S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 92–105 (2006) УДК 517.51
MSC 42A30

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ПОЛИНОМАМИ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА.

Г.Акишев

Abstract. A generalized anysotropic Lorentz space is considered. A sufficient condition of embedding the class $H^r_{\varphi,\theta}$ into the Lorentz space is formulated; and the degree of approximation of this class sums by polynomials with respect to the generalized Haar system is determined.

В статье установлен порядок приближения функциональных классов полиномами по обобщенной системе Хаара с гармониками из гиперболического "креста". Сначала напомним необходимые определения .

Функция $\psi(t)$ называется Φ- функцией , если $\psi(t)$ непрерывная, неубывающая , вогнутая на отрезке $[0,1]$ функция, имеющая в каждой точке интервала $(0,1)$ конечную производную , причем $\psi(0)=0$.

Пусть $\bar{x}=(x_1,...,x_d)\in[0,1]^d\equiv I^d - d$- мерный единичный куб и даны числа $\theta_j\in(0,+\infty)$, $j=1,...,d$, $\bar{\theta}=(\theta_1,...,\theta_d)$, Φ- функции $\psi_j(x_j)$, $x_j\in[0,1]$, $j=1,...,d$; $\bar{\psi}=(\psi_1,...,\psi_d)$.

Нижним и верхним индексами Φ- функции $\psi(t), t\in[0,1]$ называются соответственно числа

$$\alpha_\psi=\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)},\qquad \beta_\psi=\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}.$$

Через $L^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}(I^d)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$ для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}=\left\{\int_0^1\psi_d^{\theta_d}(t_d)\left[\cdots\left[\int_0^1(\psi_1(t_1)\cdot f^{*_1,...,*_d}(t_1,...,t_d))^{\theta_1}\frac{dt_1}{t_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}\frac{dt_d}{t_d}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}}$$

Akishev G. On degrees of approximation of some classes by polynomials with respect to generalized Haar system.

Поступила 15 июля 2005 г., опубликована 16 марта 2006 г.

конечна, где $f^{*_1,...,*_d}(t_1,...,t_d) \equiv f^{*_1,...,*_d}(\bar{t})$- невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных.

Для функций $\psi_j(t) = t^{\frac{1}{q_j}}$, $j = 1,...,d$ пространства $L^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}(I^d)$,рассмотрены в [1], [2]. В этом случае будем пользоваться обозначениями $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^d)$, и вместо $\|\cdot\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}$, соответственно будем писать $\|\cdot\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}$.

Через $C(q,p,r,...)$ обозначим положительные постоянные , зависящие от указанных параметров .

Запись $A \asymp B$ означает , что существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие , что $c_1 A \le B \le c_2 A$.

Рассмотрим обобщенную систему Хаара , определенную на отрезке $[0,1]$. Пусть дана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел $p_n \ge 2$ для всех $n = 1,2,...$. Обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\} = \{\chi_n(t)\}$ определяется следующим образом ([3], [4]): положим $\chi_1(t) \equiv 1$ на отрезке $[0,1]$. Заданное натуральное число $n \ge 2$ представляется в виде $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s$, где $m_k = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$; $\quad k = 1,2,...;\quad r = 0,1,...,m_k - 1;\quad s = 1,2,...,p_{k+1} - 1$.

Через A обозначим множество точек вида $\frac{l}{m_k}$ на [0,1]. Тогда если $t \in B \equiv [0,1] \setminus A$, то разложение $t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{m_k}$, $\quad \alpha_k(t) = 0,1,...,p_k - 1$ единственно . Далее , определим функцию $\chi_n(t) \equiv \chi^s_{k,r}(t)$ следующим образом

$$\chi_n(t) = \chi^s_{k,r}(t) = \begin{cases} \sqrt{m_k} exp\left\{\frac{2\pi i s \alpha_{k+1}(t)}{p_{k+1}}\right\}, & t \in \left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right) \cap B, \\ 0, & t \notin \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right]. \end{cases}$$

Пользуясь тем , что множество B всюду плотно на [0,1], функцию $\chi_m(t)$ по непрерывности продолжим на интервал $\left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right)$. Затем в точках разрыва эту функцию положим равной полусумме ее предельных значений справа и слева ,а на концах отрезка [0,1] ее предельным значениям изнутри отрезка. Таким образом , определенная система $\chi\{p_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве L_1 (см. [3], [4]). Далее будем считать , что $m_{-1} = 0$, $m_0 = 1$.

Пусть даны $\{p^{(j)}_{n_j}\}$- последовательности натуральных чисел $p^{(j)}_{n_j} \ge 2$; $\quad n_j = 1,2,...;\quad j = 1,2,...,d$ и $m^{(j)}_{n_j} = p^{(j)}_1 \cdot ... \cdot p^{(j)}_{n_j}$.

Через $\{\chi_{\bar{n}}(\bar{x})\} = \left\{\prod\limits_{j=1}^{d} \chi_{n_j}(x_j)\right\}$ обозначим кратную обобщенную систему Хаара ; $a_{\bar{n}}(f)$- коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^d)$ по этой системе.

Пусть

$$T_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{k_1=1}^{n_1} ... \sum_{k_d=1}^{n_d} a_{k_1,...,k_d} \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j) = \sum_{\bar{1} \le \bar{k} \le \bar{n}} a_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}(\bar{x})$$

полином по обобщенной системе Хаара порядка n_j по переменной x_j. Здесь неравенство $\bar{k} \le \bar{n}$ понимается в том смысле , что $k_j \le n_j$, для всех $j = 1,...,d$.

