S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 155–168 (2007) УДК 512.54

MSC 20D15

О КОНЕЧНЫХ 3-ПОРОЖДЕННЫХ 2-ГРУППАХ АЛЬПЕРИНА

Б. М. ВЕРЕТЕННИКОВ

Abstract. We prove a theorem about the structure of the commutant of a finite 2-group in which every 2-generated subgroup has a cyclic commutant and the group itself is generated by 3 involutions. Also we construct two infinite series of such groups with the second commutant of order 2 and 4.

Введение

Определение. Группой Альперина назовем группу, в которой коммутант любой 2-порожденной подгруппы цикличен.

Основной результат работы [1] состоит в том, что конечная p-группа Альперина при $p > 2$ метабелева. В статье [2] построен пример конечной 2-группы Альперина, в которой второй коммутант имеет порядок 2. Кроме того, доказано (см. [3]), что 2-порожденный коммутант конечной 2-группы Альперина всегда абелев. Таким образом, возникает задача исследования конечных 2-групп Альперина с 3-порожденным коммутантом. В данной статье рассматриваются такие группы, порожденные тремя инволюциями.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{G}$ *– конечная неметабелева 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями, то* $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^m} \times Z_{2^n} \times Z_4$ *где* $m \geq n \geq 2$ *и* $\mathbf{G}''$ *– циклическая группа.*

Теорема 2. *Для любых* $m, n \geq 2$ *существует неметабелева конечная 2-группа Альперина* $\mathbf{G}$*, порожденная тремя инволюциями, в которой* $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^m} \times Z_{2^n} \times Z_4$*,* $m \geq n \geq 2$ *и* $|\mathbf{G}''| = 2$*, причем не существует конечной 2-группы Альперина с вторым коммутантом порядка 4, фактор-группа которой изоморфна* $\mathbf{G}$*.*

Veretennikov B.M., On finite 3-generated 2-groups of Alperin.

Поступила 28 марта 2007 г., опубликована 8 мая 2007 г.

Теорема 3. *Для любых натуральных чисел m и n с условием $m \geq n \geq 3$ существует конечная 2-группа Альперина* $\mathbf{G}$*, порожденная тремя инволюциями, в которой* $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^m} \times Z_{2^n} \times Z_4$ *и* $\mathbf{G}'' \simeq Z_4$.

1. Обозначения и известные результаты

Рассматриваются только конечные 2-группы. $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}', \mathbf{G}_3 = [\mathbf{G}', \mathbf{G}]$, $\mathbf{G}^2$– группа порожденная квадратами элементов из $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^4 = \langle x^4 | x \in \mathbf{G}\rangle$, вообще $\mathbf{G}^{2^n} = \langle x^{2^n} | x \in \mathbf{G}\rangle$, где n – натуральное, $\Phi(\mathbf{G})$ – подгруппа Фраттини группы $\mathbf{G}$, $\Omega(\mathbf{G}) = \langle x | x \in \mathbf{G}, x^2 = 1\rangle$.

Далее постоянно используется известное утверждение:

1.1. Если a, b – инволюции, то $[a,b]^a = [a,b]^{-1} = [a,b]^b$.

Кроме того нам понадобятся:

1.2. [1] Если $\mathbf{G}$ – группа Альперина, то $[\mathbf{G}', \mathbf{G}] \subset \mathbf{G}'^2$.

1.3. (Известный факт). Если $\mathbf{G}$ – метабелева, то
$\forall\ a, b, c \in \mathbf{G}\ \ [a,b,c][b,c,a][c,a,b] = 1$.

1.4. [3] Если $\mathbf{G}$ – группа Альперина и $exp(\mathbf{G}') \leq 4$, то $\mathbf{G}$ – метабелева.

Обозначение. Пусть g_1, g_2, z – элементы произвольной группы H. Будем писать $g_1 = g_2\ mod\langle z\rangle$, если $< z > \lhd H$ и $g_1 < z >= g_2 < z >$.

2. Вспомогательные результаты

Предложение 2.1. Если $\mathbf{G}$ – конечная 2-группа Альперина, порожденная инволюциями a, b и c, $\mathbf{G}' \simeq Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ и $f = [a,b], g = [b,c], h = [c,a]$, то $f^c = fg^2h^2, g^a = gf^2h^2, h^b = hf^2g^2$.

Доказательство. В силу (1.2) $f^c = fx, g^a = gy, h^b = hz, x, y, z \in \Omega(\mathbf{G}')$, и $xyz = 1$ в силу метабелевости $\mathbf{G}$.

Далее, $[ab, ac] = [a, ac]^b[b, ac] = (h^{-1})^b g(f^{-1})^c = hgf$ по модулю $\Omega(\mathbf{G}')$,
$[ab, ac, ab] = [h, ab][g, ab] = z(h^{-2})^b g^{-2} y = zyh^2g^2$ – степень hgf. Тогда либо $zy = f^2$, либо $zy = g^2h^2$. Кроме того, $[ab, c] = (h^{-1})^b g = hg$ по модулю $\Omega(\mathbf{G}')$,
$[ab, c, ab] = [hg, ab] = zyh^2g^2$ (как и выше). Значит, $zy = 1$ или $zy = h^2g^2$.

Сопоставляя две полученные альтернативы, заключаем, что $zy = h^2g^2$. Тогда $x = h^2g^2$. Из соображений симметрии $y = f^2h^2, z = f^2g^2$. Предложение доказано. □

Предложение 2.2. Пусть $\mathbf{G}$ – метабелева 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями a, b и c, $f = [a,b], g = [b,c], h = [c,a]$. Пусть далее τ – центральная инволюция группы $\mathbf{G}$, принадлежащая $\mathbf{G}'$ и в фактор-группе $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\langle\tau\rangle$ $\overline{f}^{\overline{c}} = \overline{f}\overline{g}^2\overline{h}^2$, $\overline{g}^{\overline{a}} = \overline{g}\overline{h}^2\overline{f}^2$, $\overline{h}^{\overline{b}} = \overline{h}\ \overline{f}^2\overline{g}^2$, причем $\overline{f}^2\overline{g}^2\overline{h}^2 \neq \overline{1}$. Тогда и в самой группе $\mathbf{G}$ $f^c = fg^2h^2$, $g^a = gh^2f^2$, $h^b = hf^2g^2$, в частности $f^4g^4h^4 = 1$.

Доказательство. По условию $f^c = fg^2h^2x$, $g^a = gh^2f^2y$, $h^b = hf^2g^2z$, $x, y, z \in \langle\tau\rangle$. Подействуем на равенство $g^a = gh^2f^2y$ элементом c. Тогда получим $(g^{-1})^{ah^{-1}} = g^{-1}h^{-2}f^2g^4h^4y$, откуда $g^{-1}h^{-2}f^{-2}y = g^{-1}h^2f^2g^4y$ и $f^4g^4h^4 = 1$.

Далее, $[ab, ac] = [a, ac]^b[b, ac] = (h^{-1})^b g(f^{-1})^c = h^{-1}f^{-2}g^{-2}gf^{-1}g^{-2}h^{-2}zx =$
$= f^{-3}g^{-3}h^{-3}zx = fgh$ по модулю $\langle\tau\rangle$,
$[ab, ac, ab] = [g, ab][h, ab] = g^{-2}(f^2h^2y)^b \cdot f^2g^2z(h^{-2})^b = yz \in \langle\tau\rangle$.

По условию yz – степень элемента fgh. Но так как $\overline{f}^2\overline{g}^2\overline{h}^2 \neq \overline{1}$ в
$\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\langle\tau\rangle$, то $yz = (fhg)^4 = 1$.

В силу симметрии условий предложения $zx = xy = 1$, откуда $x = y = z$. Так как $\mathbf{G}$ – метабелева, то $[a,b,c][b,c,a][c,a,b] = 1$, т. е. $g^2h^2xh^2f^2yf^2g^2z = 1$, откуда $f^4g^4h^4xyz = 1$ и $xyz = 1$.

Тогда $x = y = z = 1$, и предложение доказано. $\square$

Предложение 2.3. Пусть $\mathbf{G}$ – метабелева 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями a, b и c, $f = [a,b]$, $g = [b,c]$, $h = [c,a]$, и существуют такие $n, m, k \in N$, что $\mathbf{G}' \simeq Z_{2^n} \times Z_{2^m} \times Z_{2^k}$, $n \geq m \geq k \geq 2$. Тогда $f^c = fg^2h^2$, $g^a = gh^2f^2$, $h^b = hf^2g^2$, в частности, $f^4g^4h^4 = 1$ и $k = 2$.

Доказательство. Индукция по порядку $\mathbf{G}'$.

В силу (2.1) можно считать, что $n \geq 3$. Тогда $\mathbf{G}'^4 \neq 1$, и, значит , существует элемент τ порядка 2, такой, что

$\langle\tau\rangle \lhd \mathbf{G}$, $\tau \in \mathbf{G}'^4$.

В фактор-группе $\mathbf{G}/\langle\tau\rangle$ условия доказываемого предложения выполнены, если вместо a, b, c, f, g, h взять их канонические образы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ в $\mathbf{G}/\langle\tau\rangle$. Тогда $\overline{f}^{\overline{c}} = \overline{f}\overline{g}^2\overline{h}^2$, $\overline{g}^{\overline{a}} = \overline{g}\overline{h}^2\overline{f}^2$, $\overline{h}^{\overline{b}} = \overline{h}\ \overline{f}^2\overline{g}^2$ в силу предположения индукции, а также $\overline{f}^2\overline{g}^2\overline{h}^2 \neq \overline{1}$, так как иначе в $(\mathbf{G}/\langle\tau\rangle)'$ прямым сомножителем выделяется подгруппа, изоморфная Z_2. Значит, в силу (2.2) $f^c = fg^2h^2$, $g^a = gh^2f^2$, $h^b = hf^2g^2$, $f^4g^4h^4 = 1$. Тогда в $\mathbf{G}'$ прямым сомножителем выделяется подгруппа, изоморфная Z_4, и $k = 2$. Предложение (2.3) доказано. $\square$

Предложение 2.4. Если в конечной метабелевой 2-группе Альперина $\mathbf{G}$, порожденной тремя инволюциями, $\mathbf{G}' \simeq Z_4 \times Z_4 \times Z_2$, то $\mathbf{G}$ принадлежит одному из следующих типов:

1. $\mathbf{G} = \langle a,b,c\rangle$, $f^4 = g^4 = 1$, $h^2 = 1$
2. $\mathbf{G} = \langle a,b,c\rangle$, $f^4 = g^4 = 1$, $h^2 = f^2$
3. $\mathbf{G} = \langle a,b,c\rangle$, $f^4 = g^4 = 1$, $h^2 = f^2g^2$, где

a, b, c – инволюции, $f = [a,b]$, $g = [b,c]$, $h = [c,a]$, причем во всех случаях $f^c = fg^2h^2$, $g^a = gh^2f^2$, $h^b = hf^2g^2$ (как и в (2.1)).

