S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 113–132 (2007) УДК 514.772.2, 517.97

MSC 53A40

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ТИПА ПЛОЩАДИ

В. А. КЛЯЧИН, Н. М. МЕДВЕДЕВА

Abstract. In this paper we study the some questions about stability of the surfaces, which are the extremals of the area type functional. Stability, means, is called positively or negatively determined of second variation of functional for all any sufficiently small deformations of surface. In the work we obtain of the formulas first and second variation of functional, the capacity feature of instability, the conditions of stability and instability in the terms of the structure of surface image under Gaussian map. We consider some examples by application our results for research of stability of rotation surfaces.

1. Введение

Пусть M – n-мерное, связное, ориентируемое многообразие класса C^3. Рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^3-погружением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. На поверхности $\mathcal{M}$ индуцируется риманова метрика и соответствующее скалярное произведение касательных векторов, которое мы будем обозначать также как и скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$ через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Введем обозначения $\overline{\nabla}$ и ∇ для римановых связностей в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Известны следующие соотношения [1, §1]:

$$\nabla h = (\overline{\nabla} h)^T,$$

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T,$$

Klyachin, V.A., Medvedeva, N.M., On the stability of extremal surfaces for a certain area type functional.

© 2007 Клячин В.А., Медведева Н.М.

Работа поддержана грантом математического факультета Волгоградского Государственного Университета.

Поступила 6 марта 2006 г., опубликована 9 апреля 2007 г.

справедливые для произвольных C^1-гладких функций $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ и C^1-гладких векторных полей X и Y, касательных к $\mathcal{M}$. Обозначим v^T ортогональную проекцию вектора v на касательную плоскость $T_x\mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$ в соответствующей точке $x \in \mathcal{M}$.

Пусть $m \in M$ и пусть в некоторой окрестности точки $u(m)$ определены гладкие векторные поля X и Y. Билинейная форма

$$B(X(m), Y(m)) = (\overline{\nabla}_X Y)(u(m)) - (\overline{\nabla}_X Y)^T(u(m))$$

называется *второй фундаментальной формой* поверхности $\mathcal{M}$ (см. [1, §3]). Если $\{E_i\}_{i=1}^n$ – ортонормированный базис в касательном пространстве к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$, то вектор

$$\vec{H}(m) = \frac{1}{n}\operatorname{trace} B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i),$$

называется *вектором средней кривизны* поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$ (см. [1, §5]).

Пусть $N_{u(m)}\mathcal{M}$ – нормальное пространство к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$. Для произвольного вектора $v \in N_{u(m)}\mathcal{M}$ пусть A^v означает гомоморфизм Вейнгартена, определяемый как линейное преобразование A^v: $T_{u(m)}\mathcal{M} \to T_{u(m)}\mathcal{M}$, двойственное к билинейной форме B [1, §3]:

$$\langle A^v(X), Y\rangle = \langle B(X,Y), v\rangle = -\left\langle \overline{\nabla}_X v, Y\right\rangle. \tag{1}$$

В статье рассматриваем исключительно ориентируемые гиперповерхности, поэтому поле нормалей ξ к поверхности $\mathcal{M}$ считаем выбранным и обозначаем $A = A^{\xi}$. Известно, что если $k_i,\ i = 1, 2, ..., n$ – главные кривизны поверхности $\mathcal{M}$, то $A(E_i) = k_i E_i$ для собственного базиса $\{E_i\}_{i=1}^n$ оператора A.

Рассмотрим C^2-гладкую функцию $\Phi :\ \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\Phi(\xi) \geqslant 0$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(-\xi) = \Phi(\xi)$.

Если обозначить через ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}, \tag{2}$$

где $d\mathcal{M}$ – элемент n-мерного объема на $\mathcal{M}$. Заметим, что величина (2) не зависит от выбора нормали ξ.

Основным объектом исследования настоящей работы являются поверхности, являющиеся экстремалями функционала (2). Отметим, что для некоторых функций $\Phi(\xi)$ следует рассматривать задачу на минимум функционала $F(\mathcal{M})$, а для некоторых – на максимум. Как окажется ниже, это зависит от знакоопределенности матрицы

$$G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1},\ G_{ij} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle), \tag{3}$$

где $D\Phi = \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_2}, \dots, \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_{n+1}}\right)$.

В частности, если положить $\Phi(\xi) \equiv 1$, то экстремалями функционала (2) являются минимальные поверхности и соответствующая вариационная задача ставится на минимум, а если $\Phi(\xi) = \sqrt{2\xi_{n+1}^2 - 1}$, то экстремалями функционала (2) будут максимальные поверхности [14] в пространстве $\mathbb{R}_1^{n+1}$, для которых вариационная задача ставится на максимум. В том случае, когда матрица (3) не является знакоопределенной, экстремали соответствуют седловым точкам функционала и задача не ставится ни на минимум, ни на максимум. Примером может служить функционал, построенный по функции $\Phi(\xi) = \sqrt{1-2\xi_{n+1}^2}$. Экстремали этого функционала — времениподобные поверхности нулевой средней кривизны в пространстве–времени Минковского.

В теории минимальных поверхностей давно известна задача об определении условий устойчивости. Устойчивость понимается как положительная определенность второй вариации функционала (2) при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$ с фиксированием границы $\partial\mathcal{M}$. Этой проблеме посвящен целый спектр работ, в которых применяются различные подходы к решению и рассматриваются евклидовы и псевдоевклидовы пространства: [2]–[13].

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости поверхностей, являющихся экстремалями функционала (2). При этом под устойчивостью мы понимаем знакоопределенность второй вариации функционала (2) при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$.

2. Основные результаты

Пусть V – C^2-векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$ и такое, что

(1) $V|_{\partial\mathcal{M}} = 0$;
(2) $V|_{\mathcal{M}} = h\cdot\xi$, где $h \in C_0^2(\mathcal{M})$;
(3) интегральными кривыми поля V являются прямые линии;
(4) вдоль каждой интегральной кривой выполнено $|V| = \mathrm{const}$.

Ясно, что любое векторное поле $V = h\cdot\xi$, заданное вдоль $\mathcal{M}$, можно продолжить в некоторую окрестность $\mathcal{M}$ так, что будут выполнены условия 1–4. Пусть $g_t(x) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ – однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов векторного поля V. То есть $g_t(x)$ является решением задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)),$$
$$g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Теорема 1. *Если $F(t) = F(\mathcal{M}_t)$, то*

$$F'(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\mathrm{div}(D\Phi)^T - nH\Phi)h\, d\mathcal{M}, \tag{4}$$

где div *– дивергенция в метрике поверхности $\mathcal{M}$, $H = \left\langle \vec{H}, \xi \right\rangle$ – средняя кривизна поверхности $\mathcal{M}$ относительно нормали ξ. Более того, если $F'(0) = 0$ для любой C^2-функции $h|_{\partial\mathcal{M}} = 0$, то*

$$F''(0) \equiv Q(h) \equiv \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right\} d\mathcal{M}, \tag{5}$$

где G – квадратичная форма, соответствующая матрице (3), k_i – главные кривизны, а E_i – главные направления поверхности $\mathcal{M}$.