Положим

$$\delta_{\bar{\nu}}(f,\bar{x}) = \sum_{k_1=m^{(1)}_{\nu_1-1}+1}^{m^{(1)}_{\nu_1}} ... \sum_{k_d=m^{(d)}_{\nu_d-1}+1}^{m^{(d)}_{\nu_d}} a_{\bar{k}}(f) \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

$$S^{\bar{\gamma}}_n(f,\bar{x}) = \sum_{<\bar{s},\bar{\gamma}><n} \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}),$$

где $<\bar{s},\bar{\gamma}>= \sum\limits_{j=1}^{d} s_j\gamma_j$.

$$U_{\bar{n}}(f,\bar{x}) = \sum_{e\subset\{1,...,d\}} \sum_{\bar{s}\in G_e(\bar{n})} \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}),$$

здесь и в дальнейшем

$$G_e(\bar{n}) = \{\bar{s} = (s_1,...,s_d) \in \mathbb{Z}^d_+ : \quad s_j \le n_j, j \in e, \quad s_j > n_j, j \notin e\}.$$

Через $\tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}$ обозначим множество всех функций $f \in L^*_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}(I^d)$ для которых

$$\|\delta_{\bar{\nu}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}} \le \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1}{m^{(j)}_{\nu_j}}\right)^{r_j}, \quad 0 < r_j \le 1, \quad j = 1,...,d.$$

Порядок приближения класса H^r_p по норме пространства Лебега $L_q(I^d)$ полиномами по кратной системе Хаара с гармониками из ступенчатых гиперболических крестов исследовали А.В. Андрианов [5], П. Освальд [6],в пространстве Лоренца с анизотропной нормой в [7], в симметричных пространствах [8].

В предлагаемой статье доказаны неравенства разных метрик для полиномов по кратной обобщенной системе Хаара ,достаточное условие принадлежности функции $f \in L^*_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}(I^d)$ пространству $L^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}(I^d)$, и установлена оценка порядка приближения класса $\tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}$ частичными суммами $S^{(\bar{\gamma})}_n(f,\bar{x})$.

Лемма А. (см. [9]) *Пусть* $0 < \theta < +\infty$, *даны положительные числа* a_k, $b_k, k = 0,1,2,...$.

a) Если $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \le C\cdot a_n$ *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k\Big)^{\theta} \le C\cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b^{\theta}_n$

b) Если $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k \le C\cdot a_n$ *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\Big)^{\theta} \le C\cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b^{\theta}_n$.

Лемма Б. (см.[10].) *Если* $1 < \alpha_\psi, \beta_\psi < 2$ *для* Φ- *функции* $\psi(x), x\in[0,1]$, *то при любом* $q > 0$ *выполняются соотношения*

$$\int_0^x \frac{\psi^q(t)}{t} dt = O(\psi^q(x)), x \to +0$$

$$\int_x^1 [t\psi^q(t)]^{-1} dt = O(\psi^{-q}(x)), x \to +0$$

Лемма В. (см.[10].) *Пусть даны* Φ- *функции* $\varphi(x),\psi(x), x \in [0,1]$. *Если* $\alpha_\varphi > \beta_\psi > 1$, *то для функции*

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, & \textit{если } x \in (0,1] \\ 0, & \textit{если} x = 0 \end{cases}$$

существует Φ- *функция* $\theta_1(x)$ *такая , что* $\theta(x) \asymp \theta_1(x), x \in [0,1]$ *и* $\alpha_{\theta_1} > 1$.

Лемма 1. *Пусть* $1 \le \theta_j < +\infty$ *и даны* Φ- *функции* φ_j, *удовлетворяющие условиям* $1 < \alpha_{\varphi_j} \le \beta_{\varphi_j} < 2, j = 1, 2, ..., d$. *Тогда для любого полинома*

$$T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x}) = \sum_{k_d=1}^{m_{n_d}^{(d)}} ... \sum_{k_1=1}^{m_{n_1}^{(1)}} a_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in I^d$$

имеет место неравенство

$$\|T_{\bar{m}_{n_d}}\|_\infty \le C(\theta, d) \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})} \|T_{\bar{m}_{n_d}}\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}.$$

Доказательство леммы 1 следует из равенства

$$T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x}) = \int_{I^d} T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{y}) \prod_{j=1}^{d} D_{m_{n_j}^{(j)}}(y_j - x_j) d\bar{y},$$

неравенства Гельдера и оценки нормы ядра Дирихле $D_n(t)$ (см. [11], лемму 1).

Замечание 1. *В случае* $d = 1$ *из леммы 1 следуют результаты [11],[12].*

Лемма 2. *Пусть* Φ- *функция* $g(t)$ *удовлетворяет условию* $\alpha_g > 1$ *и* $0 < \theta < \infty$, $\{\nu_s\}_{s=0}^{\infty}$- *возрастающая последовательность положительных чисел* ν_s *и* $\nu_0 = 1$, $\nu_{s+1} \ge 2 \cdot \nu_s$, $s = 0, 1, ...$ *Тогда для последовательности неотрицательных чисел* $\{b_s\}$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} b_s \right)^{\theta} \int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}} g^{-\theta}(t) \frac{dt}{t} \le C(\theta) \cdot \sum_{s=1}^{\infty} g^{-\theta}(\nu_s^{-1}) \cdot b_s^{\theta}.$$

Доказательство. Если

$$\sum_{s=1}^{\infty} g^{-\theta}(\nu_s^{-1}) \cdot b_s^{\theta} = +\infty$$

то утверждение леммы очевидно . Поэтому будем считать , что

$$\sum_{s=1}^{\infty} g^{-\theta}(\nu_s^{-1}) \cdot b_s^{\theta} < +\infty. \tag{1}$$

Так как $\alpha_g > 1$, то существует число p_0 такое, что $1 < 2^{\frac{1}{p_0}} < \alpha_g$. Рассмотрим функцию

$$G(t) = \begin{cases} \frac{g(t)}{\gamma(t)}, & t \in (0,1], \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

где $\gamma(t) = t^{\frac{1}{p_0}}$.