Доказательство. Из строения $\mathbf{G}'$ видно, что два из коммутаторов f, g, h имеют порядок 4 и подгруппы, порожденные ими, пересекаются тривиально. Без ограничения общности можно считать, что этими коммутаторами являются f и g. Тогда $\langle f,g\rangle = \langle f\rangle \times \langle g\rangle = Z_4 \times Z_4$, откуда $h^2 = f^\mu g^\eta$, где μ и η – четные числа.

Рассмотрим первый случай. Пусть $g^a = gf^{2\alpha}g^{2\beta}$, $h^b = hf^{2\gamma}g^{2\delta}$, $f^c = f^{2\varepsilon+1}g^{2\theta}$. Условие метабелевости дает

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha+\gamma+\varepsilon & \equiv 0(2) \\ \beta+\delta+\theta & \equiv 0(2) \end{array}\right. \quad (1)$$

Далее, $[ab,c] = (h^{-1})^b g = h^{-1}f^{-2\gamma}g^{-2\delta+1}$, откуда $[ab,c]^2 = g^2$, и

$[ab,c,ab] = [h^{-1}g, ab] = [h^{-1}, ab][g, ab] = f^{2\gamma}g^{2\delta}(h^2)^b g^{-2}(f^{2\alpha}g^{2\beta})^b =$
$= f^{2\alpha+2\gamma}g^{2\beta+2\delta-2}$ – степень g^2. Значит, $\alpha+\gamma = 0(2)$, и тогда $\varepsilon = 0(2)$ в силу (1).

Аналогично $[ac,b] = f^c g^{-1} = f^{1+2\varepsilon}g^{-1+2\theta}$, в частности, $[ac,b]^2 = f^2g^2$, и $[ac,b,ac] = [fg,ac] = [f,ac][g,ac] = f^{2\varepsilon}g^{2\theta}f^{-2}g^{-2}f^{2\alpha}g^{2\beta} = f^{2\alpha+2\varepsilon-2}g^{2\beta+2\theta-2}$ – степень f^2g^2. Значит,

$\alpha+\varepsilon \equiv (\beta+\theta)\ mod\ 2.$ (2)

И, наконец, $[bc,a] = (f^{-1})^c h = f^{-1-2\varepsilon}g^{-2\theta}h$, в частности $[bc,a]^2 = f^2$, и $[bc,a,bc] = [fh,bc] = [f,bc][h,bc] = f^{2\varepsilon}g^{2\theta}f^{-2}h^{-2}f^{2\gamma}g^{2\delta} = f^{-2+2\varepsilon+2\delta}g^{2\theta+2\delta}$ –

степень f^2. Значит, $\theta+\delta\equiv 0(2)$ и $\beta\equiv 0(2)$. Тогда из (2) следует, что $\alpha=\theta\ mod\ 2$.

Из (1) следует $\left\{\begin{array}{ll}\alpha+\gamma & \equiv 0(2)\\ \delta+\theta & \equiv 0(2)\end{array}\right.$, откуда $\alpha=\gamma=\delta=\theta(2)$. Получили два варианта:

(А) $\alpha\equiv\gamma\equiv\delta\equiv\theta\equiv 0(2)$, то есть $f^c=f, h^b=h, g^a=g$ и

(Б) $\alpha\equiv\gamma\equiv\delta\equiv\theta\equiv 1(2)$.

Однако в варианте (А)
$[ab,ac]=[a,ac]^b[b,ac]=(h^{-1})^b g(f^{-1})^c\equiv h^{-1}gf^{-1}\ mod\ \Omega(\mathbf{G}')$, и $[ab,ac,ab]=[h^{-1}g,ab]=g^{-2}$ не является степенью $h^{-1}gf^{-1}$. Таким образом, остается один вариант (Б) и $f^c=fh^2g^2, g^a=gf^2h^2, h^b=hf^2g^2$, что и требовалось.

Второй и третий случаи рассматриваются аналогично. □

Замечание. Только в случае (3) предложения (2.4) $f^2g^2h^2=1$. В остальных случаях $f^2g^2h^2\neq 1$.

Предложение 2.5. Если $\mathbf{G}$ – конечная 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями и $\mathbf{G}'/\mathbf{G}''\simeq Z_{2^n}\times Z_2\times Z_2$, $n\geq 1$, то $\mathbf{G}''=1$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}$ – минимальный контрпример. Тогда вследствие (1.4) $n\geq 2$, $\mathbf{G}''=\langle\tau\rangle$ и имеет порядок 2. Можно считать, что в фактор-группе $\overline{\mathbf{G}}=\mathbf{G}/\langle\tau\rangle$
$\overline{f}^{2^n}=1$, $\overline{g}^2=\overline{f}^{2\mu}$, $\overline{h}^2=\overline{f}^{2\nu}$, где $\overline{f}=[\overline{a},\overline{b}]$, $\overline{g}=[\overline{b},\overline{c}]$, $\overline{h}=[\overline{c},\overline{a}]$, и a,b,c – инволюции, порождающие $\mathbf{G}$.

Кроме того в силу (1.2) в $\mathbf{G}/\langle\tau\rangle$ имеем $\overline{f}^c=\overline{f}^{1+2\alpha}$, $\overline{g}^a=\overline{g}\overline{f}^{2\beta}$, $\overline{h}^b=\overline{h}\ \overline{f}^{2\gamma}$ для некоторых целых α,β,γ. Тогда в самой группе $\mathbf{G}$ $f^{2^n}=\tau^{\omega_1}$, $g^2=f^{2\mu}\tau^{\omega_2}$, $h^2=f^{2\nu}\tau^{\omega_3}$, $f^c=f^{1+2\alpha}\tau^{\omega_4}$, $g^a=gf^{2\beta}\tau^{\omega_5}$, $h^b=hf^{2\gamma}\tau^{\omega_6}$ для некоторых $\omega_i\in\{0,1\}, i=\overline{1,6}$.

Подействуем на равенство $f^a=f^{-1}$ элементом c:
$(f^{1+2\alpha}\tau^{\omega_4})^{ah^{-1}}=f^{-1-2\alpha}\tau^{\omega_4}$, $f^{-1-2\alpha}[f,h]\tau^{\omega_4}=f^{-1-2\alpha}\tau^{\omega_4}$, поэтому $[f,h]=1$.

Теперь подействуем элементом c на равенство $f^b=f^{-1}$. Получим
$(f^{1+2\alpha}\tau^{\omega_4})^{bg}=f^{-1-2\alpha}\tau^{\omega_4}$, откуда, как и выше, $[f,g]=1$. Тогда $[g,h]\neq 1$, иначе $\mathbf{G}''=1$.

Подействуем элементом c на равенство $g^a=gf^{2\beta}\tau^{\omega_5}$. Получим: $(g^{-1})^{ah^{-1}}=g^{-1}f^{2\beta(1+2\alpha)}\tau^{\omega_5}$ и $g^{-1}f^{-2\beta}\tau^{\omega_5}[g,h]=g^{-1}f^{2\beta(1+2\alpha)}\tau^{\omega_5}$. Тогда $[g,h]=f^{4\beta+4\alpha\beta}$, откуда $|f|=2^{n+1}$ и

$4\beta(\alpha+1)=2^n t$, где t нечетно. (3)

Так как c – инволюция, то $f^{c^2}=f$. Значит, $f^{1+4\alpha+4\alpha^2}=f$ и

$4\alpha(\alpha+1)\equiv 0(2^{n+1})$. Сопоставляя это с (3), видим, что α четно и делится на 2^{n-1}. Тогда $f^c=f\tau^{\omega_0}$ для некоторого $\omega_0\in\{0,1\}$. Кроме того из (3) $\beta=2^{n-2}q$, q нечетно.

На равенство $g^2=f^{2\mu}\tau^{\omega_2}$ подействуем элементом c. Тогда получим $g^{-2}=(f\tau^{\omega_0})^{2\mu}\tau^{\omega_2}$, откуда $f^{-2\mu}\tau^{\omega_2}=f^{2\mu}\tau^{\omega_2}$, то есть $f^{4\mu}=1$ и, значит, $\mu\equiv o(2^{n-1})$. Следовательно, $g^2=\tau^{\mu_0}$ для некоторого $\mu_0\in\{0,1\}$.

Подействовав на равенство $g^2=\tau^{\mu_0}$ элементом a, получим:
$(g^a)^2=\tau^{\mu_0},(gf^{2^{n-1}q}\tau^{\omega_5})^2=\tau^{\mu_0},g^2f^{2^n}=\tau^{\mu_0},f^{2^n}=1$. Противоречие, которое доказывает предложение. □

Предложение 2.6. Если $\mathbf{G}$ – конечная 2-группа Альперина, $\mathbf{G} = \langle a, b, c\rangle$, $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^m} \times Z_{2^n} \times Z_2$, где a, b, c – инволюции, $m \geq n \geq 2$ и $\overline{h}^2 = \overline{f}^{2\mu}\overline{g}^{2\nu}$ в $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{G}''$ где $h = [c, a], f = [a, b], g = [b, c]$, μ, ν – нечетные, то $\mathbf{G}'' = 1$.

Доказательство. Предположим сначала что, $\mathbf{G}$ удовлетворяет условию теоремы и $\mathbf{G}$ – метабелева. Пусть $f^c = f^{-1}x, g^a = g^{-1}y, h^b = h^{-1}z$.

Подействуем на равенство $h^2 = f^{2\mu}g^{2\nu}$ элементом a: $h^{-2} = f^{-2\mu}g^{-2\nu}y^{2\nu}$, откуда $y^{2\nu} = 1$ и $y^2 = 1$ в силу нечетности ν.

Из действия элемента b на равенство $h^2 = f^{2\mu}g^{2\nu}$ получим $h^{-2}z^2 = f^{-2\mu}g^{-2\nu}$, откуда $z^2 = 1$.

Аналогично после действия элемента c на то же равенство получим $h^{-2} = f^{-2\mu}x^{2\mu}g^{-2\nu}$, откуда $x^{2\mu} = 1$ и $x^2 = 1$ в силу нечетности μ.

Из действия c на равенство $f^a = f^{-1}$ получим: $(f^a)^c = (f^{-1})^c, (f^{-1}x)^{ah^{-1}} = fx$, $fx^a = fx, x^a = x$.

Из действия c на равенство $f^b = f^{-1}$ получим: $(f^b)^c = (f^{-1})^c, (f^{-1}x)^{bg} = fx$, $fx^b = fx, x^b = x$.

Равенство $f^c = f^{-1}x$ влечет $f^{c^2} = fxx^c$, откуда $xx^c = 1$, следовательно, $x^c = x$.

Таким образом, $x \in Z(\mathbf{G})$. Аналогично доказывается, что $y, z \in Z(\mathbf{G})$. Заметим, что из метабелевости $\mathbf{G}$ следует $f^2g^2h^2 = xyz$.