Следствие 1. *Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2 является экстремалью функционала (2) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i G(E_i, E_i) = 0. \tag{6}$$

Следствие 2. *Если матрица G – положительно определена, то любая экстремаль является локально-минимальной для функционала (2), если матрица G – отрицательно определена, то – локально-максимальной.*

Пусть $\Omega \subset \mathcal{M}$ – произвольная область на поверхности $\mathcal{M}$ и P,$Q \subset \Omega$ – два непересекающихся замкнутых множества в $\overline{\Omega}$. Всякую такую тройку $(P, Q; \Omega)$ назовем конденсатором на $\mathcal{M}$.

Определение 1. *G-Емкостью конденсатора $(P, Q; \Omega)$ назовем величину*

$$\operatorname{cap}_G(P, Q; \Omega) = \inf_{\varphi} \int\limits_{\Omega} |G(\nabla\varphi, \nabla\varphi)| d\mathcal{M}, \tag{7}$$

где точная нижняя грань берется по всем локально-липшицевым функциям φ, таким что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(x) = 1$ на P и $\varphi(x) = 0$ на Q.

Определение 2. *Поверхность $\mathcal{M}$ будем называть G –параболической, если найдется последовательность подобластей $\Omega_k \subset \mathcal{M}$, $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1}$, таких, что*

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}_G(P, \partial\Omega_k; \Omega_k) = 0$$

для любого компакта $P \Subset \mathcal{M}$.

Введем обозначение:

$$||A||_G^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i). \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – экстремальная поверхность для функционала (2) со знакоопределенной матрицей G. Если найдется область $\Omega \subset \mathcal{M}$ и компакт $P \Subset \Omega$ такие, что*

$$\int\limits_{P} ||A||_G^2 d\mathcal{M} > \operatorname{cap}_G(P, \partial\Omega; \Omega), \tag{9}$$

то $\mathcal{M}$ – неустойчива.

Как следствие получается емкостный вариант теоремы до Кармо и Пенга [3] для экстремалей функционала (2).

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M}$ – устойчивая экстремаль функционала (2). Если $\mathcal{M}$ имеет G-параболический тип, то $\mathcal{M}$ является плоскостью.*

Пусть $\mathcal{M}$ – 2-мерная экстремальная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\gamma\colon \mathcal{M} \to S^2$ – гауссово отображение поверхности $\mathcal{M}\colon \gamma(x) = \xi$. Пусть матрица G знакоопределена, $\Lambda(\xi)$ и $\lambda(\xi)$ ее максимальное и минимальное по модулю собственные числа. Для всякого открытого множества $F \subset S^2$ определим величины:

$$\mu^+(F) = \inf_{h^*\in C_0^1(F)} \frac{\int\limits_F \dfrac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda(\xi)} \left|\nabla_S h^*(\xi)\right|^2 dS}{\int\limits_F \lambda(\xi) h^{*2}(\xi) dS},$$

$$\mu^-(F) = \inf_{h^*\in C_0^1(F)} \frac{\int\limits_F \dfrac{\lambda(\xi)}{\Lambda^2(\xi)} \left|\nabla_S h^{*2}(\xi)\right|^2 dS}{\int\limits_F \dfrac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda(\xi)} h^{*2}(\xi) dS}.$$

Теорема 4. *Гауссово отображение $\gamma : \mathcal{M} \to S^2$ экстремальной поверхности $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ является отображением с ограниченным искажением. Для коэффициента искажения q имеет место оценка*

$$q \leqslant \sup_{\xi\in S^2} \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}.$$

Отметим, что теорема 4 в частном случае $\Phi(\xi) = \phi(\xi_{n+1})$ была анонсирована в [17].

Следствие 3. *Если $\Phi(\xi) = \phi(\xi_{n+1})$, то коэффициент искажения*

$$q = \max\left\{ \sup_{-1\leqslant\xi_{n+1}\leqslant 1} (B) + 1,\ \frac{1}{\inf\limits_{-1\leqslant\xi_{n+1}\leqslant 1} (B) + 1} \right\}, \tag{10}$$

где $B = \dfrac{\phi''(\xi_{n+1})(1-\xi_{n+1}^2)}{\phi(\xi_{n+1}) - \phi'(\xi_{n+1})\xi_{n+1}}$.

Теорема 5. *Если $\mu^+(\gamma(\mathcal{M})) < 2$, то экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ неустойчива, если $\mu^-(\gamma(\mathcal{M})) \geqslant 2$, то $\mathcal{M}$ – устойчива.*

Данная теорема является обобщением известного признака устойчивости минимальных поверхностей (см. [2]).

Пример 1. Положим

$$\phi(\xi_{n+1}) = \phi(\tau) = -\tau \int\limits_1^{\tau(t)} \frac{(1-\tau^2)^{(p-2)/2}}{\tau^2} d\tau + \tau,$$

где $p > 1$. Тогда экстремали функционала (2) – это так называемые p-минимальные поверхности, рассматриваемые в работе [18]. Не сложно посчитать, что

$$q = \max\left\{ p-1, \frac{1}{p-1} \right\},$$

что в точности соответствует оценке в [18].

3. Формулы первой и второй вариации.

Пусть ω – $(n+1)$-форма объема в $\mathbf{R}^{n+1}$, то есть $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}$. Тогда n-форма $i_\xi\omega$, определенная по правилу

$$i_\xi\omega(X_1, \ldots, X_n) = \omega(\xi, X_1, \ldots, X_n), \quad X_i \in T_x\mathcal{M},\ x \in \mathcal{M}$$

задает форму n-мерного объема на n-мерной гладкой поверхности $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ [16, §3], если ξ – векторное поле нормалей к $\mathcal{M}$. Пусть $\{X_i\}$ – касательные векторные поля к $\mathcal{M}$, образующие ортонормированный собственный базис для симметрического гомоморфизма $A : T_x\mathcal{M} \to T_x\mathcal{M}$, $A(X_i) = k_iX_i$.