В силу леммы В существует Φ- функция $G_1(t)$ такая , что $G(t) \asymp G_1(t)$ и $\alpha_{G_1} > 1$.

Поэтому согласно лемме Б

$$\int_x^1 G_1^{-\theta}(t) \frac{dt}{t} = O(G_1^{-\theta}(x)). \tag{2}$$

Отметим ,что в силу того, что $\frac{1}{G_1(t)}\downarrow$ из (1) следует

$$\sum_{s=0}^{\infty}(\nu_s^{\frac{1}{p_0}}b_s)^{\theta}<+\infty.$$

Пусть $1<\theta<+\infty$, тогда применяя неравенство Гельдера и учитывая , что $\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n}\geq 2\ \forall n\in\mathbb{N}$, получим

$$\sum_{s=n+1}^{\infty}b_s\leq C(\theta)\nu_{n+1}^{-\frac{1}{p_0}}\left[\sum_{s=n+1}^{\infty}(\nu_s^{\frac{1}{p_0}}b_s)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Учитывая это неравенство и меняя порядок суммирования , будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=n+1}^{\infty}b_s\right)^{\theta}\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}g^{-\theta}(t)\frac{dt}{t}\leq C(\theta)\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\left(\nu_s^{\frac{1}{p_0}}b_s\right)^{\theta}\sum_{n=1}^{s-1}\nu_{n+1}^{-\frac{\theta}{p_0}}\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}g^{-\theta}(t)\frac{dt}{t}. \tag{3}$$

Неравенство (2) влечет

$$\sum_{n=1}^{s-1}\nu_{n+1}^{-\frac{\theta}{p_0}}\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}g^{-\theta}(t)\frac{dt}{t}\leq C(\theta)\cdot\frac{\nu_s^{-\frac{\theta}{p_0}}}{g^{\theta}(\nu_s^{-1})}.$$

Поэтому из (3) следует утверждение леммы в случае $1<\theta<+\infty$.

Если $0<\theta\leq 1$, то применяя неравенство Иенсена и лемму В , можно убедиться в справедливости утверждения леммы.

Лемма 3. *Пусть $0<\theta<+\infty$, $\{\nu_s\}_{s=0}^{\infty}$- возрастающая последовательность положительных чисел ν_s и $\nu_0=1$, $2\cdot\nu_s\leq\nu_{s+1}$, $s=0,1,...;$ и Φ- функция $\psi(t)$, $t\in[0,1]$ удовлетворяет условию $1<\alpha_{\psi}\leq\beta_{\psi}<2$. Тогда для любой последовательности $\{b_s\}$ неотрицательных чисел выполняется неравенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}b_s\right)^{\theta}\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}\leq C(\theta)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\psi^{\theta}(\nu_n^{-1})\cdot b_n^{\theta}.$$

Доказательство. Так как $\psi(t)\uparrow$, то

$$\psi^{\theta}(\nu_{s+1}^{-1})\leq(\ln 2)^{-1}\int_{\nu_{s+1}^{-1}}^{\nu_s^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}.$$

Поэтому в силу леммы Б справедлива оценка

$$\sum_{s=n}^{\infty}\int_{\nu_{s+1}^{-1}}^{\nu_s^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}\leq\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}+C(\theta)\psi^{\theta}(\nu_{n+1}^{-1})\leq C(\theta)\cdot\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}$$

Теперь пользуясь леммами А и Б получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}b_s\right)^{\theta}\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}\leq C(\theta)\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{\theta}\cdot\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}\leq$$

$$\leq C(\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\psi^{\theta}(\nu_n^{-1})\cdot b_n^{\theta}.$$

Лемма доказана.

Пусть даны числа $\theta_j \in [1, +\infty), j = 1, ..., d$. Через $l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)$ обозначают пространство всех числовых последовательностей $\{a_{\bar s}\}_{\bar s \in \mathbb{Z}_+^d}$ для которых

$$\|\{a_{\bar s}\}\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)} = \left\{\sum_{s_d=0}^{\infty}\left[...\left\{\sum_{s_1=0}^{\infty}|a_{\bar s}|^{\theta_1}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}...\right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}} < +\infty.$$

Положим $Y^d(n, \bar\gamma) = \{\bar s = (s_1, ..., s_d) \in \mathbb{Z}_+^d : \ <\bar s, \bar\gamma> \geq n\}$, где $\bar\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_d)$.

Лемма 4. *Пусть $\bar\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_d)$, $\bar\gamma' = (\gamma_1', ..., \gamma_d')$ такие , что $\gamma_1 = ... = \gamma_\nu = \gamma_1' = ... = \gamma_\nu' = 1 < \gamma_j' < \gamma_j$, $j = \nu + 1, ..., d$; $b_{\bar s}(n, \bar\gamma, \bar\gamma') = p^{-\alpha<\bar s, \bar\gamma>}$, если $\bar s \in Y^d(n, \bar\gamma')$, и $b_{\bar s}(n, \bar\gamma, \bar\gamma') = 0$, если $\bar s \notin Y^d(n, \bar\gamma')$, $\alpha > 0$, $p \geq 2$. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\|\{b_{\bar s}(n, \bar\gamma, \bar\gamma')\}\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)} \leq C(\theta, \gamma, \gamma') \cdot p^{-n\alpha} \cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Эта лемма доказана в [13] методом математической индукции по размерности d .