Далее $[ab, ac] = [a, ac]^b[b, ac] = (h^{-1})^b g(f^{-1})^c = fgh$ по модулю $\Omega(\mathbf{G}') \cap Z(\mathbf{G})$, и $[ab, ac, ab] = [g, ab][h, ab] = g^{-2}(g^{-2}y)^b(h^{-2}z)(h^{-2})^b = yz$ – степень fgh, откуда yz – степень xyz. Тогда $yz = 1$ или $x = 1$. Таким образом,

либо $y = z$, либо $x = 1$. (4)

Аналогично $[ab, ac, ac] = [f, ac][g, ac] = f^{-2}x(f^{-2})^c g^{-2}(g^{-2}y)^c = xy$, откуда

либо $x = y$, либо $z = 1$. (5)

Кроме того, $[ab, bc] = [a, bc]^b[b, c] = (h^{-1})^b f^{cb} g = hzfxg$, $[ab, bc, bc] =$
$= [h, bc][f, bc] = h^{-2}(h^{-2}z)^c f^{-2}x(f^{-2})^c = xz$, откуда

либо $x = z$, либо $y = 1$. (6)

Из (4), (5), (6) следует, что либо среди x, y, z два или три элемента равны 1, либо $x = y = z \neq 1$.

Возникает 5 вариантов:

1. $f^c = f^{-1}, g^a = g^{-1}, h^b = h^{-1}$;
2. $f^c = f^{-1}x, g^a = g^{-1}, h^b = h^{-1}$;
3. $f^c = f^{-1}, g^a = g^{-1}y, h^b = h^{-1}$;
4. $f^c = f^{-1}, g^a = g^{-1}, h^b = h^{-1}z$;
5. $f^c = f^{-1}x, g^a = g^{-1}x, h^b = h^{-1}x$, что можно записать в виде: $f^c = fg^2h^2$, $g^a = gh^2f^2$, $h^b = hf^2g^2$.

Пусть теперь $\mathbf{G}'' = \langle\tau\rangle$ порядка 2 и $\mathbf{G}/\mathbf{G}''$ из первого варианта.

Тогда $\mathbf{G} = \langle a, b, c\rangle$, a, b, c – инволюции, $f^c = f^{-1}\tau^\alpha, g^a = g^{-1}\tau^\beta, h^b = h^{-1}\tau^\gamma$, где f, g, h имеют тот же смысл, что и выше.

Подействовав на равенство $g^a = g^{-1}\tau^\beta$ элементом b, получим: $(g^{-1})^{af} = g\tau^\beta$, $g\tau^\beta[g, f] = g\tau^\beta$, $[g, f] = 1$.

Подействовав на равенство $g^a = g^{-1}\tau^\beta$ элементом c, получим: $(g^{-1})^{ah^{-1}} = g\tau^\beta$, $g\tau^\beta[g, h] = g\tau^\beta$, $[g, h] = 1$.

Подействовав на равенство $h^b = h^{-1}\tau^\gamma$ элементом c, получим: $(h^{-1})^{bg} = h\tau^\gamma$, $h\tau^\gamma[h, g] = h\tau^\gamma$, $[h, g] = 1$.

Значит $\mathbf{G}'' = 1$. Получили противоречие.

Аналогично доказывается, что, если $\mathbf{G}/\mathbf{G}''$ из второго, третьего или четвертого вариантов, то $\mathbf{G}'' = 1$.

Пусть теперь $\mathbf{G} = \langle a, b, c\rangle$, a, b, c – инволюции, $f^c = fg^2h^2\tau^\alpha$, $g^a = gh^2f^2\tau^\beta$, $h^b = hf^2g^2\tau^\gamma$.

Подействовав на равенство $g^a = gf^2h^2\tau^\beta$ элементом b, получим:
$(g^{-1})^{af} = g^{-1}f^{-2}h^2f^4g^4\tau^\beta$, $g^{-1}f^{-2}h^{-2}\tau^\beta[g,f] = g^{-1}f^2h^2g^4\tau^\beta$, $f^4g^4h^4 = [f,g]$.

Подействовав на равенство $g^a = gf^2h^2\tau^\beta$элементом c, получим:
$(g^{-1})^{ah^{-1}} = g^{-1}f^2g^4h^4h^{-2}\tau^\beta$, $g^{-1}f^{-2}h^{-2}\tau^\beta[g,h] = g^{-1}f^2g^4h^2\tau^\beta$, $f^4g^4h^4 = [g,h]$.

Подействовав на равенство $f^c = fg^2h^2\tau^\alpha$элементом a, получим:
$(f^{-1})^{ch^{-1}} = f^{-1}g^2f^4h^4h^{-2}\tau^\alpha, f^{-1}g^{-2}h^{-2}\tau^\alpha[f,h] = f^{-1}g^2f^4h^2\tau^\alpha, f^4g^4h^4 = [f,h]$. Значит

$$f^4g^4h^4 = [f,g] = [g,h] = [h,f] = \tau. \tag{7}$$

Действуя на равенство $h^2 = f^{2\mu}g^{2\nu}\tau^\delta$ элементом b, получим:
$h^2f^4g^4 = f^{-2\mu}g^{-2\nu}\tau^\delta$, $h^2f^4g^4 = h^{-2}\tau^\delta\tau^\delta$, $f^4g^4h^4 = 1$.

Получили противоречие с (7). Предложение (2.6) доказано. □

Предложение 2.7. Пусть $\mathbf{G}$ – конечная 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями a, b, c, $f = [a,b], g = [b,c], h = [c,a]$ и в фактор-группе $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{G}''$ $\overline{f}^{\overline{c}} = \overline{f}\overline{g}^2\overline{h}^2, \overline{g}^{\overline{a}} = \overline{g}\overline{h}^2\overline{f}^2, \overline{h}^{\overline{b}} = \overline{h}\ \overline{f}^2\overline{g}^2$, причем $\overline{h}^2 = \overline{f}^{2\mu}\overline{g}^{2\nu}, \mu, \nu \in Z$. Тогда $\mathbf{G}'' = 1$.

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{G}'' = \langle\tau\rangle$, где $|\tau| = 2$. Тогда
$h^2 = f^{2\mu}g^{2\nu}\tau^\delta, f^c = fg^2h^2\tau^\alpha, g^a = gh^2f^2\tau^\beta, h^b = hf^2g^2\tau^\gamma$ для некоторых целых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Повторяя в точности выкладки при рассмотрении 5-го варианта в доказательстве (2.6), получим противоречие: $f^4g^4h^4 = \tau = 1$. Предложение (2.7) доказано. □

Предложение 2.8. Пусть $\mathbf{G}$ – конечная 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями a, b и c, $\mathbf{G}' \simeq Z_{2^n} \times Z_{2^m} \times Z_2$, где $n \geq m \geq 2$. Тогда выполняется одно из следующих условий:

(А) $f^c = fg^2h^2, g^a = gf^2h^2, h^b = hf^2g^2, f^2g^2h^2 \neq 1$;

(Б) $h^2 = f^{2\mu}g^{2\nu}$, где μ и ν нечетны.

(В обоих случаях $f = [a,b], g = [b,c], h = [c,a]$).

Доказательство. Индукция по $m+n$. При $m+n = 4$ предложение (2.8) следует из (2.4).

Пусть теперь $m+n > 4$ в частности $n \geq 3$, и $\tau \in Z(\mathbf{G})\cap(\mathbf{G}')^{2^{n-1}}$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\langle\tau\rangle$. Тогда $\overline{\mathbf{G}} = \langle\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\rangle$, $\overline{\mathbf{G}}'$ типа, указанного в предложении, только n или m на единицу меньше. Тогда в силу предположения индукции:

(а) $\overline{f}^{\overline{c}} = \overline{f}\overline{g}^2\overline{h}^2, \overline{g}^{\overline{a}} = \overline{g}\overline{f}^2\overline{h}^2, \overline{h}^{\overline{b}} = \overline{h}\ \overline{f}^2\overline{g}^2, \overline{f}^2\overline{g}^2\overline{h}^2 \neq \overline{1}$ или

(б) $\overline{h}^2 = \overline{f}^{2\mu}\overline{g}^{2\nu}$, где μ, ν нечетны.

В случае (а) из (2.2) следует, что черточки над всеми элементами можно убрать, значит имеет место условие (А). В случае (б) $h^2 = f^{2\mu}g^{2\nu}\tau^\alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$. Так как по предположению $\tau \in (\mathbf{G}')^{2^{n-1}}$, то $\tau = f^{4p}g^{4q}h^{4r}$, откуда $h^2 = f^{2s}g^{2t}$ для некоторых нечетных s, t, что и требовалось. (2.8) доказано. □

Предложение 2.9. Пусть $\mathbf{G}$ – конечная 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями и $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^n} \times Z_{2^m} \times Z_2$, где $n \geq m \geq 1$. Тогда $\mathbf{G}'' = 1$.

Доказательство. При $m = 1$ справедливость данного предложения следует из (2.5). Пусть теперь $m \geq 2$. Тогда $\mathbf{G} = \langle a, b, c\rangle$, где a, b, c – инволюции, $f = [a, b], g = [b, c], h = [c, a]$, и в фактор-группе $\overline{G} = \mathbf{G}/\mathbf{G}''$ выполнено одно из условий предложения (2.8):

(A) $\overline{f}^{\overline{c}} = \overline{f}\overline{g}^2\overline{h}^2, \overline{g}^{\overline{a}} = \overline{g}\overline{f}^2\overline{h}^2, \overline{h}^{\overline{b}} = \overline{h}\ \overline{f}^2\overline{g}^2, \overline{f}^2\overline{g}^2\overline{h}^2 \neq \overline{1}$ или

(Б) $\overline{h}^2 = \overline{f}^{2\mu}\overline{g}^{2\nu}$, где μ, ν нечетны.

Тогда по (2.7) и (2.6), соответственно, $\mathbf{G}'' = 1$. Предложение (2.9) доказано. $\square$

Предложение 2.10. Если $\mathbf{G}$ неметабелева 2-группа Альперина, $|\mathbf{G}''| = 2$, $\mathbf{G} = \langle a, b, c\rangle$ где a, b и c – инволюции, то $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^n} \times Z_{2^m} \times Z_4$, где $n \geq m \geq 2$ и $f^4g^4h^4 = \tau = [f, g] = [g, h] = [h, f]$, где $f = [a, b], g = [b, c], h = [c, a], \langle\tau\rangle = \mathbf{G}''$.

Доказательство. В силу (2.9) $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^n} \times Z_{2^m} \times Z_{2^k}$,, где $k \geq 2$, а в силу (2.3) $k = 2$, $\overline{f}^{\overline{c}} = \overline{f}\overline{g}^2\overline{h}^2, \overline{g}^{\overline{a}} = \overline{g}\overline{f}^2\overline{h}^2, \overline{h}^{\overline{b}} = \overline{h}\ \overline{f}^2\overline{g}^2, \overline{f}^4\overline{g}^4\overline{h}^4 = \overline{1}$ в $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{G}''$.

На равенство $f^c = fg^2h^2\tau^{\omega_1}$ подействуем элементом a:
$(f^{-1})^{ch^{-1}} = f^{-1}g^2f^4h^4h^{-2}\tau^{\omega_1}$, $f^{-1}g^{-2}h^{-2}\tau^{\omega_1}[f, h] = f^{-1}g^2f^4h^2\tau^{\omega_1}$ и $f^4g^4h^4 = [f, h]$.

