}^{or} + 2c_{55}^{or}), \\ c_{55}^{or} &= c_{66}^{or}, & 2(c_{23}^{or} - c_{12}^{or}) &= c_{11}^{or} - (c_{12}^{or} + 2c_{55}^{or}), \\ & & 2(c_{44}^{or} - c_{55}^{or}) &= c_{11}^{or} - (c_{12}^{or} + 2c_{55}^{or}), \end{aligned}$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$(62) \quad c_{11}^{cub} = c_{11}^{or}, \quad c_{12}^{cub} = c_{12}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{55}^{or}.$$

Ориентация элемента среды показана на Рис. 6c.

Сравниваем матрицы (12) и (23). Если

$$c_{12}^{or} = c_{13}^{or} = c_{23}^{or}, \quad c_{11}^{or} = c_{33}^{or}, \quad c_{44}^{or} = c_{55}^{or} = c_{66}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$c_{11}^{cub} = c_{11}^{or}, \quad c_{12}^{cub} = c_{12}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{44}^{or},$$

ориентация элемента среды показана на Рис. 6а.

Сравниваем матрицы (12) и (26). Если

$$c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or}, \quad c_{12}^{or} \neq c_{13}^{or}, \quad c_{13}^{or} \neq c_{23}^{or}$$

и

$$(63) \quad c_{11}^{or} = c_{33}^{or}, \quad c_{12}^{or} = c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{or} = c_{66}^{or}, \quad c_{13}^{or} - c_{12}^{or} = c_{55}^{or} - c_{44}^{or}, \quad c_{11}^{or} - c_{13}^{or} = 2c_{44}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$(64) \quad c_{11}^{cub} = 2c_{11}^{or} - (c_{12}^{or} + 2c_{44}^{or}), \quad c_{12}^{cub} = c_{12}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{44}^{or},$$

ориентация элемента среды показана на Рис. 6б.

Для определения трех неизвестных постоянных  $c_{mk}^{cub}$  в (60), (62) и (64) мы имеем восемь линейных уравнений, которые являются совместными в случае выполнения условий (59), (61) и (63) соответственно.

Существования последних двух вариантов объясняется тем, что для кубической среды на интервале  $(0, \pi/2)$  может быть два подходящих значения для угла  $\beta$ .

Наши предположения мы строим на основе выполнения соответствующих равенств, но упругая постоянная  $c_{22}^{or}$  нам неизвестна.

2. Пусть угол  $\beta$  близок к значению 0, и найденные значения упругих постоянных  $c_{11}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{66}^{or}$  и  $c_{12}^{or}$  попадают в доверительные интервалы.

Сравниваем матрицы (12) и (24). Если

$$c_{12}^{or} \neq c_{13}^{or}, \quad c_{55}^{or} \neq c_{66}^{or}$$

и

$$c_{12}^{or} - c_{13}^{or} = c_{66}^{or} - c_{55}^{or}, \quad c_{11}^{or} - c_{12}^{or} = 2c_{55}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$c_{11}^{cub} = 2c_{11}^{or} - (c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or}), \quad c_{12}^{cub} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{55}^{or}.$$

Ориентация элемента среды показана на рисунке 6с.

Сравниваем матрицы (12) и (26). Если

$$c_{12}^{or} \neq c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or}$$

и

$$c_{13}^{or} - c_{12}^{or} = c_{55}^{or} - c_{66}^{or}, \quad c_{11}^{or} - c_{13}^{or} = 2c_{66}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$c_{11}^{cub} = 2c_{11}^{or} - (c_{12}^{or} + 2c_{66}^{or}), \quad c_{12}^{cub} = c_{12}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{66}^{or}.$$

Ориентация элемента среды показана на рисунке 6б.

Сравнение матрицы (12) с матрицами (25) и (23) дает следующий результат: если

$$c_{12}^{or} = c_{13}^{or}, \quad c_{55}^{or} = c_{66}^{or}$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$c_{11}^{cub} = c_{11}^{or}, \quad c_{12}^{cub} = c_{12}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{55}^{or}.$$

Ориентация элемента среды показана либо на рисунке 6а, либо на Рис. 6д.

3. Пусть угол  $\beta$  близок к значению  $\pi/2$ , и найденные значения упругих постоянных  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{55}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$  и  $c_{23}^{or}$  попадают в доверительные интервалы.

Сравниваем матрицы (12) и (25). Если

$$c_{13}^{or} \neq c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or}$$

и

$$c_{23}^{or} - c_{13}^{or} = c_{44}^{or} - c_{55}^{or}, \quad c_{33}^{or} - c_{23}^{or} = 2c_{55}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$c_{11}^{cub} = 2c_{33}^{or} - (c_{13}^{or} + 2c_{55}^{or}), \quad c_{12}^{cub} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{55}^{or}.$$

Ориентация элемента среды показана на рисунке 6d.