Замечание 2. *При $\theta_1 = ... = \theta_d$ лемма 4 ранее доказана В.Н. Темляковым [14].*

Положим

$$\bar f(\bar t) = \sup_{|E_d| \geq t_d}\frac{1}{|E_d|}\int_{E_d} ... \sup_{|E_1| \geq t_1}\frac{1}{|E_1|}\int_{E_1}|f(x_1, ..., x_d)|dx_1...dx_d,$$

где $|E_j|-$ мера Лебега множества $E_j \subset [0, 1]$.

Теорема 1. *Пусть $1 \leq \theta_j < +\infty$ и даны Φ- функции $\bar\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_d)$, удовлетворяющие условиям $1 < \alpha_{\varphi_j} \leq \beta_{\varphi_j} < 2$, $j = 1, ..., d$. Тогда для любой функции $f \in L^*_{\bar\varphi, \bar\theta}(I^d)$ справедливо неравенство*

$$\bar f(\bar t) \leq C(\theta, d)\left\{\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty} ... \sum_{s_1=n_1+1}^{\infty}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\varphi, \bar\theta} + \right.$$

$$\left. + \sum_{e \subset \{1, ..., d\}}\prod_{j \notin e}\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{\bar s \in G_e(\bar n)}\prod_{j \in e}\frac{1}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\varphi, \bar\theta}\right\},$$

для $\bar t = (t_1, ..., t_d) \in (\frac{1}{m^{(j)}_{n_1+1}}, \frac{1}{m^{(j)}_{n_1}}] \times ... \times (\frac{1}{m^{(d)}_{n_d+1}}, \frac{1}{m^{(d)}_{n_d}}]$.

Доказательство. Пусть $E_j \subset [0, 1]$ измеримые по Лебегу множества. Тогда по свойству интеграла имеем

$$\int_{E_d} ... \int_{E_1}|f(x_1, ..., x_d)|dx_1...dx_d \leq \int_{E_d} ... \int_{E_1}|f(\bar x) - U_{\bar n}(f, \bar x)|d\bar x +$$

$$+ \int_{E_d} ... \int_{E_1}|U_{\bar n}(f, \bar x)|d\bar x. \tag{4}$$

Применяя неравенство Гёльдера получим

$$\int_{E_d} ... \int_{E_1}|f(\bar x) - U_{\bar n}(f, \bar x)|d\bar x \leq C \cdot \prod_{j=1}^{d}\frac{|E_j|}{\varphi_j(|E_j|)}\|f - U_{\bar n}(f)\|^*_{\bar\varphi, \bar\theta}. \tag{5}$$

Пусть $e=\{1,...,i\}\subset\{1,...,d\}$. Тогда по переменным $x_1,...,x_i$ применяя неравенство разных метрик (см. лемму 1), а по остальным переменным неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\int_{E_d}\cdots\int_{E_1}\left|\sum_{\bar s\in G_e(\bar n)}\delta_{\bar s}(f,\bar x)\right|d\bar x\le$$

$$\le C(d)\cdot\prod_{j\in e}|E_j|\cdot\prod_{j\notin e}\frac{|E_j|}{\varphi_j(|E_j|)}\sum_{\bar s\in G_e(\bar n)}\prod_{j\in e}\frac{1}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar s}\|^*_{\bar\varphi,\bar\theta}. \tag{6}$$

Для остальных множеств $e\subset\{1,...,d\}$ неравенство (6) доказывается аналогично.

Далее учитывая, что $|E_j|\ge t_j$ и свойства функции φ_j, из неравенств (4)-(6) получим

$$\prod_{j=1}^d|E_j|^{-1}\int_{E_d}\cdots\int_{E_1}|f(\bar x)|d\bar x\le C\cdot\left\{\prod_{j=1}^d\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{s_d=n_d+1}^\infty\cdots\sum_{s_1=n_1+1}^\infty\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\varphi,\bar\theta}+\right.$$

$$\left.+\sum_{e\subset\{1,...,d\}}\prod_{j\notin e}\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{\bar s\in G_e(\bar n)}\prod_{j\in e}\frac{1}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\varphi,\bar\theta}\right\}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $1<\alpha_{\psi_j}\le\beta_{\psi_j}<\alpha_{\varphi_j}\le\beta_{\varphi_j}<2$, $1\le\theta_j<+\infty$, $j=1,...,d$. *Если* $f\in L^*_{\bar\varphi,\bar\theta}(I^d)$ *и*

$$\left\{\prod_{j=1}^d\frac{\psi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\varphi,\bar\theta}\right\}_{\bar s\in\mathbb{Z}^d_+}\in l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}^d_+)$$

то $f\in L^*_{\bar\psi,\bar\theta}(I^d)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^*_{\bar\psi,\bar\theta}\le C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^d\frac{\psi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\varphi,\bar\theta}\right\}_{\bar s\in\mathbb{Z}^d_+}\right\|_{l_{\bar\theta}}.$$

Доказательство. Для краткости записи обозначим

$$\mu_{n_j}=\int\limits_{(m_{n_j+1}^{(j)})^{-1}}^{(m_{n_j}^{(j)})^{-1}}\left(\frac{\psi_j(t)}{\varphi_j(t)}\right)^{\theta_j}\frac{dt}{t},\quad \beta_{n_j}=\int\limits_{(m_{n_j+1}^{(j)})^{-1}}^{(m_{n_j}^{(j)})^{-1}}\psi_j^{\theta_j}(t)\frac{dt}{t}.$$