Аналогично из равенств $g^a = gf^2h^2\tau^{\omega_2}$ и $h^b = hf^2g^2\tau^{\omega_3}$ получим $f^4g^4h^4 = [h, g] = [g, f]$. Так как $[f, g], [g, h], [h, f]$ порождают $\mathbf{G}''$, то получаем требуемое. $\square$

Предложение 2.11. Если $\mathbf{G}$ – конечная 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями a, b, c, $|\mathbf{G}''| = 4$, то $\mathbf{G}'' \leq Z(\mathbf{G})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}'' \simeq \langle\tau, \omega\rangle$, $\tau \in Z(\mathbf{G})$. Из (2.10) следует $[f, g] = \omega\tau^{\mu_1}, [g, f] = \omega\tau^{\mu_2}, [h, g] = \omega\tau^{\mu_3}$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{0, 1\}$. Пусть $\omega^a = \omega\tau^{\alpha_1}, \omega^b = \omega\tau^{\alpha_2}$. Тогда $\omega^{ab} = (\omega\tau^{\alpha_1})^b = \omega\tau^{\alpha_1+\alpha_2}$ и $\omega^f = \omega^{abab} = \omega$. Аналогично $\omega^g = \omega$ и $\omega^h = \omega$. Так что $\omega \in Z(\mathbf{G}')$.

Далее, $[f, g] = \omega\tau^{\mu_1}$, $[f^b, g^b] = \omega^b\tau^{\mu_1}$, $[f, g] = \omega^b\tau^{\mu_1}$ и $\omega^b = \omega$.

Аналогично $\omega^a = \omega$, $\omega^c = \omega$. Значит, $\omega \in Z(\mathbf{G})$. $\square$

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathbf{G}$ – неметабелева 2-группа Альперина, порожденная тремя инволюциями. Тогда 1-я часть теоремы 1 следует из (2.10).

Докажем теперь, что если $\mathbf{G}'' \neq 1$, то $\mathbf{G}''$ цикличен. Предположим, что $\mathbf{G}''$ не цикличен. Во-первых, заметим, что в фактор-группе $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{G}''$ в силу (2.10) выполнены соотношения:

$$\overline{f}^{\overline{c}} = \overline{f}\overline{g}^2\overline{h}^2, \overline{g}^{\overline{a}} = \overline{g}\overline{f}^2\overline{h}^2, \overline{h}^{\overline{b}} = \overline{h}\ \overline{f}^2\overline{g}^2, \tag{8}$$

где $\mathbf{G} = \langle a, b, c\rangle$, a, b, c – инволюции и $f = [a, b], g = [b, c], h = [c, a]$.

Во-вторых, можно считать, что $\mathbf{G}''$ – элементарная абелева группа порядка 4. В силу (8) $g^a = gf^2h^2x$, $x \in \mathbf{G}''$. Действуя на это равенство элементом b, получим
$(g^{-1})^{af} = g^{-1}f^{-2}h^2f^4g^4x$, $g^{-1}f^{-2}h^{-2}x[g^{-1}, f] = g^{-1}f^{-2}h^2f^4g^4x$ и $f^4g^4h^4 = [g, f]$.

Аналогично из равенства $f^c = fg^2h^2y$, $y \in \mathbf{G}''$, получим $[f, h] = f^4g^4h^4$, а из равенства $h^b = hf^2g^2z$, $z \in \mathbf{G}''$, получим $[h, g] = f^4g^4h^4$. Так как f, g, h порождают $\mathbf{G}'$, то $\mathbf{G}'' = \langle f^4g^4h^4\rangle$ – циклическая группа. Противоречие. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathbf{G}$ – группа, заданная образующими и определяющими соотношениями:

$\mathbf{G} = \langle a, b, c, f, g, h, \tau | a^2 = b^2 = c^2 = \tau^2 = 1, f = [a, b], g = [b, c], h = [c, a],$
$f^{2^n} = \tau, g^{2^m} = 1, f^4 g^4 h^4 = \tau = [f, g] = [g, h] = [h, f],$
$f^c = fg^2h^2, g^a = gh^2f^2, h^b = hf^2g^2, [\tau, a] = [\tau, b] = [\tau, c] = 1\rangle,$
где $n \geq m \geq 2$.

Легко проверить, что $\mathbf{G}/\mathbf{G}' \simeq V_8$, где V_8 – элементарная абелева группа порядка 8, $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^n} \times Z_{2^m} \times Z_4$, $|\mathbf{G}''| = 2, [G_3, G_2] = 1, fgh \in Z(\mathbf{G})$.

Докажем, что $\mathbf{G}$ – 2-группа Альперина. При этом будем использовать лемму 4 из [2]:

Лемма. Пусть $\langle x, y, T\rangle$ – конечная 2-группа, $T < H$, $\Phi(H) \leq T$ и для любых $h \in H, t, t_1, t_2 \in T$ коммутанты $\langle h, t\rangle'$ и $\langle xt_1, yt_2\rangle'$ цикличны. Тогда H – 2-группа Альперина.

Рассматриваемая группа $\mathbf{G}$ имеет 7 максимальных подгрупп:

$\langle a, b, \mathbf{G}'\rangle, \langle a, c, \mathbf{G}'\rangle, \langle b, c, \mathbf{G}'\rangle, \langle ab, c, \mathbf{G}'\rangle, \langle ac, b, \mathbf{G}'\rangle, \langle bc, a, \mathbf{G}'\rangle, \langle ab, ac, \mathbf{G}'\rangle$.

В силу леммы для доказательства теоремы достаточно доказать цикличность следующих коммутантов:

$1)\langle d, x\rangle', 2)\langle ax, by\rangle', 3)\langle ax, cy\rangle', 4)\langle bx, cy\rangle', 5)\langle abx, cy\rangle', 6)\langle acx, by\rangle',$

$7)\langle bcx, ay\rangle', 8)\langle abx, acy\rangle'$, где d – произвольный элемент из $\mathbf{G}$, x, y – произвольные элементы из $\mathbf{G}'$.

Первый случай разбивается на 8 вариантов: $(A)\langle x, y\rangle', (B)\langle xa, y\rangle', (C)\langle xb, y\rangle',$ $(D)\langle xc, y\rangle', (E)\langle xab, y\rangle', (F)\langle xac, y\rangle'$, $(G)\langle xbc, y\rangle', (H)\langle xabc, y\rangle'$.

В варианте (A) имеем $\langle x, y\rangle' \leq \langle\tau\rangle$, и, значит $\langle x, y\rangle'$ цикличен.

Рассмотрим вариант (B). Пусть $y = f^\alpha g^\beta h^\gamma$. Тогда $[y, xa, y] = 1$. Далее, $[y, xa] = [y, a]\ mod\langle\tau\rangle = [f^\alpha, a][g^\beta, a][h^\gamma, a]\ mod\langle\tau\rangle = f^{-2\alpha}(f^2h^2)^\beta h^{-2\gamma}\ mod\langle\tau\rangle$ $= f^{-2\alpha+2\beta}h^{2\beta-2\gamma}\ mod\langle\tau\rangle$, $[y, xa, xa] = [f^{-2\alpha+2\beta}h^{2\beta-2\gamma}, xa] = f^{-2(-2\alpha+2\beta)}\cdot$ $\cdot h^{-2(2\beta-2\gamma)} = [y, xa]^{-2}$, откуда следует, что $\langle y, xa\rangle'$ цикличен.

Рассмотрим вариант (C). Снова $[y, xb, y] = 1$, $[y, xb] = [y, b]\ mod\langle\tau\rangle = [f^\alpha, b]\cdot$ $\cdot[g^\beta, b][h^\gamma, b]\ mod\langle\tau\rangle = f^{-2\alpha}g^{-2\beta}(f^2g^2)^\gamma \mod \langle\tau\rangle = f^{2\gamma-2\alpha}g^{2\gamma-2\beta}\ mod\langle\tau\rangle$, $[y, xb, xb] = [f^{2\gamma-2\alpha}g^{2\gamma-2\beta}, xb] = [f^{2\gamma-2\alpha}g^{2\gamma-2\beta}, b] = f^{-2(2\gamma-2\alpha)}g^{-2(2\gamma-2\beta)} =$ $[y, xb]^{-2}$. Значит, $\langle xb, y\rangle'$ цикличен.

Аналогично доказывается цикличность $\langle xc, y\rangle'$. Рассмотрим теперь $\langle xab, y\rangle'$. Как и выше, $[y, xab, y] = 1$. Далее, $[y, xab] = [y, ab]\ mod\langle\tau\rangle = [y, b][y, a]^b\ mod\langle\tau\rangle =$ $[f^\alpha g^\beta h^\gamma, b][f^\alpha g^\beta h^\gamma, a]^b\ mod\langle\tau\rangle = f^{-2\alpha}g^{-2\beta}f^{2\gamma}g^{2\gamma}f^{2\alpha}(f^{2\beta}h^{2\beta})^b$ $(h^{-2\gamma})^b \mod \langle\tau\rangle = f^{2\gamma-2\alpha}g^{2\gamma-2\beta}f^{2\alpha}f^{-2\beta}h^{2\beta}f^{4\beta}g^{4\beta}\cdot$ $\cdot h^{-2\gamma}f^{-4\gamma}g^{-4\gamma}\ mod\langle\tau\rangle = f^{2\beta-2\gamma}g^{2\beta-2\gamma}h^{2\beta-2\gamma}\ mod\langle\tau\rangle$, и $[y, xab, xab] = 1$, т. к. $f^2g^2h^2 \in Z(\mathbf{G})$.

Значит, $\langle y, xab\rangle'$ цикличен.

Аналогично доказывается цикличность коммутантов $\langle xac, y\rangle'$ и $\langle xbc, y\rangle'$.

Рассмотрим теперь $\langle xabc, y\rangle'$. Как ивыше, $[y, xabc, y] = 1$. Далее, $[y, xabc] =$ $[f^\alpha g^\beta h^\gamma, abc] = [f^\alpha, c][g^\beta, a][h^\gamma, b]\ mod\langle\tau\rangle = g^{2\alpha}h^{2\alpha}f^{2\beta}h^{2\beta}f^{2\gamma}g^{2\gamma}\ mod\langle\tau\rangle =$ $f^{2\beta+2\gamma}$
$g^{2\gamma+2\alpha}h^{2\alpha+2\beta}\ mod\langle\tau\rangle$, $[y, xabc, xabc] = [f^{2\beta+2\gamma}, abc][g^{2\gamma+2\alpha}, abc][h^{2\alpha+2\beta}, abc] =$ $[f^{2\beta+2\gamma}, c][g^{2\gamma+2\alpha}, a][h^{2\alpha+2\beta}, b] = (h^2g^2)^{2\beta+2\gamma}(f^2h^2)^{2\gamma+2\alpha}(f^2g^2)^{2\alpha+2\beta} = f^{2(2\gamma+2\beta)}$ $g^{2(2\alpha+2\gamma)}h^{2(2\alpha+2\beta)}f^{8\alpha}g^{8\beta}h^{8\gamma} = f^{8\alpha}g^{8\alpha}h^{8\alpha}g^{-8\alpha}h^{-8\alpha}g^{4\alpha+4\gamma}f^{8\beta}g^{8\beta}h^{8\beta}f^{-8\beta}h^{-8\beta}$ $h^{4\alpha+4\beta}f^{8\gamma}g^{8\gamma}h^{8\gamma}f^{-8\gamma}g^{-8\gamma}f^{4\gamma+4\beta} = f^{-4\gamma-4\beta}g^{-4\gamma-4\alpha}h^{-4\beta-4\alpha} = [y, xabc]^{-2}$. Значит, $\langle y, xabc\rangle'$ тоже цикличен.