Продолжим векторные поля X_i до векторных полей X_i^*, определенных в окрестности поверхности $\mathcal{M}$, полагая $X_i^*|_{g_t(x)} = dg_t(X_i)$. Заметим, что $g_t(x)$ было описано в п. 2 настоящей работы. По определению $[X_i^*, V] = \overline{\nabla}_V X_i^* - \overline{\nabla}_{X_i^*} V = 0$ (см. [2]). Пусть также ξ^* – поле единичных нормалей к поверхностям $\mathcal{M}_t$. Тогда

$$F(\mathcal{M}_t) = \int\limits_{\mathcal{M}_t} \Phi(\xi^*)\, i_{\xi^*}\omega.$$

Используя формулу замены переменных при интегрировании дифференциальных форм [19], получаем

$$F(\mathcal{M}_t) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi\big(\xi^*(g_t(x))\big)\omega\big(\xi^*(g_t(x)), X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\big).$$

Поступая, как и в [20], приходим к равенству

$$\begin{aligned} F'(t) = &\int\limits_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt}\Phi\big(\xi^*\big) \cdot \omega\big(\xi^*, X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\big) + \\ &+ \Phi\big(\xi^*\big) \cdot \frac{d}{dt}\,\omega\big(\xi^*, X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\big) = \\ = &\int\limits_{\mathcal{M}} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\overline{\nabla}_V\xi_i^* \cdot \omega\big(\xi^*, X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\big) + \\ &+ \Phi\big(\xi^*\big)\sum_{i=1}^{n}\omega\big(\xi^*, X_1^*, \ldots, \overline{\nabla}_V X_i^*, \ldots, X_n^*\big). \end{aligned} \tag{11}$$

Имеем при $t = 0$, используя $\langle\xi^*, X_i^*\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \big\langle\overline{\nabla}_V\xi, X_i\big\rangle = &\lim_{t\to0}\big\langle\overline{\nabla}_V\xi^*, X_i^*\big\rangle = -\lim_{t\to0}\big\langle\xi^*, \overline{\nabla}_V X_i^*\big\rangle = -\lim_{t\to0}\big\langle\xi^*, \overline{\nabla}_{X_i^*}V\big\rangle = \\ = &-\lim_{t\to0}\big\langle\xi^*, \overline{\nabla}_{X_i^*}V^T\big\rangle - \lim_{t\to0}\big\langle\xi^*, \overline{\nabla}_{X_i^*}V^N\big\rangle = \\ = &\lim_{t\to0}\big\langle\overline{\nabla}_{X_i^*}\xi^*, V^T\big\rangle - \overline{\nabla}_{X_i}h = -\overline{\nabla}_{X_i}h. \end{aligned}$$

Здесь $V^N = V - V^T$ – нормальная составляющая вектора V.

С другой стороны, $\big\langle\overline{\nabla}_V\xi, \xi\big\rangle = 0$. Поэтому

$$\overline{\nabla}_V\xi = -\nabla h. \tag{12}$$

Далее, как и в [20],

$$\sum_{i=1}^{n}\omega\bigl(\xi^*, X_1^*, \dots, \overline{\nabla}_V X_i^*, \dots, X_n^*\bigr)\big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\omega\bigl(\xi^*, X_1^*, \dots, \overline{\nabla}_{X_i^*} V, \dots, X_n^*\bigr)\big|_{t=0} = -nHh.$$

Поэтому по формуле Остроградского–Гаусса

$$F'(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} \bigl(-\langle D\Phi, \nabla h\rangle - nHh\Phi\bigr)\,d\mathcal{M} = \int\limits_{\mathcal{M}} \bigl(\operatorname{div}(D\Phi)^T - n\Phi H\bigr) h\,d\mathcal{M},$$

что доказывает (4).

Дифференцируя (11), получаем

$$F''(t) = \int\limits_{\mathcal{M}} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\overline{\nabla}_V\xi_i^*\overline{\nabla}_V\xi_j^* + \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_V\xi_i +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\overline{\nabla}_V\xi_i\sum_{j=1}^{n}\omega\bigl(\xi^*, X_1^*, \dots, \overline{\nabla}_V X_j^*, \dots, X_n^*\bigr) +$$

$$+ \Phi(\xi^*)\sum_{i\neq j}\omega\bigl(\xi^*, X_1^*, \dots, \overline{\nabla}_V X_i^*, \dots, \overline{\nabla}_V X_j^*, \dots, X_n^*\bigr) +$$

$$+ \Phi(\xi^*)\sum_{i=1}^{n}\omega\bigl(\xi^*, X_1^*, \dots, \overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_V X_i^*, \dots, X_n^*\bigr) +$$

$$+ \Phi(\xi^*)\sum_{i=1}^{n}\omega\bigl(\overline{\nabla}_V\xi^*, X_1^*, \dots, \overline{\nabla}_V X_i^*, \dots, X_n^*\bigr)\,d\mathcal{M}.$$

Последние три слагаемых, как и в [20], дадут при $t = 0$ значение

$$\Phi(\xi)\bigl(\bigl(n^2H^2 - ||A||^2\bigr)h^2 + |\nabla h|^2\bigr).$$

Далее, используя (12),

$$\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\bigl(\overline{\nabla}_V\xi_i^*, \overline{\nabla}_V\xi_j^*\bigr)\big|_{t=0} = D^2\Phi(\nabla h, \nabla h).$$

Вычислим $\overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_V\xi$. Имеем

$$\begin{aligned}\left\langle\overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_V\xi, X_i\right\rangle &= \overline{\nabla}_V\left\langle\overline{\nabla}_V\xi, X_i\right\rangle - \left\langle\overline{\nabla}_V\xi, \overline{\nabla}_V X_i\right\rangle = \\ &= -2\left\langle\overline{\nabla}_V\xi, \overline{\nabla}_V X_i\right\rangle - \left\langle\xi, \overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_V X_i\right\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle\overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_V X_i, \xi\right\rangle &= \left\langle\overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_{X_i}V, \xi\right\rangle = \left\langle\overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_{X_i}V, \xi\right\rangle - \\ &- \left\langle\overline{\nabla}_{X_i}\overline{\nabla}_V V, \xi\right\rangle - \left\langle\overline{\nabla}_{[V,X_i]}V, \xi\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\left\langle\overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_V\xi, X_i\right\rangle &= -2\left\langle\overline{\nabla}_V\xi, \overline{\nabla}_V X_i\right\rangle = -2\left\langle\overline{\nabla}_V\xi, \overline{\nabla}_{X_i}V\right\rangle = \\ &= -2\left\langle\overline{\nabla}_V\xi, \overline{\nabla}_{X_i}V^T\right\rangle - 2\left\langle\overline{\nabla}_V\xi, \overline{\nabla}_{X_i}V^N\right\rangle = \\ &= 2h\left\langle\overline{\nabla}_V\xi, A(X_i)\right\rangle = -2h\left\langle\nabla h, A(X_i)\right\rangle.\end{aligned}$$