В силу леммы 2 [1] имеет место неравенство

$$f^{*_1,...,*_d}(t_1,...,t_d)\le\bar f(t_1,...,t_d).$$

Поэтому пользуясь теоремой 1, имеем

$$\|f\|^*_{\bar\psi,\bar\theta}\le C\cdot\|\bar f\|^*_{\bar\psi,\bar\theta}\le C\left[\left\{\sum_{n_d=0}^\infty\mu_{n_d}\left[\ldots\right.\right.\right.$$

$$\ldots\left[\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_{n_1}\cdot\left(\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}\ldots\sum_{s_1=n_1+1}^{\infty}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right)^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\ldots\Bigg]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}\Bigg\}^{\frac{1}{\theta_d}}+$$

$$+\sum_{e\subset\{1,\ldots,d\}}\left\{\sum_{n_d=0}^{\infty}\int\limits_{(m^{(d)}_{n_d+1})^{-1}}^{(m^{(d)}_{n_d})^{-1}}\psi_d^{\theta_d}(t_d)\cdot t_d^{-1}\left[\ldots\left[\sum_{n_1=0}^{\infty}\int\limits_{(m^{(1)}_{n_1+1})^{-1}}^{(m^{(1)}_{n_1})^{-1}}\psi_1^{\theta_1}(t_1)\cdot t_1^{-1}\times\right.\right.\right.$$

$$\times\left(\prod_{j\notin e}\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{\bar{s}\in G_e(\bar{n})}\prod_{j\in e}\frac{1}{\varphi_j((m^{(j)}_{n_{s_j}})^{-1})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right)^{\theta_1}dt_1\Bigg]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\ldots$$

$$\ldots\ \Big]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}dt_d\Big\}^{\frac{1}{\theta_d}}\Bigg]=C\cdot\left[J_1+\sum_{e\subset\{1,\ldots,d\}}J_e\right]. \tag{7}$$

Пусть $e=\{1,2,\ldots,i\}$, $i\le d$. Тогда

$$J_e=C\cdot\left\{\sum_{n_d=0}^{\infty}\mu_{n_d}\left[\ldots\left[\sum_{n_{i+1}=0}^{\infty}\mu_{n_{i+1}}\left[\sum_{n_i=0}^{\infty}\beta_{n_i}\left[\ldots\left[\sum_{n_1=0}^{\infty}\beta_{n_1}\times\right.\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\times\left(\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}\ldots\sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty}\sum_{s_i=1}^{n_i}\ldots\sum_{s_1=1}^{n_1}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{\varphi_j((m^{(j)}_{s_j})^{-1})}\times\right.$$

$$\left.\times\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right)^{\theta_1}\Bigg]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\ldots\Bigg]^{\frac{\theta_i}{\theta_{i-1}}}\Bigg]^{\frac{\theta_{i+1}}{\theta_i}}\ldots\Bigg]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}\Bigg\}^{\frac{1}{\theta_d}}$$

По свойству нормы и в силу лемм 2 и 3 имеем

$$J_e\le C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=i+1}^{d}\mu_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\prod_{j=1}^{i}\beta_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}\ldots\sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty}\sum_{s_i=0}^{n_i}\ldots\sum_{s_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{\varphi_j((m^{(j)}_{s_j})^{-1})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right\}\right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d_+)}\le$$

$$\le\left\{\sum_{n_d=0}^{\infty}\mu_{n_d}\left[\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}\left\|\left\{\prod_{j=i+1}^{d-1}\mu_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\prod_{j=1}^{i}\beta_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\sum_{s_{d-1}=n_{d-1}+1}^{\infty}\ldots\sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty}\sum_{s_i=0}^{n_i}\ldots\sum_{s_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{\varphi_j((m^{(j)}_{s_j})^{-1})}\times$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right\}\right\|_{l_{\bar{\theta}_{d-1}}(\mathbb{Z}^{d-1})}\right]^{\theta_d}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}}\le$$

$$\leq C \cdot \left\{ \sum_{n_d=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_d((m_{n_d}^{(d)})^{-1})}{\varphi_d((m_{n_d}^{(d)})^{-1})} \right)^{\theta_d} \left\| \left\{ \prod_{j=i+1}^{d-1} \mu_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}} \times \right.\right.\right.$$

$$\times \prod_{j=1}^{i} \beta_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}} \sum_{s_{d-1}=n_{d-1}+1}^{\infty} \dots \sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty} \sum_{s_i=0}^{n_i} \dots \sum_{s_1=0}^{n_1} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{\varphi_j((m_{s_j+1}^{(j)})^{-1})} \times$$

$$\left.\left.\left. \times \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*} \right\} \right\|_{l_{\bar{\theta}_{d-1}}(\mathbb{Z}^{d-1})}^{\theta_d} \right\}^{\frac{1}{\theta_d}} \leq \dots$$

$$\dots \leq C(\theta, d) \left\{ \sum_{n_d=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_d((m_{n_d}^{(d)})^{-1})}{\varphi_d((m_{n_d}^{(d)})^{-1})} \right)^{\theta_d} \left\{ \dots \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1((m_{n_1}^{(1)})^{-1})}{\varphi_1((m_{n_1}^{(1)})^{-1})} \times \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. \times \|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*} \right)^{\theta_1} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right\}^{\frac{1}{\theta_d}} =$$

$$= C(\theta, q, d) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})} \|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*} \right\} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^d)}.$$

Таким образом, для $e = \{1, ..., i\}$, $i \leq d$ доказано неравенство

$$J_e \leq C(\theta, d) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})} \|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*} \right\} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^d)}. \qquad (8)$$

Для остальных e неравенство(8) доказывается аналогично.