Таким образом, случай (1) коммутанта $\langle d, x\rangle'$, где $d \in \mathbf{G}$, $x \in \mathbf{G}'$, рассмотрен полностью. Все такие коммутанты цикличны.

Рассмотрим теперь $\langle ax, by\rangle'$, где $x = f^\alpha g^\beta h^\gamma$, $y = f^\mu g^\nu h^\varepsilon$. Тогда $[ax, by] = [a, bf^\mu g^\nu h^\varepsilon][f^\alpha g^\beta h^\gamma, b]\ mod\langle\tau\rangle = [a, f^\mu g^\nu h^\varepsilon] f [f^\alpha g^\beta h^\gamma, b]\ mod\langle\tau\rangle =$ $= [f^\mu g^\nu h^\varepsilon, a]^{-1} f [f^\alpha g^\beta h^\gamma, b]\ mod\langle\tau\rangle = f^{2\mu} h^{-2\nu} f^{-2\nu} h^{2\varepsilon} f^{1-2\alpha} g^{-2\beta} f^{2\gamma} g^{2\gamma}\ mod\langle\tau\rangle =$ $f^{1+2\mu+2\gamma-2\nu-2\alpha} g^{2\gamma-2\beta} h^{2\varepsilon-2\nu}\ \ mod\langle\tau\rangle$, и $[af^\alpha g^\beta h^\gamma, bf^\mu g^\nu h^\varepsilon, af^\alpha g^\beta h^\gamma] =$ $[f, f^\alpha g^\beta h^\gamma]$ $[f^{1+2\mu+2\gamma-2\nu-2\alpha} g^{2\gamma-2\beta} h^{2\varepsilon-2\nu}, a] = \tau^{\beta+\gamma} f^{-2(1+2\mu+2\gamma-2\nu-2\alpha)} f^{2(2\gamma-2\beta)} h^{2(2\gamma-2\beta)}$ $h^{-2(2\varepsilon-2\nu)}$.

С другой стороны, $[ax, by]^{-2} = f^{-2(1+2\mu+2\gamma-2\nu-2\alpha)} g^{-2(2\gamma-2\beta)} h^{-2(2\varepsilon-2\nu)}$. Приравняв, полученные выражения для $[ax, by, ax]$ и $[ax, by]^{-2}$, после сокращений получим: $\tau^{\beta+\gamma} f^{2(2\gamma-2\beta)} h^{2(2\gamma-2\beta)} = g^{-2(2\gamma-2\beta)}$, что равносильно $f^{4\gamma} g^{4\gamma} h^{4\gamma} f^{-4\beta}$ $g^{-4\beta} h^{-4\beta} = \tau^{\beta+\gamma}$, а это истинное равенство. Значит, $[ax, by, ax] = [ax, by]^{-2}$.

Аналогично доказывается, что $[ax, by, by] = [ax, by]^{-2}$. Таким образом, $\langle ax, by\rangle'$ цикличен.

Рассмотрим теперь $\langle abx, cy\rangle'$, $x = f^\alpha g^\beta h^\gamma$, $y = f^\mu g^\nu h^\varepsilon$. Тогда $[abx, cy] =$ $[ab, cy][x, c]\ mod\langle\tau\rangle = [ab, y][ab, c][x, c]\ mod\langle\tau\rangle = [y, ab]^{-1}(h^{-1})^b g[x, c]\ mod\langle\tau\rangle =$ $[f^\mu g^\nu h^\varepsilon, ab]^{-1} h^{-1} f^{-2} g^{-2} g [f^\alpha g^\beta h^\gamma, c]\ mod\langle\tau\rangle = (g^{-2\nu}(f^{2\nu} h^{2\nu})^b f^{2\varepsilon} g^{2\varepsilon} (h^{-2\varepsilon})^b)^{-1}$ $h^{-1} f^{-2} g^{-1} g^{2\alpha} h^{2\alpha} g^{-2\beta} h^{-2\gamma} mod\langle\tau\rangle = g^{2\nu} f^{2\nu} h^{-2\nu} f^{-4\nu} g^{-4\nu} f^{-2\varepsilon} g^{-2\varepsilon} h^{2\varepsilon} f^{4\varepsilon} g^{4\varepsilon} h^{-1}$ $f^{-2} g^{-1} g^{2\alpha-2\beta} h^{2\alpha-2\gamma}\ mod\langle\tau\rangle = f^{2\varepsilon-2\nu} g^{2\varepsilon-2\nu} g^{2\alpha-2\beta} h^{2\varepsilon-2\nu} h^{2\alpha-2\gamma} h^{-1} f^{-2} g^{-1}$ $mod\langle\tau\rangle$, и $[abx, cy, cy] = [g^{2\alpha-2\beta}, c][h^{2\alpha-2\gamma}, c][h^{-1}, cy][f^{-2}, cy][g^{-1}, cy] =$ $g^{-2(2\alpha-2\beta)}$ $h^{-2(2\alpha-2\gamma)}[h^{-1}, y] h^2 [f^{-2}, y][f^{-2}, c][g^{-1}, y] g^2 = g^{2(2\beta-2\alpha)} h^{2(2\gamma-2\alpha)} [h^{-1}, f^\mu g^\nu h^\varepsilon] h^2$ $g^{-4} h^{-4} [g^{-1}, f^\mu g^\nu h^\varepsilon] g^2 = g^{-2} h^{-2} g^{2(2\beta-2\alpha)} h^{2(2\gamma-2\alpha)} \tau^{\mu+\nu} \tau^{\mu+\varepsilon} = g^{-2} h^{-2} g^{2(2\beta-2\alpha)}$ $h^{2(2\gamma-2\alpha)} \tau^{\nu+\varepsilon}$.

С другой стороны, $[abx, cy]^{-2} = f^{-2(2\varepsilon-2\nu)} g^{-2(2\varepsilon-2\nu)} g^{-2(2\alpha-2\beta)} h^{-2(2\varepsilon-2\nu)} h^{-2(2\alpha-2\gamma)} h^2 g^2 f^4 \tau$.

Приравняв полученные выражения для $[abx, cy, cy]$ и $[abc, cy]^{-2}$ и сделав очевидные сокращения, получим: $g^{-2} h^{-2} \tau^{\nu+\varepsilon} = f^{-2(2\varepsilon-2\nu)} g^{-2(2\varepsilon-2\nu)} h^{-2(2\varepsilon-2\nu)} h^2 g^2 f^4 \tau$, что равносильно $f^4 g^4 h^4 f^{-4\varepsilon} g^{-4\varepsilon} h^{-4\varepsilon} f^{4\nu} g^{4\nu} h^{4\nu} = \tau\tau^{\nu+\varepsilon}$, а это истинное равенство, так как $f^4 g^4 h^4 = \tau$.

Таким образом, $[abx, cy, cy] = [abx, cy]^{-2}$.

Далее, $[abx, cy, abx] = [f^{2\varepsilon-2\nu} g^{2\varepsilon-2\nu} h^{2\varepsilon-2\nu} g^{2\alpha-2\beta} h^{2\alpha-2\gamma} h^{-1} f^{-2} g^{-1}, abx] =$ $[g^{2\alpha-2\beta} h^{2\alpha-2\gamma}\ h^{-1} f^{-2} g^{-1}, abx] = [g^{2\alpha-2\beta} h^{2\alpha-2\gamma}, ab][h^{-1}, x][h^{-1}, ab][g^{-1}, x]$, $[g^{-1}, ab] = g^{-2(2\alpha-2\beta)} (f^{2(2\alpha-2\beta)} h^{2(2\alpha-2\beta)})^b\ f^{2(2\alpha-2\gamma)} g^{2(2\alpha-2\gamma)} (h^{-2(2\alpha-2\gamma)})^b \tau^{\alpha+\beta}$ $f^{-2} g^{-2} (h^2)^b \tau^{\alpha+\gamma} g^2 (f^{-2} h^{-2})^b = \tau^{\beta+\gamma} g^{4\beta-4\gamma} f^{4\beta-4\gamma} (h^{4\gamma-4\beta})^b =$ $\tau^{\beta+\gamma} g^{4\beta-4\gamma} f^{4\beta-4\gamma} h^{4\gamma-4\beta} f^{8\gamma-8\beta} g^{8\gamma-8\beta} = \tau^{\beta+\gamma} h^{4\gamma-4\beta} f^{4\gamma-4\beta} g^{4\gamma-4\beta} = 1$ (снова используется равенство $f^4 g^4 h^4 = \tau$).

Таким образом, $[abx, cy, abx] = 1$, и, стало быть $\langle abx, cy\rangle'$ цикличен.

Аналогично доказывается цикличность коммутантов $\langle acx, by\rangle'$ и $\langle bcx, ay\rangle'$.

Осталось доказать цикличность коммутанта $\langle abx, acy\rangle'$. Как и выше,

$x = f^\alpha g^\beta h^\gamma$, $y = f^\mu g^\nu h^\varepsilon$.

Тогда $[abx, acy] = [ab, acy]^x [x, acy] = [ab, y][ab, ac]^y [x, ac] mod\langle\tau\rangle =$

$= [y, ab]^{-1} [a, ac]^b [b, ac][x, ac] mod\langle\tau\rangle =$

$= [g^\nu h^\varepsilon, ab]^{-1} (h^{-1})^b g (f^{-1})^c [f^\alpha g^\beta, ac] mod\langle\tau\rangle =$

$= g^{2\nu} (f^{-2\nu} h^{-2\nu})^b f^{-2\varepsilon} g^{-2\varepsilon} (h^{2\varepsilon})^b$.

$\cdot h^{-1}f^{-2}g^{-2}gf^{-1}g^{-2}h^{-2}g^{2\alpha}h^{2\alpha}(f^{-2\alpha})^c g^{-2\beta}(f^{2\beta}h^{2\beta})^c mod\langle\tau\rangle =$
$= g^{2\nu}f^{2\nu}h^{-2\nu}f^{-4\nu}g^{-4\nu}h^{-3}g^{-3}f^{-3}f^{-2\varepsilon}g^{-2\varepsilon}h^{2\varepsilon}f^{4\varepsilon}g^{4\varepsilon}\cdot$
$\cdot g^{2\alpha}h^{2\alpha}f^{-2\alpha}g^{-4\alpha}h^{-4\alpha}g^{-2\beta}f^{2\beta}g^{4\beta}h^{4\beta}h^{-2\beta}mod\langle\tau\rangle =$
$= f^{-2\nu}g^{-2\nu}h^{-2\nu}f^{2\varepsilon}g^{2\varepsilon}h^{2\varepsilon}fghf^{-2\alpha}g^{-2\alpha}h^{-2\alpha}f^{2\beta}g^{2\beta}h^{2\beta}mod\langle\tau\rangle.$

Так как $fgh \in Z(\mathbf{G})$, то $[abx, acy, abx] = [abx, acy, acy] = 1$, и, значит, $\langle abx, acy\rangle'$ цикличен.