А поскольку

$$\left\langle \overline{\nabla}_V \overline{\nabla}_V \xi, \xi \right\rangle = \overline{\nabla}_V \left\langle \overline{\nabla}_V \xi, \xi \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_V \xi, \overline{\nabla}_V \xi \right\rangle = -|\nabla h|^2,$$

то

$$\left\langle \overline{\nabla}_V \overline{\nabla}_V \xi, D\Phi \right\rangle = -2h \left\langle A(\nabla h), (D\Phi)^T \right\rangle - |\nabla h|^2 \left\langle D\Phi, \xi \right\rangle.$$

Таким образом, получаем

$$F''(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} D^2\Phi\big(\nabla h, \nabla h\big) + 2\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \sum_{i=1}^{n+1} \omega\big(\xi^*, \dots, \overline{\nabla}_V X_i, \dots, X^*_{n+1}\big)\big|_{t=0} -$$
$$- 2h \left\langle \nabla h, A\big((D\Phi)^T\big) \right\rangle - |\nabla h|^2 \left\langle D\Phi, \xi \right\rangle + \Phi \left(|\nabla h|^2 + \big(n^2H^2 - ||A||^2\big) h^2 \right) d\mathcal{M}.$$

Или, используя, что

$$\sum_{i=1}^{n} \omega\big(\xi^*, X_1^*, \dots, \overline{\nabla}_V X_i^*, \dots, X_n^*\big)\big|_{t=0} = -nHh,$$

будем иметь

$$F''(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} D^2\Phi(\nabla h, \nabla h) + |\nabla h|^2 \big(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle\big) -$$
$$- 2h \left\langle \nabla h, A\big((D\Phi)^T\big) \right\rangle + 2nHh \left\langle \nabla h, (D\Phi)^T \right\rangle + \Phi\big(n^2H^2 - ||A||^2\big) h^2 \, d\mathcal{M} =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla h, \nabla h) + h^2 \Big(\mathrm{div} A\big((D\Phi)^T\big) - n\,\mathrm{div}\big(H (D\Phi)^T\big) + \Phi n^2 H^2 - \Phi ||A||^2 \Big) \, d\mathcal{M}. \tag{13}$$

Вычислим $\mathrm{div} A\big((D\Phi)^T\big)$. Пусть Y – произвольное гладкое касательное к $\mathcal{M}$ векторное поле. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\big(A(Y)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} A(Y), X_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{X_i} A)(Y), X_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A(\nabla_{X_i} Y), X_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_Y A)(X_i), X_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A(X_i), \nabla_{X_i} Y \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_Y A(X_i), X_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle A(\nabla_Y X_i), X_i \rangle + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \langle A(X_i), \nabla_{X_i} Y \rangle = n \nabla_Y H - \\
&- 2\sum_{i=1}^{n} \langle A(X_i), \nabla_Y X_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A(X_i), \nabla_{X_i} Y \rangle = \\
&= n \langle \nabla H, Y \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A(X_i), \nabla_{X_i} Y \rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathrm{div} A\big((D\Phi)^T\big) = n\left\langle \nabla H, (D\Phi)^T\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle A(X_i), \nabla_{X_i}(D\Phi)^T\right\rangle.$$

Далее, используя, что при $F'(0) = 0$

$$\mathrm{div}(D\Phi)^T = nH\Phi,$$

получим

$$\mathrm{div}\big(H(D\Phi)^T\big) = \left\langle \nabla H, (D\Phi)^T\right\rangle + H\mathrm{div}\big((D\Phi)^T\big) = \left\langle \nabla H, (D\Phi)^T\right\rangle + nH^2\Phi.$$

Поэтому, подставляя найденные выражения в (13), приходим к равенству

$$\begin{aligned} F''(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla h, \nabla h) + h^2\Bigg(& n\left\langle \nabla H, (D\Phi)^T\right\rangle - n\left\langle \nabla H, (D\Phi)^T\right\rangle - \\ & - \Phi n^2H^2 + \sum_{i=1}^{n}\left\langle A(X_i), \nabla_{X_i}(D\Phi)^T\right\rangle + \Phi n^2 H^2 - \Phi||A||^2\Bigg)\, d\mathcal{M} = \\ = \int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla h, \nabla h) + h^2 & \left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle A(X_i), \nabla_{X_i}(D\Phi)^T\right\rangle - \Phi||A||^2\right) d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Наконец, вычислим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n}\left\langle A(X_i), \nabla_{X_i}(D\Phi)^T\right\rangle$.

Поскольку X_i – собственные векторы для гомоморфизма A, то $A(X_i) = k_i X_i$. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{n+1}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда

$$(D\Phi)^T = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j}\, e_j^T,$$

$$\nabla_{X_i}(D\Phi)^T = \sum_{j,k=1}^{n+1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\left\langle \nabla\xi_k, X_i\right\rangle e_j^T + \sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j}\nabla_{X_i} e_j^T.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi_k = \nabla_X\left\langle \xi, e_k\right\rangle = \overline{\nabla}_X\left\langle \xi, e_k\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X, e_k\right\rangle = \\ = -\left\langle A(X), e_k\right\rangle = -\left\langle A(e_k), X\right\rangle, \end{aligned}$$

поэтому

$$\nabla\xi_k = -A(e_k^T).$$

Получаем

$$\nabla_{X_i}(D\Phi)^T = -\sum_{j,k=1}^{n+1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\left\langle A(e_k^T), X_i\right\rangle e_j^T + \sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j}A(X_j)$$

и

$$\left\langle \nabla_{X_i}(D\Phi)^T, A(X_i)\right\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n+1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\left\langle A(e_k^T), X_i\right\rangle\left\langle e_j^T, A(X_i)\right\rangle +$$

$$+\sum_{j=1}^{n+1}\xi_j\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j}\sum_{i=1}^{n}\langle A(X_i), A(X_i)\rangle =$$

$$= -\sum_{j,k=1}^{n+1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\left\langle A(e_k^T), A(e_j^T)\right\rangle + ||A||^2\langle D\Phi,\xi\rangle =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} D^2\Phi(A(X_i), A(X_i)) + ||A||^2\langle D\Phi,\xi\rangle =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} k_i^2 D^2\Phi(X_i, X_i) + ||A||^2\langle D\Phi,\xi\rangle .$$

Окончательно будем иметь

$$F''(0) = \int\limits_{\mathcal{M}}\Bigg\{G(\nabla h,\nabla h) + h^2\Bigg(-\sum_{i=1}^{n} k_i^2 D^2\Phi(X_i, X_i) +$$

$$+ ||A||^2\langle D\Phi,\xi\rangle - \Phi||A||^2\Bigg)\Bigg\}\, d\mathcal{M} =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{M}}\Bigg\{G(\nabla h,\nabla h) - h^2\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i)\Bigg\}\, d\mathcal{M} =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{M}}\Big\{G(\nabla h,\nabla h) - h^2||A||_G^2\Big\}\, d\mathcal{M}.$$

Теорема 1 доказана.