Сравниваем матрицы (12) и (26). Если

$$c_{13}^{or} \neq c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{or} \neq c_{55}^{or}$$

и

$$c_{23}^{or} - c_{13}^{or} = c_{44}^{or} - c_{55}^{or}, \quad c_{33}^{or} - c_{13}^{or} = 2c_{44}^{or},$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$c_{11}^{cub} = 2c_{33}^{or} - (c_{23}^{or} + 2c_{44}^{or}), \quad c_{12}^{cub} = c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{44}^{or}.$$

Ориентация элемента среды показана на Рис. 6b.

Сравнение матрицы (12) с матрицами (23) и (24) приводит к следующему результату: если

$$c_{13}^{or} = c_{23}^{or}, \quad c_{44}^{or} = c_{55}^{or}$$

тогда мы можем предположить, что среда является кубической с упругими постоянными

$$c_{11}^{cub} = c_{33}^{or}, \quad c_{12}^{cub} = c_{13}^{or}, \quad c_{44}^{cub} = c_{44}^{or}.$$

Ориентация элемента среды показана либо на рисунке 6a, либо на Рис. 6c.

## 6. ТЕТРАГОНАЛЬНАЯ СРЕДА

Из результатов последних сравнений в пунктах **2** и **3** параграфа 5.2.3 следует, что мы не можем правильно определить ориентацию элемента кубической среды в пространстве.

При углах  $\beta$  близких к 0 или  $\pi/2$  кубическая среда близка к среде, которая имеет матрицу упругих постоянных вида либо (24), либо (23).

В силу основного ограничения для орторомбической среды мы можем определить следующие упругие постоянные:  $c_{13}^{or}$ ,  $c_{23}^{or}$ ,  $c_{33}^{or}$ ,  $c_{44}^{or}$  и  $c_{55}^{or}$ . Нетрудно видеть, что данные элементы у матриц (23) и (24) совпадают.

Как уже отмечалось в параграфе 4, в случае кубической среды существует две пары взаимно перпендикулярных прямых  $\ell_k^1$  и  $\ell_k^2$  ( $k = 1, 2$ ), для которых след решения прямой задачи (2)-(5) удовлетворяет условиям типа условий (12) (см. Рис. 2a, Рис. 2b и Рис. 3).

Как нетрудно показать, в общем случае среда, для которой существуют две пары линий  $\ell_k^1$  и  $\ell_k^2$  ( $k = 1, 2$ ), должна обладать следующей матрицей упругих постоянных:

$$(65) \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{tg} & c_{12}^{tg} & c_{13}^{tg} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{tg} & c_{11}^{tg} & c_{13}^{tg} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{tg} & c_{13}^{tg} & c_{33}^{tg} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{tg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{tg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{tg} \end{bmatrix}.$$

Здесь шесть неизвестных упругих параметров и среда является тетрагональной. Частный случай: среда является кубической ( $c_{12}^{tg} = c_{13}^{tg}$ ,  $c_{44}^{tg} = c_{66}^{tg}$ ).

При повороте системы координат на некоторый угол  $\alpha$  вокруг оси  $Ox_3$  матрица (65) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}^{tg} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13}^{tg} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{13}^{tg} & c_{13}^{tg} & c_{33}^{tg} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{tg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{tg} & 0 \\ c_{16} & -c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix},$$

$$c_{11} = c_{11}^{tg} - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left[ c_{11}^{tg} - (c_{12}^{tg} + 2c_{66}^{tg}) \right],$$

$$c_{12} = c_{12}^{tg} + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left[ c_{11}^{tg} - (c_{12}^{tg} + 2c_{66}^{tg}) \right],$$

$$c_{66} = c_{66}^{tg} + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left[ c_{11}^{tg} - (c_{12}^{tg} + 2c_{66}^{tg}) \right],$$

$$c_{16} = \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \left[ c_{11}^{tg} - (c_{12}^{tg} + 2c_{66}^{tg}) \right].$$

Матрицы  $A$ ,  $\hat{B}$  и  $D$  будут иметь следующий вид:

$$A = \rho \begin{bmatrix} c_{44}^{tg} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^{tg} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{tg} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \rho \nu_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{44}^{tg} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{tg} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho \nu_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^{tg} \\ 0 & c_{13}^{tg} & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \rho p^2 E + \rho \nu_1^2 \begin{bmatrix} c_{11}^{tg} & c_{16} & 0 \\ c_{16} & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & c_{55}^{tg} \end{bmatrix} + \rho \nu_2^2 \begin{bmatrix} c_{66} & -c_{16} & 0 \\ -c_{16} & c_{11}^{tg} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^{tg} \end{bmatrix}$$

$$+ \rho \nu_1 \nu_2 \begin{bmatrix} 2c_{16} & c_{12} + c_{66} & 0 \\ c_{12} + c_{66} & -2c_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По основному предположению мы можем восстановить только элементы матриц  $A$  и  $\hat{B}$ , то есть упругие постоянные  $c_{13}^{tg}$ ,  $c_{33}^{tg}$  и  $c_{44}^{tg}$ . Однако эти элементы

не меняются при повороте системы координат на любой угол  $\alpha$ . Следовательно, невозможно определить ориентацию элементов тетрагональной среды — угол  $\alpha$ . Это объясняет результаты последних сравнений пунктов **2** и **3** из параграфа 5.2.3.