Таким образом, $\mathbf{G}$ – 2-группа Альперина, и основная часть теоремы доказана.

Допустим теперь, что H– 2-группа Альперина, $H'' = \langle\tau\rangle, \tau^2 = \sigma, |\sigma| = 2$ и $H/\langle\sigma\rangle$ изоморфна одной из построенных выше неметабелевых групп. Тогда найдутся такие инволюции a, b из H, что $[a,b]^{2^n} = \tau^\alpha, \alpha$ нечетно. Далее, $\tau^a = \tau^{-1}$, так как $[a,b]^a = [a,b]^{-1}$, и $\tau \in Z(\mathbf{G})$ по (2.11). Получили противоречие.

Теорема 2 доказана полностью.

5. Доказательство теоремы 3

Пусть группа $\mathbf{G}$ задана образующими и определяющими соотношениями:

$\mathbf{G} =< \tau, f, g, h, a, b, c \mid \tau^4 = 1,\ f^{2^m} = 1,\ g^{2^n} = 1,\ f^4g^4h^4 = \tau,$
$[f,g] = [g,h] = [h,f] = \tau^{-1},\ f = [a,b],\ g = [b,c],\ h = [c,a],$
$a^2 = b^2 = c^2 = 1,\ f^c = fg^2h^2,\ g^a = gh^2f^2,\ h^b = hf^2g^2,$
$[\tau, a] = [\tau, b] = [\tau, c] = 1 >.$

Заметим, что поскольку a, b, c – инволюции, $f^a = f^{-1}$, $f^b = f^{-1}$, $g^b = g^{-1}$, $g^c = g^{-1}$, $h^a = h^{-1}$, $h^c = h^{-1}$. Введем обозначение $\sigma = \tau^2$.

Нетрудно убедиться, что $\mathbf{G}$ – 2-группа, в которой

$\mathbf{G}'/\mathbf{G}'' \simeq Z_{2^m} \times Z_{2^n} \times Z_4$, $\mathbf{G}'' \simeq Z_4$, $[\mathbf{G}', \mathbf{G}] \le (\mathbf{G}')^2$, причем условие $m \ge n \ge 3$ оказывается существенным, так как, если $|g| \le 4$, то в силу определяющих соотношений $(gh^2f^2)^4 = g^4h^8f^8 = g^{-4}\sigma \ne 1$, т. е. имеем противоречие.

Теперь надо проверить, что $\mathbf{G}$ – группа Альперина.

Группа $\mathbf{G}$ имеет 7 максимальных подгрупп: $< a, b, \mathbf{G}' >$, $< b, c, \mathbf{G}' >$, $< c, a, \mathbf{G}' >$, $< ab, c, \mathbf{G}' >$, $< bc, a, \mathbf{G}' >$, $< ca, b, \mathbf{G}' >$, $< ab, ac, \mathbf{G}' >$. В силу симметрии определяющих соотношений группы $\mathbf{G}$ нам достаточно доказать, что $< a, b, \mathbf{G}' >$, $< ab, c, \mathbf{G}' >$ и $< ab, ac, \mathbf{G}' >$ – группы Альперина. В соответствии с леммой из параграфа 4 для этого достаточно доказать цикличность коммутантов следующих подгрупп:

1) $< d, x >$, 2) $< ax, by >$, 3) $< abx, cy >$, 4) $< abx, acy >$, где $d \in \mathbf{G}$, $x, y \in \mathbf{G}'$.

Первый случай содержит 7 вариантов:

$< ax, y >$, $< bx, y >$, $< cx, y >$, $< abx, y >$, $< bcx, y >$, $< cax, y >$, $< abcx, y >$. Опять же, ввиду симметрии достаточно доказать цикличность $< ax, y >'$, $< abx, y >'$, $< abcx, y >'$. Итак, принадлежность группы $\mathbf{G}$ классу групп Альперина сводится к доказательству следующей леммы:

Лемма. Коммутанты $< ax, y >'$, $< abx, y >'$, $< abcx, y >'$, $< ax, by >'$, $< abx, cy >'$, $< abx, acy >'$, цикличны $\forall x, y \in \mathbf{G}'$.

Доказательство леммы состоит в выполнении однотипных вычислений, в которых используется следующее легко проверяемое замечание:

Замечание. Имеем $(fg)^2 = f^2g^2[g,f]$, $(fg)^4 = f^4g^4\sigma$, $[f^2, g^2] = 1$, $[f^2, g] = \sigma$, и аналогичные соотношения верны для пар коммутаторов (g,h) и (h,f). Кроме того $f^{2\omega}g^{2\omega}h^{2\omega} \in Z(\mathbf{G})$ для любого целого ω.

Докажем, что $< ax, y >'$ цикличен. Пусть $x = f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}$, $y = f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}$.

Тогда $[ax, y] = [af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] =$

$= [a, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}][f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\ mod\ \langle\sigma\rangle =$
$= [a, h^{\gamma_2}][a, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}]^{h^{\gamma_2}}\tau^{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2}\ mod\ \langle\sigma\rangle =$
$= a^{-1}h^{-\gamma_2}ah^{\gamma_2}[a, g^{\beta_2}]^{h^{\gamma_2}}[a, f^{\alpha_2}]^{g^{\beta_2}h^{\gamma_2}}\tau^{-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}\ mod\ \langle\sigma\rangle$
$= h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\alpha_2-2\beta_2}\tau^{-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}\ mod\ \langle\sigma\rangle$, и
$[af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\alpha_2-2\beta_2}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] =$
$= \sigma^{-\alpha_2(\gamma_2-\beta_2)+\beta_2(\gamma_2-\beta_2)-(\alpha_2-\beta_2)\beta_2+(\alpha_2-\beta_2)\gamma_2} = 1$, а также
$[af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, af^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\alpha_2-2\beta_2}, af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}] =$
$= [h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\alpha_2-2\beta_2}, f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}][h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\alpha_2-2\beta_2}, a] =$
$= \sigma^{-(\gamma_2-\beta_2)\alpha_1+\beta_1(\gamma_2-\beta_2)+(\alpha_2-\beta_2)\gamma_1-\beta_1(\alpha_2-\beta_2)}.$
$h^{-2(2\gamma_2-2\beta_2)}f^{-2(2\alpha_2-2\beta_2)} = (af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2})^{-2}$

Так что доказано, что $< ax, y >'$ цикличен $\forall x, y \in \mathbf{G}'$.

Рассмотрим $\langle abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}\rangle$. Тогда
$[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [ab, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}][f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\ mod\ \langle\sigma\rangle =$
$[a, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^b[b, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\tau^{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2}\ mod\ \langle\sigma\rangle =$
$(h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\alpha_2-2\beta_2})^b f^{2\alpha_2-2\gamma_2}g^{2\beta_2-2\gamma_2}\tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2}\ mod\ \langle\sigma\rangle =$
$h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2(2\gamma_2-2\beta_2)}g^{2(2\gamma_2-2\beta_2)}f^{-2\alpha_2+2\beta_2}f^{2\alpha_2-2\gamma_2}\cdot$
$\cdot g^{2\beta_2-2\gamma_2}\tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2}\ mod\ \langle\sigma\rangle =$
$h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\gamma_2-2\beta_2}g^{2\gamma_2-2\beta_2}\tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2}\ mod\ \langle\sigma\rangle.$

С учетом того, что $f^{2\omega}g^{2\omega}h^{2\omega} \in Z(\mathbf{G})$ для любого целого ω, получим, что $[ab, f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] \in Z(\mathbf{G})$, а значит $\langle abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}\rangle'$ цикличен.

Рассмотрим $\langle abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}\rangle$. Тогда
$[abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}c[c, f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}], f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\ mod\ \langle\sigma\rangle =$
$[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{c[c,f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]}[c, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\ mod\ \langle\sigma\rangle =$
$h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\gamma_2-2\beta_2}g^{2\gamma_2-2\beta_2}\tau^{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2}g^{2\beta_2-2\alpha_2}h^{2\gamma_2-2\alpha_2}mod\langle\sigma\rangle =$
$h^{4\gamma_2-2\alpha_2-2\beta_2}f^{2\gamma_2-2\beta_2}g^{2\gamma_2-2\alpha_2}\tau^{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2}\ mod\ \langle\sigma\rangle$, и
$[abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [g^{2\beta_2-2\alpha_2}h^{2\gamma_2-2\alpha_2}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] =$
$\tau^{(2\beta_2-2\alpha_2)\gamma_2+(2\beta_2-2\alpha_2)\alpha_2}\tau^{(2\gamma_2-2\alpha_2)\alpha_2+(2\gamma_2-2\alpha_2)\beta_2} = 1$. Далее,
$[abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}] = [g^{2\beta_2-2\alpha_2}h^{2\gamma_2-2\alpha_2}, abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]$
$= [g^{2\beta_2-2\alpha_2}h^{2\gamma_2-2\alpha_2}, f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}][g^{2\beta_2-2\alpha_2}h^{2\gamma_2-2\alpha_2}, abc]$
$= \tau^{(2\beta_2-2\alpha_2)\alpha_1+(2\beta_2-2\alpha_2)\gamma_1+(2\gamma_2-2\alpha_2)\alpha_1+(2\gamma_2-2\alpha_2)\beta_1}[g^{2\beta_2-2\alpha_2}, abc][h^{2\gamma_2-2\alpha_2}, abc]$
$= \tau^{2\beta_2\alpha_1+2\beta_2\gamma_1-2\alpha_2\gamma_1+2\gamma_2\alpha_1+2\gamma_2\beta_1-2\alpha_2\beta_1}[g^{2\beta_2-2\alpha_2}, a]^{bc}[h^{2\gamma_2-2\alpha_2}, acb[b, c]]$
$= \tau^{2\beta_2\alpha_1+2\beta_2\gamma_1-2\alpha_2\gamma_1+2\gamma_2\alpha_1+2\gamma_2\beta_1-2\alpha_2\beta_1}((f^2h^2)^{2\beta_2-2\alpha_2})^{bc}[h^{2\gamma_2-2\alpha_2}, b[b, c]]$
$= (f^{4\beta_2-4\alpha_2}h^{4\beta_2-4\alpha_2})^{bc}\sigma^{2\gamma_2-2\alpha_2}f^{4\gamma_2-4\alpha_2}g^{4\gamma_2-4\alpha_2}\tau^{2\beta_2\alpha_1+2\beta_2\gamma_1-2\alpha_2\gamma_1+2\gamma_2\alpha_1+2\gamma_2\beta_1-2\alpha_2\beta_1}$
$= (f^{-(4\beta_2-4\alpha_2)})^c(h^{4\beta_2-4\alpha_2}f^{8\beta_2-8\alpha_2}g^{8\beta_2-8\alpha_2})^c\sigma^{2\gamma_2-2\alpha_2}f^{4\gamma_2-4\alpha_2}g^{4\gamma_2-4\alpha_2}\cdot$
$\cdot\tau^{2\beta_2\alpha_1+2\beta_2\gamma_1-2\alpha_2\gamma_1+2\gamma_2\alpha_1+2\gamma_2\beta_1-2\alpha_2\beta_1}$
$= h^{-4\beta_2+4\alpha_2}g^{-8\beta_2+8\alpha_2}f^{4\beta_2-4\alpha_2}g^{8\beta_2-8\alpha_2}h^{8\beta_2-8\alpha_2}\sigma^{2\gamma_2-2\alpha_2}f^{4\gamma_2-4\alpha_2}g^{4\gamma_2-4\alpha_2}\cdot$
$\cdot\tau^{2\beta_2\alpha_1+2\beta_2\gamma_1-2\alpha_2\gamma_1+2\gamma_2\alpha_1+2\gamma_2\beta_1-2\alpha_2\beta_1}$
$= f^{4\beta_2+4\gamma_2-8\alpha_2}g^{4\gamma_2-4\alpha_2}h^{4\beta_2-4\alpha_2}\sigma^{2\gamma_2-2\alpha_2}\cdot$
$\cdot\tau^{2\beta_2\alpha_1+2\beta_2\gamma_1-2\alpha_2\gamma_1+2\gamma_2\alpha_1+2\gamma_2\beta_1-2\alpha_2\beta_1}.\qquad (*)$