Для доказательства следствия 1 распишем покоординатно (4)

$$nH\Phi = \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}e_i^T\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\operatorname{div}(e_i^T) + \sum_{i=1}^{n}\left\langle\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\right), e_i^T\right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}n\xi_i H - \sum_{i,j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\left\langle\nabla\xi_j, e_i^T\right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}n\xi_i H - \sum_{i,j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\left\langle A\left(e_j^T\right), e_i^T\right\rangle =$$

$$= nH\langle\nabla\Phi,\xi\rangle - \sum_{i,j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\left\langle A\left(e_j^T\right), e_i^T\right\rangle .$$

Таким образом, получаем

$$nH(\Phi - \langle\nabla\Phi,\xi\rangle) + \sum_{i,j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\left\langle A\left(e_j^T\right), e_i^T\right\rangle = 0.$$

Принимая во внимание, что $A(X_i) = k_i X_i,\ H = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i$ и (3), получаем (6).

Доказательство следствия 2 проводится аналогично приведенному в работе [14].

4. Доказательство теорем 2 и 3.

Лемма 1. *Пусть в $\mathbb{R}^{n+1}$ задана не равная нулю, неотрицательная функция $S(x)$. Тогда для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathcal{M}$ и компакта $P \Subset \Omega$ существует C^1-гладкая функция h_0, такая что $h_0|_{\partial\Omega\setminus\partial\mathcal{M}} = 0$, для которой*

$$Q_S(h_0) = \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{G(\nabla h_0, \nabla h_0) - Sh_0^2\right\} d\mathcal{M} \leqslant \operatorname{cap}_G\left(P, \overline{\partial\Omega \setminus \partial\mathcal{M}}\right) - \int\limits_P S\, d\mathcal{M}. \tag{14}$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим вариационную задачу:

$$\int\limits_{\mathcal{M}} G\left(\nabla h, \nabla h\right)\, d\mathcal{M} \to \inf.$$

Известно [22, глава 3, §4, п. 4.1, свойство 3], что эта задача имеет решение $h_0(x) \in C_0^1(\Omega)$, такое что

$$\operatorname{cap}_G\left(P,\, \partial\Omega;\, \Omega\right) = \int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla h_0, \nabla h_0)\, d\mathcal{M}.$$

Тогда, учитывая, что $h_0|_P = 1$, получаем

$$Q_S(h_0) \leqslant \operatorname{cap}_G\left(P,\, \partial\Omega;\, \Omega\right) - \int\limits_{\mathcal{M}} Sh_0^2\, d\mathcal{M} \leqslant \operatorname{cap}_G\left(P,\, \partial\Omega;\, \Omega\right) - \int\limits_P S\, d\mathcal{M}.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание. Лемма 1 для случая $\Phi(\xi) \equiv 1$ была доказана в работе [20].

Полагая в (14) $S = ||A||_G^2$ и применяя определение неустойчивости, получаем (9). Теорема 2 доказана.

Обратимся к доказательству теоремы 3.

Заметим, что с учетом определения устойчивости, выражения (5) и понятия G-емкости конденсатора можно записать неравенство

$$\operatorname{cap}_G(P, \partial\Omega_k; \Omega_k) - \int\limits_P h^2 ||A||_G^2 \geqslant 0,$$

выполненное для всех $P \Subset \Omega$.

Переходя к пределу при $k \to +\infty$ и используя определение G-параболичности поверхности, заключаем, что $\mathcal{M}$ – плоскость. Теорема 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 4.

Пусть $x \in \mathcal{M}$ и $\xi = \gamma(x)$ – единичная нормаль в точке x. Заметим, что если вектор $X \in T_x\mathcal{M}$, то $X \in T_\xi S^2$ и обратно. Поэтому для произвольного $Y \in \mathcal{M}$, будем иметь

$$\langle d\gamma_x(X), Y\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \right\rangle = -\left\langle A(X), Y\right\rangle .$$

То есть дифференциал гауссова отображения поверхности, как линейное отображение $d\gamma : T_x\mathcal{M} \to T_\xi S^2$, действует точно также как и линейное отображение $A : T_x\mathcal{M} \to T_\xi S^2 = T_x\mathcal{M}$. Тогда коэффициент искажения отображения $\gamma : \mathcal{M} \to S^2$ в рассматриваемой точке равен

$$q = \max\left\{\left|\frac{k_1}{k_2}\right|, \left|\frac{k_2}{k_1}\right|\right\}.$$

Как несложно видеть, в нашем случае, из соотношения (6)

$$q \leqslant \frac{\Lambda(\gamma(x))}{\lambda(\gamma(x))},$$

откуда и получаем требуемое.

Для доказательства следствия 3 перепишем (6) с учетом двумерности поверхности ($n = 2$)

$$k_1 = -k_2\frac{G(E_2, E_2)}{G(E_1, E_1)}, \quad \left|\frac{k_1}{k_2}\right| = \left|\frac{G(E_2, E_2)}{G(E_1, E_1)}\right|,$$

$$G(E_i, E_i) = D^2\Phi(E_i, E_i) + \delta_{ij}(\Phi - \langle\nabla\Phi, \xi\rangle),$$

так как $\Phi(\xi) = \phi(\xi_{n+1})$, то

$$G(E_i, E_i) = \phi''|(E_i)_3|^2 + \phi - \phi'\xi_3,$$

где $(E_i)_3$ – третья координата вектора E_i. Напомним, что $B = \dfrac{\phi''(\xi_3)(1 - \xi_3^2)}{\phi(\xi_3) - \phi'(\xi_3)\xi_3}$. Так как $\{E_i\}$ – базис в касательном пространстве, то получаем

$$\frac{G(E_2, E_2)}{G(E_1, E_1)} = \frac{1 + B\cos^2\alpha}{1 + B\sin^2\alpha}, \qquad k_1 = -k_2\frac{1 + B\cos^2\alpha}{1 + B\sin^2\alpha}.$$

При $B > 0$ последнее равенство означает отрицательность якобиана отображения в соответствующей точке. Теперь, используя экстремальные свойства квадратичных форм, получаем

$$q = \max_\alpha\left\{q_0, \frac{1}{q_0}\right\}, \; q_0 = \frac{1 + B\cos^2\alpha}{1 + B\sin^2\alpha}.$$

Простейшие вычисления максимального значения правой части равенства по всем допустимым углам α ($\alpha \in (0, \pi/2)$) дают требуемое (10).

6. Доказательство теоремы 5.