Для оценки J_1 d-раз применяя лемму 2, имеем

$$J_1 \leq C(\theta, d) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})} \|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*} \right\} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^d)}. \qquad (9)$$

Теперь из неравенств (7), (8), (9) получим

$$\|f\|_{\bar{\psi},\bar{\theta}} \leq C(\theta, d) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})} \|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*} \right\} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^d)}.$$

Теорема доказана.

Далее рассмотрим пространства $L_{\bar{\psi},\bar{\theta}}^{*}(I^d)$, $L_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*}(I^d)$ в случае $\psi_j(t) = t^{\frac{1}{q_j}}$, $\varphi_j(t) = t^{\frac{1}{p_j}}$, $j = 1, ..., d$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., d$. *Если* $f \in L_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*}(I^d)$ *и*

$$f(\bar{x}) \sim \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d} a_{\bar{s}}(f) \prod_{j=1}^{d} \chi_{m_{s_j-1}^{(j)}+1}(x_j)$$

то имеет место неравенсто

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \geq C(q,\tau,d) \left\{ \sum_{s_d=1}^{\infty} \left(m_{s_d-1}^{(d)}\right)^{\theta_d \ \frac{1}{2}-\frac{1}{q_d}} \left[\ldots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} \left(m_{s_1-1}^{(1)}\right)^{\theta_1 \ \frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}} |a_{\bar{s}}(f)|^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \ldots \right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_d}}.$$

Доказательство. Для краткости обозначим

$$\mu_j(s_j) = \left(m_{s_j-1}^{(j)}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j}}, \quad j=1,...,d.$$

Положим

$$\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j} = \left[\sum_{s_j=1}^{\nu} (\mu_j(s_j))^{\theta_j} \left[\ldots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu} (\mu_1(s_1))^{\theta_1} |a_{\bar{s}}(f)|^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \ldots \right]^{\frac{\theta_j}{\theta_{j-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_j}},$$

где $\bar{\theta}_j = (\theta_1,...,\theta_j)$, $j=1,...,d$.

$$\sigma(f)_{\bar{\theta}} = \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} \mu_j(s_j) \cdot a_{\bar{s}}(f) \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^d} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}$$

Рассмотрим функцию

$$g_\nu(\bar{x}) = \sum_{s_d=1}^{\nu} \ldots \sum_{s_1=1}^{\nu} a_{\bar{s},\nu} \cdot \prod_{j=1}^{d} \chi_{m_{s_j-1}^{(j)}+1}(x_j),$$

где

$$a_{\bar{s},\nu} = (\sigma(f)_{\bar{\theta}})^{-\frac{\theta_d}{\theta_d'}} \cdot \prod_{j=1}^{d-1} \sigma_\nu^{\theta_{j+1}-\theta_j}(f)_{\bar{\theta}_j} \prod_{j=1}^{d} \left(m_{s_j-1}^{(j)}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j} \ \theta_j} |a_{\bar{s}}(f)|^{\theta_1-1} sign(a_{\bar{s}}(f)).$$

Покажем

$$\|g_\nu\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*} \leq C(\theta,d,q). \tag{11}$$

По определению чисел $a_{\bar{s},\nu}$ получим

$$I_\nu = \left\{ \sum_{s_d=1}^{\nu} \left(m_{s_d-1}^{(d)}\right)^{\theta_d' \ \frac{1}{2}-\frac{1}{q_d'}} \left[\ldots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu} \left(m_{s_1-1}^{(1)}\right)^{\theta_1' \ \frac{1}{2}-\frac{1}{q_1'}} |a_{\bar{s},\nu}|^{\theta_1'} \right]^{\frac{\theta_2'}{\theta_1'}} \ldots \right]^{\frac{\theta_d'}{\theta_{d-1}'}} \right\}^{\frac{1}{\theta_d'}} =$$

$$= (\sigma(f)_{\bar{\theta}})^{-\frac{\theta_d}{\theta_d'}} \cdot \left\{ \sum_{s_d=1}^{\nu} \left(m_{s_d-1}^{(d)}\right)^{\theta_d' \ \frac{1}{2}-\frac{1}{q_d'}} \left[\ldots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu} \left(m_{s_1-1}^{(1)}\right)^{\theta_1' \ \frac{1}{2}-\frac{1}{q_1'}} \times \right.\right.\right.$$

$$\times \prod_{j=1}^{d-1} \sigma_{\nu}^{(\theta_{j+1}-\theta_j)\cdot\theta_1'}(f)_{\bar\theta_j} \cdot \prod_{j=1}^{d} \left(m_{s_j-1}^{(j)}\right)^{\frac12-\frac1{q_j}\cdot\theta_j\cdot\theta_1'} |a_{\bar s}(f)|^{(\theta_1-1)\theta_1'}\Bigg]^{\frac{\theta_2'}{\theta_1'}}\ldots\Bigg]^{\frac{\theta_d'}{\theta_{d-1}'}}\Bigg\}^{\frac{1}{\theta_d'}} \tag{12}$$

Так как $\theta_j\cdot\theta_j' = \theta_j+\theta_j'$, то $\theta_j\cdot\theta_j'(\frac12-\frac1{q_j})+\theta_j'(\frac12-\frac1{q_j'}) = \theta_j(\frac12-\frac1{q_j})$.