С другой стороны, $[abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{-2} =$
$= h^{-8\gamma_2+4\alpha_2+4\beta_2}f^{-4\gamma_2+4\beta_2}g^{-4\gamma_2+4\alpha_2}\sigma^{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2+\beta_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2}.$

Приравняв последнее выражение выражению $(*)$, получаем, после сокращений:

$h^{8\gamma_2-4\alpha_2}f^{8\gamma_2-8\alpha_2}g^{8\gamma_2-8\alpha_2}\sigma^{2\gamma_2-2\alpha_2}=1$, а это верное утверждение. Значит $[abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}] = [abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{-2}$, и $\langle abcf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}\rangle'$ цикличен.

Рассмотрим $< ax, by >$, где $x, y \in \mathbf{G}'$. Предварительно посчитаем коммутаторы $[a, f^xg^yh^z]$, $[b, f^xg^yh^z]$, $[c, f^xg^yh^z]$, $x, y, z \in Z$. Получим:

$[a, f^xg^yh^z] = [a, f^xh^zg^y] = [a, g^y]$.

$[a, f^xh^z]^{g^y} = a^{-1}g^{-y}ag^y[a, h^z]^{g^y}[a, f^x]^{h^zg^y} = (gf^2h^2)^{-y}g^y(h^{2z}(f^{2x})^{h^z})^{g^y} =$
$= f^{-2y}h^{-2y}h^{2z}\sigma^{zy}(f^{2x}\sigma^{xz})^{g^y} = f^{2x-2y}h^{2z-2y}\sigma^{xy+yz+zx}$.

Аналогично

$[b, f^xg^yh^z] = f^{2x-2z}g^{2y-2z}\sigma^{xy+yz+zx}$,

$[c, f^xg^yh^z] = g^{2y-2x}h^{2z-2x}\sigma^{xy+yz+zx}$.

Кроме того,

$(fg^{2x}h^{2y})^2 = f^2(g^{2x}h^{2y})^2[g^{2x}h^{2y}, f] = f^2g^{4x}h^{4y}\sigma^{x+y} = f^2g^{4x}h^{4y}\sigma^{x-y}$. Далее,

$[af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [a, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}}\cdot$
$\cdot[f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [a, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}}[a, b]^{f^{\alpha_1+\alpha_2}g^{\beta_1+\beta_2}h^{\gamma_1+\gamma_2}}\cdot$
$[f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}][f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, b] \ \ mod\ \langle\sigma\rangle$

$$= f^{2\alpha_2-2\beta_2}h^{2\gamma_2-2\beta_2}f[f, g^{\beta_1+\beta_2}h^{\gamma_1+\gamma_2}]\tau^{-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}f^{2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\gamma_1-2\beta_1}$$
$mod\ \langle\sigma\rangle$

$$= ff^{2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\gamma_1-2\beta_1}h^{2\gamma_2-2\beta_2}\tau^{-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}\tau^{-(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)}$$
$mod\ \langle\sigma\rangle$, и $[af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] =$
$= [f, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}][f^{2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\gamma_1-2\beta_1}h^{2\gamma_2-2\beta_2}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] =$
$= [f, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}](f^{-2})^{f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}}[f^{2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\gamma_1-2\beta_1}h^{2\gamma_2-2\beta_2}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\cdot$
$\cdot[f^{2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\gamma_1-2\beta_1}h^{2\gamma_2-2\beta_2}, b]^{f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}} =$
$= \tau^{-\beta_2+\gamma_2}\sigma^{\beta_2-\gamma_2}f^{-2}[f^{2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1}, g^{\beta_2}h^{\gamma_2}][g^{2\gamma_1-2\beta_1}, f^{\alpha_2}h^{\gamma_2}][h^{2\gamma_2-2\beta_2}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}]\cdot$
$\cdot f^{-2(2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1)+2(2\gamma_2-2\beta_2)}g^{-2(2\gamma_1-2\beta_1)+2(2\gamma_2-2\beta_2)} =$
$\tau^{-\beta_2+\gamma_2}\tau^{2\beta_2-2\gamma_2}f^{-2}\tau^{-\beta_2(2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1)+\gamma_2(2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1)}\tau\cdot$
$\cdot\tau^{-\gamma_2(2\gamma_1-2\beta_1)+\alpha_2(2\gamma_1-2\beta_1)}\tau^{\beta_2(2\gamma_2-2\beta_2)-\alpha_2(2\gamma_2-2\beta_2)}f^{4\gamma_2-4\alpha_2-4\gamma_1+4\alpha_1}g^{4\gamma_2-4\beta_2+4\beta_1-4\gamma_1}$.

С другой стороны, $[af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{-2} =$
$= f^{-2}f^{-2(2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_1-2\alpha_1)}g^{-2(2\gamma_1-2\beta_1)}h^{-2(2\gamma_2-2\beta_2)}\sigma^{-(\gamma_1-\beta_1)+(\gamma_2-\beta_2)}\sigma^{-\beta_1-\beta_2+\gamma_1+\gamma_2}\cdot$
$\cdot\sigma^{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2} =$
$= f^{-2}f^{-4\alpha_2+4\beta_2-4\gamma_1+4\alpha_1}g^{-2(2\gamma_1-2\beta_1)}h^{-2(2\gamma_2-2\beta_2)}\sigma^{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2}$.

Приравняем полученные выражения для $[af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]$ и $[af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{-2}$ и докажем, что полученное равенство верно.
$f^{-2}\tau^{\beta_2-\gamma_2}\tau^{-2\gamma_1\beta_2+2\alpha_1\beta_2-2\alpha_1\gamma_2+2\gamma_2\beta_1+2\gamma_1\alpha_2-2\alpha_2\beta_1}f^{4\gamma_2-4\alpha_2-4\gamma_1+4\alpha_1}g^{4\gamma_2-4\beta_2+4\beta_1-4\gamma_1}$
$= f^{-2}f^{-4\alpha_2+4\beta_2-4\gamma_1+4\alpha_1}g^{-2(2\gamma_1-2\beta_1)}h^{-2(2\gamma_2-2\beta_2)}\sigma^{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2}$.
После сокращений и переноса в одну часть получим $f^{4\gamma_2-4\beta_2}g^{4\gamma_2-4\beta_2}h^{4\gamma_2-4\beta_2}\tau^{\beta_2-\gamma_2} = 1$. Поскольку $f^4g^4h^4 = \tau$, то полученное равенство верно.

Аналогично

$[af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}] = [af^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, bf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{-2}$.
Значит, $< ax, by >'$ цикличен $\forall x, y \in \mathbf{G}'$.

Далее, $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [ab, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}}\cdot$
$\cdot[f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\cdot [f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, c]\ mod\,\langle\sigma\rangle = [ab, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\cdot$
$\cdot[ab, c]^{f^{\alpha_1+\alpha_2}g^{\beta_1+\beta_2}h^{\gamma_1+\gamma_2}} \cdot \tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2}\ mod\,\langle\sigma\rangle =$
$[a, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^b[b, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]((h^{-1})^b g)^{f^{\alpha_1+\alpha_2}g^{\beta_1+\beta_2}h^{\gamma_1+\gamma_2}}\cdot$
$\cdot\tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2} \cdot g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}\ mod\,\langle\sigma\rangle =$
$= (f^{2\alpha_2-2\beta_2}h^{2\gamma_2-2\beta_2})^b \cdot f^{2\alpha_2-2\gamma_2}g^{2\beta_2-2\gamma_2}(g^{-2}f^{-2}h^{-1}g)^{f^{\alpha_1+\alpha_2}g^{\beta_1+\beta_2}h^{\gamma_1+\gamma_2}}\cdot$
$\cdot\tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2}g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}\ mod\,\langle\sigma\rangle =$
$= f^{-2\alpha_2+2\beta_2}h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2(2\gamma_2-2\beta_2)}g^{2(2\gamma_2-2\beta_2)} \cdot f^{2\alpha_2-2\gamma_2}g^{2\beta_2-2\gamma_2}\cdot$
$\cdot(f^{-2}h^{-1}g^{-1})^{f^{\alpha_1+\alpha_2}g^{\beta_1+\beta_2}h^{\gamma_1+\gamma_2}} \cdot \tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2}\cdot$
$\cdot g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}\ mod\,\langle\sigma\rangle = f^{2(\gamma_2-\beta_2)}h^{2\gamma_2-2\beta_2}g^{2\gamma_2-2\beta_2}\cdot$
$\cdot f^{-2}h^{-1}\tau^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2} \cdot \tau^{-\alpha_1-\alpha_2+\gamma_1+\gamma_2} \cdot g^{-1} \cdot g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}\cdot$
$\cdot\tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2}\ mod\,\langle\sigma\rangle = f^{2(\gamma_2-\beta_2)}g^{2(\gamma_2-\beta_2)}h^{2(\gamma_2-\beta_2)}\cdot$
$\cdot f^{-2}g^{-1}h^{-1} \cdot \tau^{\gamma_1+\gamma_2-\beta_1-\beta_2} \cdot g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}\cdot$
$\cdot\tau^{-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2}\ mod\,\langle\sigma\rangle$, и
$[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] =$
$= [f^{-2}h^{-1}g^{-1} \cdot g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] =$
$= [f^{-2}h^{-1}g^{-1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}}\cdot [g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] =$
$= [f^{-2}h^{-1}g^{-1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}][f^{-2}h^{-1}g^{-1}, c]^{f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}}\cdot$
$\cdot[g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}, f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}][g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}, c] =$
$= \tau^{2\beta_2-2\gamma_2+\alpha_2-\beta_2-\alpha_2+\gamma_2} \cdot (g^{-2}h^{-2}\sigma)^{f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}}\cdot$
$\cdot\tau^{\alpha_2(2\alpha_1-2\beta_1)-\gamma_2(2\alpha_1-2\beta_1)-\alpha_2(2\alpha_1-2\gamma_1)+\beta_2(2\alpha_1-2\gamma_1)}g^{-2(2\alpha_1-2\beta_1)}h^{-2(2\alpha_1-2\gamma_1)} =$
$= \tau^{\beta_2-\gamma_2}g^{-2}\tau^{-2\alpha_2+2\gamma_2}h^{-2}\tau^{2\alpha_2-2\beta_2}\sigma \cdot \tau^{-2\beta_1\alpha_2-2\alpha_1\gamma_2+2\beta_1\gamma_2+2\gamma_1\alpha_2+2\alpha_1\beta_2-2\gamma_1\beta_2}\cdot$
$\cdot g^{-2(2\alpha_1-2\beta_1)}h^{-2(2\alpha_1-2\gamma_1)}$
(учитывалось, что $[f^{-2}h^{-1}g^{-1}, c] = [f^{-2}, c][h^{-1}g^{-1}, c] = g^{-4}h^{-4}\cdot$
$\cdot gh \cdot (h^{-1}g^{-1})^c = g^{-4}h^{-4}ghhg = g^{-4}h^{-4}gh^2g = g^{-2}h^{-2}\sigma$).