Согласно свойствам собственных чисел положительно определенных матриц имеют место неравенства

$$\lambda(\xi)|\eta|^2 \leqslant G(\eta,\eta) \leqslant \Lambda(\xi)|\eta|^2, \tag{15}$$

для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n+1}$. Поэтому, в частности,

$$\lambda(\xi)|\nabla h|^2 \leqslant G(\nabla h, \nabla h) \leqslant \Lambda(\xi)|\nabla h|^2,$$

и

$$\lambda(\xi) \leqslant G(E_i, E_i) \leqslant \Lambda(\xi),$$

где $E_i,\ i = 1,2,...,n$ – собственные для A, касательные к поверхности $\mathcal{M}$ векторы. Из полученных неравенств, будем иметь

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left(G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{2} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M} \leqslant \tag{16}$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left(\Lambda(\xi)|\nabla h|^2 - \lambda(\xi) h^2 \sum_{i=1}^{2} k_i^2 \right) d\mathcal{M}$$

и

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left(G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{2} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M} \geqslant \tag{17}$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left(\lambda(\xi)|\nabla h|^2 - \Lambda(\xi) h^2 \sum_{i=1}^{2} k_i^2 \right) d\mathcal{M}.$$

Хорошо известно, что якобиан гауссова отображения равен гауссовой кривизне $K = k_1 k_2$ поверхности $\mathcal{M}$ в соответствующей точке. Если через dS обозначить элемент площади единичной сферы в точке ξ, где ξ – единичная нормаль к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $x \in \mathcal{M}$, так, что $\xi = \gamma(x)$, то $dS = |K|\, d\mathcal{M}$. Заметим, что из соотношения (6) следует, что $K = k_1 k_2 \leqslant 0$. Из свойств отображений с ограниченным искажением [21] мы заключаем, что множество $U = \gamma(\mathcal{M}) \subset S^2$ открыто. Пусть $h^* : U \to \mathbf{R}$ – функция класса $C^1(U)$, причем $h^*|_{\partial U} = 0$. Обозначим через $\nabla_S h^*$ градиент функции h^* в метрике сферы S^2. Положим $h(x) = h^*(\gamma(x))$. В силу теоремы 4

$$\frac{1}{q} K(x) |\nabla_S h^*|^2 \leqslant |\nabla h|^2 \leqslant q K(x) |\nabla_S h^*|^2.$$

Используя неравенство $2|K| \leqslant k_1^2 + k_2^2$, из (16) и (17) будем иметь

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left(G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{2} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{U} \frac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda(\xi)} |\nabla_S h^*|^2 dS - 2 \int\limits_{U} \lambda(\xi) h^{*2} dS$$

и

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left(G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{2} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{U} \frac{\lambda^2(\xi)}{\Lambda(\xi)} |\nabla_S h^*|^2 dS - 2 \int\limits_{U} \frac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda(\xi)} h^{*2} dS,$$

откуда и получаем требуемое.

7. Выражение второй вариации в локальных координатах

Теорема 6. *C^2-гладкая поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, заданная радиус-вектором $\vec{r}(u,v)$, где u, v – главные направления поверхности, является экстремальной тогда и только тогда, когда*

(18)
$$2H\Phi = \frac{1}{|\vec{r}_u||\vec{r}_v|} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(|\vec{r}_u||\vec{r}_v| \left\langle D\Phi, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(|\vec{r}_u||\vec{r}_v| \left\langle D\Phi, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} \right\rangle \right) \right).$$

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ будет устойчивой (неустойчивой) тогда и только тогда, когда знакоопределена (не является знакоопределенной) квадратичная форма

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ D^2\Phi(\nabla h, \nabla h) + (\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle) \left(|\nabla h|^2 + (k_1^2 + k_2^2) \right) - \right.$$

$$\left. -h^2 \left(k_1^2 D^2\Phi \left(\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} \right) + k_2^2 D^2\Phi \left(\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} \right) \right) \right\} |\vec{r}_u||\vec{r}_v| \, du \, dv \qquad (19)$$

в классе функций $h \in C_0^2(\mathcal{M})$.

Доказательство. По теореме 1 имеем $nH\Phi = \operatorname{div}(D\Phi)^T$. Принимая во внимание введенные выше обозначения и замечая, что $n = 2$, получаем

$$(D\Phi)^T = \left(\left\langle D\Phi, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} \right\rangle, \left\langle D\Phi, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} \right\rangle \right)$$

– ортогональная проекция вектора градиента на касательное пространство к поверхности $\mathcal{M}$, $E_1 = \vec{r}_u/|\vec{r}_u|^2$, $E_2 = \vec{r}_v/|\vec{r}_v|^2$ – базисные вектора касательного пространства. Применяя формулу вычисления div (см., например, [15]) в метрике $dS^2_{\mathcal{M}} = |\vec{r}_u|^2 du^2 + |\vec{r}_v|^2 dv^2$ поверхности $\mathcal{M}$, получаем

$$\operatorname{div}(D\Phi)^T = \frac{1}{|\vec{r}_u||\vec{r}_v|} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(|\vec{r}_u||\vec{r}_v| \left\langle D\Phi, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(|\vec{r}_u||\vec{r}_v| \left\langle D\Phi, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} \right\rangle \right) \right),$$

что и показывает (18).

Для того чтобы получить (19) выпишем

$$G(E_i, E_i) = D^2\Phi(E_i, E_i) + |E_i|^2 (\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle),$$

где $|E_i|^2 = 1$, $i = 1,\ 2$ и

$$G(\nabla h, \nabla h) = D^2\Phi(\nabla h, \nabla h) + |\nabla h|^2 (\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle),$$

подставим полученное в (5), сгруппируем и получим требуемое.

Теорема 6 доказана.

Пример 2. Рассмотрим поверхность $\mathcal{M}$, заданую радиус-вектором

$$\vec{r}(u,v) = \{r(u)\cos v, r(u)\sin v, u\}, \tag{20}$$

где $u \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, $v \in (0,2\pi)$, $r(u)$ – C^2-гладкая функция на (a,b), и функционал (2) в частном случае

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \phi(\xi_3)\, d\mathcal{M}.$$

Запишем (18) и (19) для данных поверхности и функционала. Вычислим H, $\left\langle D\Phi, \vec{r}_u/|\vec{r}_u|^2\right\rangle$ и $\left\langle D\Phi, \vec{r}_v/|\vec{r}_v|^2\right\rangle$.