Поэтому из (12) учитывая определение чисел $\sigma_\nu(f)_{\bar\theta_j}$ получим

$$I_\nu = (\sigma(f)_{\bar\theta})^{-\frac{\theta_d}{\theta_d'}}\cdot\left\{\sum_{s_d=1}^{\nu}\left(m_{s_d-1}^{(d)}\right)^{\theta_d\ \frac12-\frac1{q_d}}\left[\ldots\left[\sum_{s_1=1}^{\nu}\left(m_{s_1-1}^{(1)}\right)^{\theta_1\ \frac12-\frac1{q_1}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\prod_{j=1}^{d-1}\sigma_\nu^{(\theta_{j+1}-\theta_j)\cdot\theta_1'}(f)_{\bar\theta_j}\cdot|a_{\bar s}(f)|^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2'}{\theta_1'}}\ldots\right]^{\frac{\theta_d'}{\theta_{d-1}'}}\right\}^{\frac{1}{\theta_d'}}\le \tag{13}$$

$$\le(\sigma(f)_{\bar\theta})^{-\frac{\theta_d}{\theta_d'}}\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}\mu_j(s_j)\cdot a_{\bar s}(f)\right\}_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^d}\right\|_{l_{\bar\theta}}^{\frac{\theta_d}{\theta_d'}} = 1$$

Так как

$$\|\delta_{\bar s}(g_\nu)\|_{\bar\tau,\bar\theta}^{*} = \prod_{j=1}^{d}\left(m_{s_j-1}^{(j)}\right)^{\frac12-\frac1{\tau_j}}\cdot|a_{\bar s}(f)|,\ \ 1<\tau_j<q_j',\ \ j=1,...,d,$$

то пользуясь теоремой 2 и неравенстом (13) нетрудно убедиться

$$\|g_\nu\|_{\bar q',\bar\theta'}^{*}\le C(q,\theta,\tau,d)\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}(m_{s_j-1}^{(j)})^{\frac1\tau-\frac1{q_j'}}\right)\cdot\|\delta_{\bar s}(g_\nu)\|_{\bar\tau,\bar\theta'}^{*}\right\}_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^d}\right\|_{l_{\bar\theta'}} =$$

$$= C(q,\theta,\tau,d)\cdot I_\nu\le C(q,\theta,\tau,d)$$

Этим неравенство (11) доказано. Следовательно функция $\varphi_\nu = C_0 g_\nu\in L_{\bar q',\bar\theta'}^{*}(I^d)$ и $\|\varphi_\nu\|_{\bar q',\bar\theta'}^{*}\le 1$.

Далее в силу ортогональности обобщенной системы Хаара имеем

$$\int_{I^d} f(\bar x)g_\nu(\bar x)d\bar x = \sum_{s_d=1}^{\nu}\ldots\sum_{s_1=1}^{\nu}a_{\bar s}(f)\cdot a_{\bar s,\nu} =$$

$$=(\sigma(f)_{\bar\theta})^{-\frac{\theta_d}{\theta_d'}}\cdot\sum_{s_d=1}^{\nu}\ldots\sum_{s_1=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{d-1}\sigma_\nu^{\theta_{j+1}-\theta_j}(f)_{\bar\theta_j}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{d}\left(m_{s_j-1}^{(j)}\right)^{\frac12-\frac1{q_j}\ \theta_j}|a_{\bar s}(f)|^{\theta_1-1}sign(a_{\bar s}(f)) = (\sigma(f)_{\bar\theta})^{-\frac{\theta_d}{\theta_d'}}.$$

$$\sum_{s_d=1}^{\nu}\left(m_{s_d-1}^{(d)}\right)^{\theta_d\ \frac{1}{2}-\frac{1}{q_d}}\left[...\left[\sum_{s_1=1}^{\nu}\left(m_{s_1-1}^{(1)}\right)^{\theta_1\ \frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}}|a_{\bar{s}}(f)|^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}...\right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}. \quad (14)$$

Известно, что (см. [1])

$$\int_{I^d}|f(\bar{x})g(\bar{x})|d\bar{x}\le\int_{I^d}f^{*_1,\dots,*_d}(t_1,...,t_d)\cdot g^{*_1,\dots,*_d}(t_1,...,t_d)dt_1...dt_d.$$

К правой части этого неравенства применяя неравенство Гёльдера в пространстве со смешанной нормой (см. [15], стр. 19) имеем

$$\sup\left\{\int_{I^d}|f(\bar{x})g(\bar{x})|d\bar{x}:\quad g\in L^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'}(I^d),\quad \|g\|^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'}\le 1\right\}\le\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}, \qquad (15)$$

где $\bar{q'}=(q_1',...,q_d')$, $\bar{\theta}'=(\theta_1',...,\theta_d')$, $q_j'=\frac{q_j}{q_j-1}$, $\theta_j'=\frac{\theta_j}{\theta_j-1}$, $j=1,...,d$.

Теперь из соотношений (11) , (14) ,(15) получим

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\ge C(q,\theta,\tau,d)\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}\mu_j(s_j)\cdot a_{\bar{s}}(f)\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^d_+}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_d}{\theta_d'}}\times$$

$$\times\sum_{s_d=1}^{\nu}\left[...\left[\sum_{s_1=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{d}\left(\mu_j(s_j)\right)^{\theta_1}|a_{\bar{s}}(f)|^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}...\right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}.$$

В этом неравенстве переходя к пределу при $\nu\to+\infty$ убедимся в справедливости утверждения теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $1\le p_j<q_j<+\infty$, $1\le\theta_j<+\infty$, $j=1,...,d$; $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}<r_1=...=r_\nu<r_{\nu+1}\le...\le r_d$, $\gamma_j=\frac{r_j}{r_1}$, $j=1,...,d$.