С другой стороны, $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{-2} =$
$= (\tau^{-(-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2)}h^{2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\beta_1-2\alpha_1}\tau^{\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2}ghf^2\cdot$
$\cdot h^{2(\beta_2-\gamma_2)}g^{2(\beta_2-\gamma_2)}f^{2(\beta_2-\gamma_2)})^2 = \tau^{-2(-\beta_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2-\gamma_1\beta_2)}\cdot$
$\cdot h^{4(\beta_2-\gamma_2)}g^{4(\beta_2-\gamma_2)}f^{4(\beta_2-\gamma_2)}\tau^{2(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)} \cdot (h^{2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\beta_1-2\alpha_1}ghf^2)^2 =$
$= \tau^{-2(\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2)}h^{4(\beta_2-\gamma_2)}g^{4(\beta_2-\gamma_2)}f^{4(\beta_2-\gamma_2)}\cdot$
$\cdot\tau^{2(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)}h^{4\gamma_1-4\alpha_1}g^{4\beta_1-4\alpha_1}g^2h^2\tau f^4\tau^{2\beta_1-2\gamma_1} =$
$= \tau^{-2(\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\gamma_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2)}h^{4(\beta_2-\gamma_2)}g^{4(\beta_2-\gamma_2)}f^{4(\beta_2-\gamma_2)}\cdot$
$\tau^{2(\beta_2-\gamma_2)}h^{4\gamma_1-4\alpha_1}g^{4\beta_1-4\alpha_1}g^2h^2\tau f^4$
(учитывалось, что $(h^{2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\beta_1-2\alpha_1}ghf^2)^2 =$
$= h^{4\gamma_1-4\alpha_1}g^{4\beta_1-4\alpha_1}(ghf^2)^2[ghf^2, h^{2\gamma_1-2\alpha_1}g^{2\beta_1-2\alpha_1}] =$
$= h^{4\gamma_1-4\alpha_1}g^{4\beta_1-4\alpha_1}(gh)^2f^4[f^2, gh]\tau^{-(2\gamma_1-2\alpha_1)}\tau^{2\beta_1-2\alpha_1} =$
$= h^{4\gamma_1-4\alpha_1}g^{4\beta_1-4\alpha_1}g^2h^2\tau f^4\tau^{-(2\gamma_1-2\alpha_1)}\tau^{2\beta_1-2\alpha_1} =$
$= h^{4\gamma_1-4\alpha_1}g^{4\beta_1-4\alpha_1}g^2h^2\tau f^4\tau^{2\beta_1-2\gamma_1}$).
Приравняем это выражение к выражению
$\sigma\tau^{-\beta_2+\gamma_2}g^{-2}h^{-2}\tau^{-2(\beta_1\alpha_2+\alpha_1\gamma_2-\beta_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2+\gamma_1\beta_2)}g^{-4\alpha_1+4\beta_1}h^{-4\alpha_1+4\gamma_1}$,
равному $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]$.
После очевидных сокращений получим
$f^4g^4h^4 = \sigma\tau^{-1} = \tau$ - верное равенство.
Значит, $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}] = [abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}, cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{-2}$.
Теперь отдельно посчитаем $[ab, c, ab]$.
Сначала $[ab, c] = h^{-1}g^{-1}f^{-2}\ mod\,\langle\sigma\rangle$, как показано выше.

Тогда $[ab,c,ab]=[h^{-1}g^{-1}f^{-2},ab]=[f^{-1}g^{-1},ab][f^{-2},ab]=$
$=[h^{-1},ab]^{g^{-1}}[g^{-1},ab]=(g^{-2}f^{-2}(h^2)^b)^{g-1}g^2(f^{-2}h^{-2})^b=$
$=(g^{-2}f^{-2}h^2f^4g^4)^{g^{-1}}\cdot g^2f^2g^{-4}f^{-4}h^{-2}=(h^2f^2g^2)g^{-2}f^{-2}h^{-2}=1.$

Посчитаем отдельно $[g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1},ab]$. Получим:
$[g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1},ab]=[g^{2\alpha_1-2\beta_1},ab][h^{2\alpha_1-2\gamma_1},ab]=$
$=g^{-2(2\alpha_1-2\beta_1)}(f^{2(2\alpha_1-2\beta_1)}h^{2(2\alpha_1-2\beta_1})^b\cdot f^{2(2\alpha_1-2\gamma_1)}g^{2(2\alpha_1-2\gamma_1)}(h^{-2(2\alpha_1-2\gamma_1)})^b=$
$=g^{4\beta_1-4\gamma_1}f^{4\beta_1-4\gamma_1}(h^{4\gamma_1-4\beta_1})^b=g^{4\beta_1-4\gamma_1}f^{4\beta_1-4\gamma_1}h^{4\gamma_1-4\beta_1}f^{2(4\gamma_1-4\beta_1)}g^{2(4\gamma_1-4\beta_1)}=$
$=h^{4\gamma_1-4\beta_1}g^{4\gamma_1-4\beta_1}f^{4\gamma_1-4\beta_1}=\tau^{\gamma_1-\beta_1}.$

Теперь
$[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2},abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]=[f^{-2}h^{-1}g^{-1}g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1},f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]\cdot$
$\cdot[f^{-2}h^{-1}g^{-1}g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1},ab]^{f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}}=$
$=\tau^{2\beta_1-2\gamma_1}\tau^{-\beta_1+\alpha_1}\tau^{-\alpha_1+\gamma_1}\cdot\tau^{\alpha_1(2\alpha_1-2\beta_1)-\gamma_1(2\alpha_1-2\beta_1)}\cdot\tau^{-\alpha_1(2\alpha_1-2\gamma_1)+\beta_1(2\alpha_1-2\gamma_1)}\cdot$
$\cdot[f^{-2}h^{-1}g^{-1},ab]^{g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1}}\cdot[g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\gamma_1},ab]^{f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}}=$
$=\tau^{\beta_1-\gamma_1}\cdot 1\cdot\tau^{\gamma_1-\beta_1}=1.$

Значит, $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2},abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]=1$, и,
$\langle abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},cf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}\rangle'$ цикличен.

Докажем теперь цикличность коммутанта $< abx,acy >'$ где $x,y\in\mathbf{G}'$. Сначала получим:
$[ab,ac]=[a,ac]^b[b,ac]=(h^{-1})^bg(f^{-1})^c=g^{-2}f^{-2}h^{-1}gg^{-2}h^{-2}f^{-1}=fgh.$

Далее, $[ab,ac,ab]=[fgh,ab]=[gh,ab]=[g,ab]^h[h,ab]=[g^{-2}(f^2h^2)^b]^hf^2g^2(h^{-2})^b=g^{-2}\sigma f^{-2}\sigma(h^2)^bf^2g^2(h^{-2})^b=1.$

Используя формулы для коммутаторов вида $[a,f^xg^yh^z]$, полученные при рассмотрении $< ax,by >'$, получим: $[ab,f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]=$
$=[a,f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^b[b,f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]=(f^{2\alpha_2-2\beta_2}h^{2\gamma_2-2\beta_2})^bf^{2\alpha_2-2\gamma_2}g^{2\beta_2-2\gamma_2}\ \ mod\,\langle\sigma\rangle=$
$=f^{-2\alpha_2+2\beta_2}h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2(2\gamma_2-2\beta_2)}g^{2(2\gamma_2-2\beta_2)}f^{2\alpha_2-2\gamma_2}g^{2\beta_2-2\gamma_2}\ \ mod\,\langle\sigma\rangle=$
$=h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\gamma_2-2\beta_2}g^{2\gamma_2-2\beta_2}\ \ mod\,\langle\sigma\rangle$, в частности $[ab,f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\in Z(\mathbf{G})$.

Аналогично $[ac,f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]=f^{2\alpha_1-2\beta_1}g^{2\alpha_1-2\beta_1}h^{2\alpha_1-2\beta_1}\ \ mod\,\langle\sigma\rangle$. Тогда $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},acf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]=[ab,f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^{f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}}[f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]\cdot$ $\cdot[f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},ac]\ \ mod\,\langle\tau\rangle=[ab,f^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}][ab,ac][f^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},ac]\ \ mod\,\langle\tau\rangle=$ $=h^{2\gamma_2-2\beta_2}f^{2\gamma_2-2\beta_2}g^{2\gamma_2-2\beta_2}fghh^{2\beta_1-2\alpha_1}g^{2\beta_1-2\alpha_1}f^{2\beta_1-2\alpha_1}\ \ mod\,\langle\tau\rangle$, и $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},acf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2},abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]=[fgh,abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]=[fgh,ab]\ mod\,\langle\tau\rangle=1\ mod\,\langle\tau\rangle$.

По симметрии $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},acf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2},acf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1}]=1\ mod\,\langle\tau\rangle$.

С другой стороны $[abf^{\alpha_1}g^{\beta_1}h^{\gamma_1},acf^{\alpha_2}g^{\beta_2}h^{\gamma_2}]^4=\sigma^{\gamma_2-\beta_2}(fgh)^4\sigma^{\beta_1-\alpha_1}$, а это τ в нечетной степени. Следовательно, $< abx,acy >'$ цикличен. Лемма, а значит, и теорема 3 доказаны.

Список литературы

[1] Alperin J. L. *On a special class of regular groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 77–99.
[2] Веретенников Б. М. *Об одной гипотезе Альперина*, Сиб. матем. журн. 21 (1980), 200–202.
[3] Веретенников Б. М. *О конечных p-группах с метациклическим коммутантом*, Сиб. матем. журн. 39 (1998), 999–1004.

Борис Михайлович Веретенников
Уральский государственный технический университет (УГТУ – УПИ),
Радиотехнический институт – РТФ,
ул. Мира 32,
620002, Екатеринбург, Россия
E-mail address: abvmt@e1.ru