S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 89-91 (2006) УДК 512.544
Краткие сообщения MSC 20E25

О p-ГРУППАХ С ОБОБЩЕННО КОНЕЧНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

А.М. ПОПОВ

Abstract. We study groups with generally finite element.

Неединичный элемент a группы G с конечными подгруппами вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ $(g \in G)$ называется *конечным*, и называется *H-конечным*, если указанное условие выполняется для $g \in G \setminus H$. В случае, когда это условие выполняется почти для всех элементов a^g, т.е., кроме, может быть, конечного числа элементов, элемент a будем называть почти конечным (почти H-конечным). В частности, во всех сечениях группы Шункова по конечным подгруппам элементы простых порядков конечны.

Ослабление понятия конечного элемента даёт *условие* (a, b)*-конечности*, когда неединичный элемент a из G порождает почти с каждым элементом (т.е. за исключением, быть может, лишь конечного числа) сопряженным с $b \neq 1$, конечную подгруппу. Элемент a группы G назовём *обобщенно конечным*, если в каждом сечении группы G по периодической подгруппе, содержащем неединичный образ $\overline{a}$ элемента a, для подходящего неединичного элемента $\overline{b}$ выполняется условие $(\overline{a}, \overline{b})$-конечности. Легко убедиться, что конечный элемент группы одновременно является и обобщённо конечным.

Теорема 1. *Примарная группа G, обладающая обобщенно конечным элементом a простого порядка p с черниковским централизатором $C_G(a)$, является черниковской группой.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые известные результаты.

Предложение 1 (Лемма Дицмана)**.** *В произвольной группе конечное инвариантное множество элементов конечного порядка порождает конечную подгруппу* [2].

Popov, A.M., On p-groups with generally finite element.

Представлена А.А.Махневым 13 марта 2006, опубликована 16 марта 2006.

Предложение 2 (Теорема Черникова)**.** *Класс черниковских групп замкнут относительно расширений* [1].

Предложение 3 (Теорема Мерзлякова)**.** *Группа внешних автоморфизмов* $\mathrm{Out}\,(G)$ *произвольной черниковской группы* G *почти вся не имеет кручения* ([3], см. также [4], стр. 458).

Предложение 4 (Теорема Блэкберна)**.** *Локально конечная* p*-группа — черниковская, если в ней централизатор некоторого элемента порядка* p *— черниковская группа* [5].

Предложение 5 ([6], теорема 1)**.** *Пусть* G *—* p*-группа,* a *— ее элемент простого порядка* p *и* $C_G(a)$ *— черниковская группа. Тогда либо* G *— черниковская группа, либо* G *обладает не локально конечным сечением по черниковской подгруппе, в котором максимальная локально конечная подгруппа, содержащая образ элемента* a*, единственна.*

Предположим, что теорема 1 не верна и пусть G — соответствующий контрпример. Тогда по предложению 5 группа G обладает не локально конечным сечением $\overline{G}_1$ по черниковской подгруппе, в котором максимальная локально конечная подгруппа, содержащая образ элемента a, единственна. Обозначим эту подгруппу через M, а через $\overline{a}$ образ элемента a.

Покажем, что сечение $\overline{G}_1$ может быть выбрано без нетривиальных черниковских нормальных делителей. Действительно, пусть $1 \neq \overline{T}_1 \lhd \overline{G}_1$ и $\overline{T}_1$ — черниковская подгруппа. Так как $C_{\overline{G}_1}(\overline{a})$ — конечная или черниковская группа, то из $\overline{a} \in \overline{T}_1$ следует, что $C_{\overline{G}_1}(\overline{T}_1)$ — черниковская группа и поскольку по предложению 2 класс черниковских групп замкнут относительно расширений, то $\overline{T}_1 C_{\overline{G}_1}(\overline{T}_1)$ также черниковская группа. По предложению 3 $|\overline{G}_1 : \overline{T}_1 C_{\overline{G}_1}(\overline{T}_1)| < \infty$ и, значит, $\overline{G}_1$ — черниковская группа. Противоречие, показывающее, что $\overline{a} \notin \overline{T}_1$.