Нетрудно проверить, что

$$\vec{r}_u = \{r'\cos v, r'\sin v, 1\},\ \vec{r}_v = \{-r'\sin v, r\cos v, 0\},$$
$$|\vec{r}_u|^2 = r'^2 + 1,\ |\vec{r}_v|^2 = r^2,\ (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0.$$

И тогда очевидно, что

$$\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} = \left\{\frac{r'}{1+r'^2}\cos v, \frac{r'}{1+r'^2}\sin v, \frac{1}{1+r'^2}\right\},$$
$$\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} = \left\{-\frac{1}{r}\sin v, \frac{1}{r}\cos v, 0\right\}.$$

Подставляя в метрику поверхности $dS^2_{\mathcal{M}} = |\vec{r}_u|^2 du^2 + |\vec{r}_v|^2 dv^2$, получим

$$dS^2 = (1 + r'^2)du^2 + r^2 dv^2.$$

Используя стандартные формулы (см. [15]), находим главные кривизны поверхности $\mathcal{M}$

$$k_1 = \frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}},\ k_2 = -\frac{1}{r\sqrt{1+r'^2}}.$$

Поэтому

$$2H = -\frac{1}{r\sqrt{1+r'^2}} + \frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}}.$$

Так как ϕ зависит только от третьей координаты единичной нормали, то $D\Phi = (0,0,\phi')$ и получаем

$$\left\langle D\Phi, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}\right\rangle = \frac{\phi'}{1+r'^2},\ \left\langle D\Phi, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}\right\rangle = 0.$$

Подставляем посчитанное в (18), дифференцируем выражение

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\phi' \frac{r}{\sqrt{1+r'^2}}\right) = \frac{-\phi'' r r'' + \phi' r' \sqrt{1+r'^2}(1 + r'^2 - r r'')}{(1+r'^2)^2},$$

выписываем уравнение экстремалей поверхности $\mathcal{M}$

$$\phi'' r r'' + \phi' r' \sqrt{1+r'^2}(r r'' - r'^2 - 1) + \phi(1+r'^2)(r r'' - r'^2 - 1) = 0. \tag{21}$$

Заметим, что уравнение экстремалей можно несколько упростить. Для этого проведем некоторые преобразования. Перегруппируем слагаемые уравнения (21) таким образом:

$$r r''(\phi'' + \phi' r' \sqrt{1+r'^2} + \phi(1+r'^2)) - (1+r'^2)(\phi' r' \sqrt{1+r'^2} + \phi(1+r'^2)) = 0.$$

Сделаем замену $r' = R(r)$, $r'' = R'R$, чтобы получить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$rR'R(\phi'' + \phi' R\sqrt{1+R^2} + \phi(1+R^2)) - (1+R^2)(\phi' R\sqrt{1+R^2} + \phi(1+R^2)) = 0,$$

которое интегрируем

$$\int\limits_{R(t_0)}^{R(t)} \left(\frac{\phi''}{\phi' R\sqrt{1+R^2} + \phi(1+R^2)} + 1 \right) \frac{R\,dR}{1+R^2} = \int\limits_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{r}.$$

Производя непосредственное вычисление, будем иметь

$$\int\limits_{R(t_0)}^{R(t)} \frac{\phi''}{\phi' R\sqrt{1+R^2} + \phi(1+R^2)} \cdot \frac{R\,dR}{1+R^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|1+R^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1+R^2(t_0)\right| = \ln|r| - \ln|r(t_0)|.$$

Пусть далее

$$P'(R) = \frac{\phi''}{\phi' R\sqrt{1+R^2} + \phi(1+R^2)} \cdot \frac{R}{1+R^2},$$

тогда получаем уравнение

$$P(R(t)) - P(R(t_0)) + \frac{1}{2}\ln\left|1+R^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1+R^2(t_0)\right| = \ln|r| - \ln|r(t_0)|.$$

Обозначая

$$\ln P_0 = -\ln e^{P(R(t_0))} - \ln\sqrt{1+R^2(t_0)} + \ln|r(t_0)|,$$

находим

$$r = P_0 e^{P(R)}\sqrt{1+R^2},$$

и уравнение экстремалей (21) можно записать в виде

$$r = P_0 P_1(r'), \tag{22}$$

где $P_1(r') = e^{P(R)}\sqrt{1+R^2}$, учитывая замену $r' = R(r)$.

Перейдем к выводу второй вариации, для этого вычислим $|\nabla h|^2$, а также $D^2\Phi$ на векторах ∇h и E_i.

$$\nabla h = h_u \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} + h_v \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} =$$

$$= \left\{ h_u \frac{r'\cos v}{1+r'^2} - h_v \frac{\sin v}{r}, h_u \frac{r'\sin v}{1+r'^2} - h_v \frac{\cos v}{r}, h_u \frac{1}{1+r'^2} \right\},$$

$$|\nabla h|^2 = \frac{h_u^2}{|\vec{r}_u|^2} + \frac{h_v^2}{|\vec{r}_v|^2} = \frac{h_u^2}{1+r'^2} + \frac{h_v^2}{r^2},$$

$$\xi = \left\{ \frac{\cos v}{\sqrt{1+r'^2}}; \frac{\sin v}{\sqrt{1+r'^2}}; -\frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} \right\},$$

$$\langle D\Phi, \xi \rangle = -\phi' \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}},$$

$$D^2\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi'' \end{pmatrix}, \ D^2\Phi(\nabla h, \nabla h) = \phi'' h_u^2 \frac{1}{(1+r'^2)^2},$$

$$D^2\Phi\left(\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}\right) = \frac{\phi''}{(1+r'^2)^2}, \ D^2\Phi\left(\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}\right) = 0.$$

Таким образом, подставляя найденные значения в (19), окончательно получим

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ h_u^2 \frac{r}{(1+r'^2)^{3/2}} \left(\phi'' + \phi' r' \sqrt{1+r'^2} + \phi(1+r'^2)\right) + \right.$$

$$+ h_v^2 \frac{\phi' r' \sqrt{1+r'^2} + \phi(1+r'^2)}{r^2(1+r'^2)} - h^2 \frac{\phi' r' \sqrt{1+r'^2} + \phi(1+r'^2)}{r(1+r'^2)^{3/2}} \Big(2-$$

$$\left. - \frac{\phi''}{\phi'' + \phi' r' \sqrt{1+r'^2} + \phi(1+r'^2)} \Big) \right\} du\, dv. \tag{23}$$

Обозначим:

$$\Phi_1 = \phi' r' \sqrt{1+r'^2} + \phi(1+r'^2), \ \Phi_2 = \phi'' + \Phi_1,$$

$$\alpha = \Phi_2 \frac{r}{(1+r'^2)^{3/2}}, \ \beta = \Phi_1 \frac{r r'' + r'^2 + 1}{r(1+r'^2)^{5/2}}.$$

Всюду ниже будем полагать, что $\alpha > 0, \ \beta > 0, \ h = h(u)$. Приведенные выше выкладки приводят к следующей теореме.