## 7. Выводы

В работе приведен алгоритм решения обратной задачи по определению упругих параметров анизотропого слоя (тонкослоистой пачки). В силу наложенных ограничений представленный алгоритм позволяет определять только часть упругих параметров анизотропного слоя. Наряду со стандартным требованием знания следа решения прямой задачи на поверхности для постановки обратной задачи, были сделаны предположения об удовлетворении следа условиям симметричности. Предполагалось, что обратная динамическая задача сейсмики решается в частотной области. Общая постановка обратной задачи в частотной области (7)-(17) по восстановлению упругих постоянных анизотропного слоя (тонкослоистой пачки) может быть сведена к серии последовательно решаемых обратных задач (27)-(28), (29)-(30), (31)-(32), (42)-(43), (44)-(45) и (46)-(47) по восстановлению только части из восстанавливаемых упругих постоянных. Выше перечисленные постановки обратных задач являются стандартными и возможность их численного решения была продемонстрирована в работах [13, 14].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г.В. Аккуратов, В.И.Дмитриев, *Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде*, Численные методы в геофизике, Москва, МГУ, 1979, 3–12.
- [2] Г.В. Аккуратов, В.И.Дмитриев, *Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде* Журнал вычислительной математики и математической физики, **24** (1984), 272–286.
- [3] А.Г. Фатъянов, Б.Г. Михайленко, *Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах*, Доклады РАН, **301** (1988), 834–839.
- [4] А.Г. Фатъянов, *Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии*, Новосибирск, Препринт ВЦ СО АН, 1989, № 857.
- [5] А.Г. Фатъянов, *Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах*, Доклады РАН, **310** (1990), 323–327.
- [6] V.M. Pavlov, *A convenient technique for calculating synthetic seismograms in layered half-space*, Proceedings of the International Conference “Problems of Geocosmos”, St. Petersburg, 03-08 June 2002, 320–323.
- [7] А.Л. Карчевский, *Метод численного решения системы упругости для горизонтально слоистой анизотропной среды* Геология и Геофизика, **46** (2005), 339–351.
- [8] А.Л. Карчевский, *Прямая динамическая задача сейсмики для горизонтально-слоистых сред*, Сибирские Электронные Математические Известия, **2** (2005), 23–61. (<http://semr.math.nsc.ru/V2/v2p23-61.pdf>)
- [9] A.L. Karchevsky, *Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **10** (2002), 361–384.
- [10] E. Kurpinar, A.L. Karchevsky, *Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media*, Inverse Problems, **20** (2004), 953–976.
- [11] A.L. Karchevsky, *The analytical formulas for the gradient of the residual functional for the coefficient inverse problem for the elasticity system*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **11** (2003), 619–629.

- [12] Э.К урпинар, А.Л. Карчевский, *Вычисление градиента при оптимизационном методе решения обратной динамической задачи сейсмики для горизонтально слоистой среды*, Геология и Геофизика, **46** (2005), 439–447.
- [13] A.L. Karchevsky, *Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **12** (2004), 519–634.
- [14] А.Л. Карчевский, *Анализ решения обратной динамической задачи сейсмики для горизонтально-слоистой анизотропной среды*, Геология и Геофизика, (2006). (в печати).
- [15] A.L. Karchevsky, *Numerical solution of the inverse problem for the system of elasticity for vertically inhomogeneous medium*, Bulletin of the Novosibirsk Computing Center, series Mathematical Modeling in Geophysics, **5** (1999), 63–69.
- [16] А.Л. Карчевский, *Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости*, Доклады РАН, **375** (2000), 235–238.
- [17] А.Л. Карчевский, А.Г. Фатьянов, *Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды*, Сибирский журнал вычислительной математики, **4** (2001), 259–269.
- [18] Г.И. Петрашень, Б.М. Каштан, А.А. Ковтун, И.В. Мухина, *Метод контурных интегралов в случае трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, нормальной границам раздела*, Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Ленинград, Наука, Под ред. Г.И.Петрашена, **24** (1984), 4–91.
- [19] A. Bakulin, V. Grechka, I. Tsvankin, *Estimation of fracture parameters from reflection seismic data - Part I, II, III*, Geophysics, **65** (2000), 1788–1830.
- [20] С.Г. Лехницкий *Теория упругости анизотропного тела*, Москва-Ленинград, Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1950.

АНДРЕЙ ЛЕОНИДОВИЧ КАРЧЕВСКИЙ  
 Институт МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,  
 пр. АКАДЕМИКА КОПТОУГА 4,  
 630090, Новосибирск, Россия  
 E-mail address: [karchevs@math.nsc.ru](mailto:karchevs@math.nsc.ru)