Тогда имеет место соотношение

$$\sup_{f\in\tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}}\|f-S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\le C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}(m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d_+)}.$$

Доказательство. Пусть $f\in\tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$. Применяя теорему 2 при $\psi_j(t)=t^{\frac{1}{q_j}}$, $\varphi_j(t)=t^{\frac{1}{p_j}}$ к функции $f-S_n^{\bar{\gamma}}(f)\in L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^d)$, будем иметь

$$\|f-S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\le C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}(m_{s_j}^{(j)})^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}}\cdot\|\delta_{\bar{s}}(f-S_n^{\bar{\gamma}}(f))\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}}\right\}\right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d_+)}. \qquad (16)$$

Так как $\delta_{\bar{s}}(f-S_n^{\bar{\gamma}}(f))=0, \forall\bar{s}\notin Y^d(\bar{\gamma},n)$ и $\delta_{\bar{s}}(f-S_n^{\bar{\gamma}}(f))=\delta_{\bar{s}}(f), \forall\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)$, то по определению класса $\tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$ из (16) получим

$$\|f-S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\le C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}(m_{s_j}^{(j)})^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}}\cdot\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}\le$$

$$\leq C \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}$$

для любой функции $f \in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$.

Теорема 5. *Пусть* $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $1 \leq \theta_j < +\infty$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < 1$, $j = 1, ..., d$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\sup_{f\in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \asymp \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}.$$

Доказательно. Пусть $f \in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$. Тогда при $\psi_j(t) = t^{\frac{1}{q_j}}$, $\varphi_j(t) = t^{\frac{1}{p_j}}$, $j = 1, ..., d$ применяя теорему 2 будем иметь

$$\|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \leq C \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}.$$

Этим оценка сверху доказана.

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = \sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^d_+} \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_j})} \prod_{j=1}^{d} \chi_{m^{(j)}_{s_j-1}+1}(x_j)$$

где $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{N}^d : \quad m_{s_j-1} < k_j \leq m_{s_j}, \quad j = 1, ..., d\}$.

В силу соотношение (см.[11], стр.323)

$$\left\| \prod_{j=1}^{d} \chi_{m^{(j)}_{s_j-1}+1}(x_j) \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \asymp \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_j}}, \quad 1 < p_j < \infty, j = 1, ..., d$$

имеем $C_0 \cdot f_0 \in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$, где C_0-некоторая постоянная. Теперь пользуясь теоремой 3 получим

$$\|f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \geq C(q,\theta,r) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., d$ *и обобщенные системы Хаара* $\chi\{p_{n_j}^{(j)}\}$ *определены числами* $p_{n_j}^{(j)} = p \geq 2$ $\forall n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, ..., d$; $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \leq ... \leq r_d$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = 1, ..., d$; $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = ... = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu}$, $r_1(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}) < r_j(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})$, $j = \nu + 1, ..., d$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\sup_{f\in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \asymp p^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Доказательство. В силу теоремы 5 и леммы 4 нетрудно убедиться, что

$$\sup_{f\in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}} \|f-S^{\bar{\gamma}}_n(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \asymp C(q,\theta,d,p)\cdot \left\| \left\{ p^{-\sum\limits_{j=1}^{d} s_j(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)} \asymp$$

$$\asymp p^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Замечание 3. *Отметим, что для системы Хаара (т.е. $p_{n_j}=2$ $\forall n_j\in\mathbb{N}$, $j=1,...,d$) следствие 1 ранее анонсировано в [7].*

Список литературы

[1] A.P. Blozinski, *Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms* ,Transactions American Mathematical Society, **263**, (1981), 146-167.

[2] Е.Д. Нурсултанов, *О коэффициентах кратных рядов Фурье L_p-пространств*, Известия Российской Академии Наук, Серия Математическая, **64**, (2000), 95-121.

[3] Б.И. Голубов, *Об одном классе полных ортогональных систем*, Сибирский Математический Журнал, **9**, (1968), 297-314.

[4] Н.Я. Виленкин, *Об одном классе полных ортогональных систем*, Известия Академии Наук СССР, Серия Математическая,**11**, (1947), 363-400.

[5] А.В. Андрианов, *Приближение функций из классов MH^r_q полиномами Хаара*, Математические Заметки, **66**, (1999), 323-335.

[6] П. Освальд, *Об N-членных приближениях по системе Хаара в H^s- нормах*, Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа, Москва, 1999, 137-163.

[7] Г. Акишев, *О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца с анизотропной нормой*, Тезисы докл. 3-международ. научн. конференц. "Проблемы дифференц. урав. анализа и алгебры", Актобе, (2003), 9-10

[8] Г. Акишев, *О порядках приближения функциональных классов полиномами по обобщенной системе Хаара*, Известия Вузов, Серия Матем., **3**, (2005), 3-12 .

[9] H. Johonsson, *Embedding of H^{ω}_pin some Lorentz spases*, Reslerch Report University Umea , **6**, (1975), 3-38

[10] С.В. Лапин, *Некоторые теоремы вложения для произведений функций*, Рукопись депонирована в ВИНИТИ, **1036-80**, (1980), 3-31

[11] Г. Акишев, *Обобщенная система Хаара и теоремы вложения в симметричные пространства*, Фундамент. и Приклад. Матем., **8**, (2002), 319-334.

[12] С. Тазабеков , Е.С. Смаилов, *О некоторых достаточных условиях вложения в пространства Лоренца*, Известия Академии Наук Казахской ССР, Серия Физ.-Матем., **5**, (1989), 50-54.

[13] Г. Акишев, *Оценка порядка приближения классов Бесова тригонометрическими полиномами* , Вестник Карагандинского Университета, Серия Математика, **3**, (2004), 9-16.

[14] В.Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Труды Математического Института АН СССР, **178**, (1986), 3-112

[15] О.В. Бесов , В.П. Ильин , С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975

Габдолла Акишевич Акишев
Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова ,
проспект Республики 24, кв.116,
470071, Караганда, Казахстан
E-mail address: akishev@kargu.krg.kz