Теорема 7. *Поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус–вектором (20), является экстремальной тогда и только тогда, когда $\Phi_1 = \Phi_2 r r''/(1+r'^2)$. Экстремальная поверхность M устойчива тогда и только тогда, когда квадратичная форма $\int_a^b \{\alpha h'^2 - \beta h^2\}\, dt$ знакоопределена в классе липшицевых функций $h : M \to \mathbb{R}$, таких что $h(a) = h(b) = 0$.*

На основании теоремы 7 и определения устойчивости имеет место теорема об устойчивости поверхности вращения.

Теорема 8. *Пусть поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус–вектором (20), экстремальна и выполнено неравенство $\alpha\beta \leqslant 1$. Тогда поверхность M является устойчивой (неустойчивой), если*

$$\int\limits_a^b \frac{dt}{\alpha} \leqslant \pi \qquad \left(\int\limits_a^b \beta dt > \pi\right).$$

Доказательство теоремы 8. Так как $\alpha\beta \leqslant 1$, то справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b \left\{\alpha h'^2 - \beta h^2\right\} du \geqslant \int\limits_a^b \left\{\alpha h'^2 - \frac{h^2}{\alpha}\right\} du.$$

Таким образом, чтобы экстремальная поверхность вращения была устойчивой достаточно

$$\int\limits_a^b \left\{\alpha h'^2 - \frac{h^2}{\alpha}\right\} du \geqslant 0. \tag{24}$$

Сделаем замену в интегралах и рассмотрим их отношение.

Пусть $y(u) = \int_0^u dt/\alpha(t),\ t \in [0, b-a]$. Тогда

$$\frac{\int\limits_a^b \alpha {h'}^2\, du}{\int\limits_a^b \frac{h^2}{\alpha}\, du} = \frac{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} {h'}_y^2\, dy}{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} h^2(y)\, dy}.$$

Применяя неравенство Виртингера [23, §7.7], получим

$$\frac{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} {h'}_y^2 dy}{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} h^2(y) dy} \geqslant \left(\frac{\pi}{\int\limits_a^b du/\alpha} \right)^2. \tag{25}$$

Далее, сопоставляя (24) и (25), получим требуемое неравенство для устойчивости поверхности вращения. Для неустойчивости рассуждения проводятся аналогичным образом. Теорема 8 доказана.

Пример 3. Положим $\phi(\xi_{n+1})$ как в примере 1. Тогда для поверхностей, заданных (20), нетрудно видеть, что

$$\tau = -\frac{r'(t)}{\sqrt{1 + r'^2(t)}}.$$

Решая уравнение экстремалей (22), получим, что

$$\int\limits_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{C_0 r^{2/(p-1)} - 1}} = t - t_0,$$

где $C_0 = \dfrac{{r'}^2(t_0) + 1}{r^{2/(p-1)}(t_0)}$.

Применяя теорему 8, легко проверить, что p – минимальная поверхность устойчива на интервале $(t_0,\ t)$, определяемом из неравенства

$$t - t_0 \leqslant \frac{p-1}{C_0^{(p-1)/2}}\, \pi.$$

А интервал неустойчивости поверхности можно найти, решая неравенство

$$\frac{p}{(p-1)\mathcal{C}_0^{(p-1)/2}} \int\limits_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\mathcal{C}_0 r^{\frac{2}{p-1}} - 1}} > \pi.$$

Список литературы

[1] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, т.II: пер с англ. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

[2] Аминов Ю.А. *Минимальные поверхности. Цикл лекций*, Ротапринт, ХГУ. Харьков, 1978, 126 с.

[3] do Carmo M., Peng C.K. *The stable minimal surfaces in* R^3 *are planes*, Bull.(Ne Ser.) Amer. Math. Soc. 1(1979), 903–906.

[4] Фоменко А.Т. *О скорости роста и наименьших объемах глобально минимальных поверхностей в кобордизмах*, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, Вып. 21, М.:МГУ, 1985, 3–12.

[5] Тужилин А.А., Фоменко А.Т. *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей*, М.: Наука, 1991.

[6] Тужилин А.А. *Индексы типа Морса двумерных минимальных поверхностей в* R^3 *и* H^3, Изв. АН СССР. Сер. матем, **55**: 2 (1991), 581–607

[7] Погорелов А.В. *Об устойчивости минимальных поверхностей*, ДАН СССР, **260**: 2 (1981), 293–295.

[8] Hoffman D., Osserman R. *The area of generalized gaussian image and the stability of minimal surfaces in* S^n *and* R^n, Math. Ann. **260** (1982), 437–452.

[9] Клячин В.А., Миклюков В.М. *Об одном емкостном признаке неустойчивости минимальных гиперповерхностей*, Докл. РАН., **330**: 4 (1993), 424 – 426.

[10] Finn R., Vogel T.I. *On the volume infimum for liquid bridges*, Z. Anal. Anwendungen **11** (1992), 3–23.

[11] Langbein D. *Stability of liquid bridges between parallel plates*, Microgravity Sci. Techn. **5** (1992), 2–11.

[12] Финн Р. *Равновесные капиллярные поверхности*, Математическая теория, М.:Мир, 1989, 312 с.

[13] Саранин В.А. *Равновесие жидкостей и его устойчивость*, М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 144 с.

[14] Клячин В.А., Миклюков В.М. *Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **55**: 1 (1991), 206–217.

[15] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. *Дифференциальная геометрия: первое знакомство*, М.: Изд-во МГУ, 1990.

[16] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, т.I: пер с англ. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

[17] Медведева Н.М. *Квазиконформность гауссова отображения и устойчивость экстремальных поверхностей*, Международная школа – конференция по анализу и геометрии, посвященная 75-летию академика Ю.Г.Решетняка: Тезисы докладов – Новосибирск, 2004.

[18] Vladimir G. Tkachev *External geometry of p-minimal surfaces*, Geometry from the Pacific Rim (Singapore, 1994), 363-375, de Gruyter, Berlin, 1997.

[19] Уорнер Р. *Гладкие многообразия и группы Ли*, Бибфизмат, 1987.

[20] Клячин В.А., Миклюков В.М. *Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях*, Матем. сб., **187**: 11 (1996), 67–88.

[21] Белинский П.П. *Общие свойства квазиконформных отображений*, Новосибирск: Наука, 1974.

[22] Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, М.: Наука, 1983.

[23] Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. *Неравенства*, М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948.

Клячин Владимир Александрович
Волгоградский Государственный Университет,
пр. Университетский, 100,
400062, Волгоград, Россия
E-mail address: klchnv@mail.ru

Медведева Наталья Михайловна
Волгоградский Государственный Университет,
пр. Университетский, 100,
400062, Волгоград, Россия
E-mail address: natasha_medvedeva@volsu.ru