Перейдём к фактор-группам и введём обозначение: $G_2^1 = \overline{G}_1/\overline{T}_1$. Пусть T_2^1 — черниковская подгруппа из G_2^1 и $T_2^1 \lhd G_2^1$. По тем же соображениям, что и выше $a_1 \notin T_2^1$ (a_1 — образ элемента $\overline{a}$). Переходя к прообразам, обозначим через $\overline{T}_2$ — прообраз T_2^1 в $\overline{G}_1$. Очевидно, что $\overline{T}_1 < \overline{T}_2$ и $\mathrm{rank}\overline{T}_1 < \mathrm{rank}\overline{T}_2$. Продолжим этот процесс и предположим, что он не обрывается на конечном шаге. Тогда мы построим бесконечно возрастающую цепь подгрупп:

$$\overline{T}_1 < \overline{T}_2 < \ldots \overline{T}_n < \ldots .$$

Рассмотрим объединение $\overline{T}_\omega$ подгрупп этой цепи. В силу предложения 4 $\overline{T}_\omega$ должна быть черниковской группой, с другой стороны, по построению, $\mathrm{rank}\,\overline{T}_\omega = \infty$. Противоречие. Таким образом указанный процесс оборвётся на конечном шаге. Значит, без ограничения общности, можно считать, что уже в самом сечении $\overline{G}_1$ нет нормальных черниковских подгрупп.

Так как a — обобщённо конечный элемент, то в сечении $\overline{G}_1$ найдётся элемент $\overline{b}_1$ такой, что почти все подгруппы $\langle \overline{a}, \overline{b}_1^{\overline{g}} \rangle \quad (\overline{g} \in \overline{G}_1)$ конечны. В силу единственности подгруппы M все элементы $\overline{b}_1^{\overline{g}}$, для которых $|\langle \overline{a}, \overline{b}_1^{\overline{g}} \rangle| < \infty$, содержатся в M. Докажем, что для любого элемента $\overline{b}_1^{\overline{g}}$ подгруппа $\langle \overline{a}, \overline{b}_1^{\overline{g}} \rangle$ конечна.

Пусть $\Omega = \{\overline{b}_1^{\overline{g}} |\ |\langle \overline{a}, \overline{b}_1^{\overline{g}} \rangle| < \infty\}$, $\Gamma = \{\overline{b}_1^{\overline{g}} |\ |\langle \overline{a}, \overline{b}_1^{\overline{g}} \rangle| = \infty\}$ — непустое множество и $\Sigma = \Omega \cup \Gamma$. Ясно, что $\Omega \subset M$. Будем действовать полной частью группы M, обозначаемой $\widetilde{M}$, на множестве Σ. Так как $\Omega \subset M$, то $\widetilde{M}$ оставляет множество

Ω на месте. Поскольку Σ — инвариантное множество, то Γ также будет инвариантно относительно действия $\widetilde{M}$. По определению условия (a,b)-конечности множество Γ конечно, а полная группа $\widetilde{M}$ не содержит подгрупп конечного индекса. Отсюда вытекает, что $\Gamma \subset C_G(\widetilde{M})$. Кроме того $\overline{a} \in N_G(\widetilde{M})$.

Далее перейдём к фактор-группе $N_G(\widetilde{M})/\widetilde{M}$. Эта фактор-группа содержит неединичный образ элемента $\overline{a}$ и образы элементов из Γ, причём каждый из них с образом элемента $\overline{a}$ порождает бесконечную подгруппу по определению множества Γ. С другой стороны, множество $\Gamma\widetilde{M}/M \subset M/\widetilde{M}$ конечно, и, значит, элемент $b_1\widetilde{M}/\widetilde{M}$ содержится в конечном классе сопряжённых элементов группы $N_G(\widetilde{M})/\widetilde{M}$. По лемме Дицмана (предложение 1) этот класс порождает в $N_G(\widetilde{M})/\widetilde{M}$ конечную нормальную подгруппу и поэтому образ элемента $\overline{a}$ с образом любого элемента из Γ порождают конечную группу. Так как последнее невозможно, то уже в $\overline{G}_1$ все подгруппы $\langle \overline{a}, \overline{b}_1^{\overline{g}} \rangle$ конечны. Следовательно, $\overline{M}$ совпадает с классом сопряжённых элементов $\overline{b}_1^{\overline{G}_1}$. Но тогда $\langle \overline{b}_1^{\overline{G}_1} \rangle$ — нормальная в $\overline{G}_1$ черниковская подгруппа, что противоречит доказанному выше. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.
[2] Курош А.Г. Теория групп. 3-е изд. М.: Наука, 1967.
[3] Мерзляков Ю.И. Матричное представление групп внешних автоморфизмов черниковских групп. – Алгебра и логика, 1969, т. 8, N4, с. 478 – 482.
[4] Мерзляков Ю.И. Рациональные группы. – М.: Наука, 1980.
[5] Blackburn N. Some remarks on Cernikov p-groups. – III JMath., 1962, v. 6, p. 421 – 431.
[6] Попов А.М. О p-группах с черниковским централизатором неединичного Алгебра и логика.– Т. 40, №3.– 2001.– С. 330-343.

Алексей Михайлович Попов
Красноярский Государственный Технический Университет,
ул. акад. Киренского 26,
660074, Красноярск, Россия
E-mail address: alexey_m_popov@nemail.ru