S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 3, стр. 86-88 (2006)* УДК 512.544

*Краткие сообщения* MSC 20E25

# О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ С ПОЧТИ РЕГУЛЯРНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ПРОСТОГО ПОРЯДКА

А.М. ПОПОВ

Abstract. We obtain a new characterization of Chernicov groups without involutions.

В данном сообщении обобщается основной результат из [1].

**Определение 1.** *Неединичный элемент $a$ группы $G$ с конечными подгруппами вида $L_g = \langle a, a^g\rangle$ $(g \in G)$ называется конечным, и называется почти конечным, если указанное условие выполняется почти для всех элементов $a^g \in a^G$.*

**Определение 2.** *Неединичный элемент $a$ группы $G$ с конечным централизатором $C_G(a)$ называется почти регулярным.*

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — группа без инволюций, $a$ — почти конечный почти регулярный элемент простого порядка $p$ из $G$, и любая периодическая $a$-инвариантная абелева подгруппа $G$ удовлетворяет условию минимальности. Тогда $G$ — черниковская группа.*

Частный случай теоремы, когда элемент $a$ конечен, был доказан в [1, 2].

Заметим, что равносильность условий конечности и почти конечности элемента в произвольной группе в настоящее время — открытый вопрос (см. вопрос 13.53 из Коуровской тетради [3]).

Для доказательства нам понадобятся ряд известных результатов.

**Определение 3** ([4], определение 3.3)**.** *Пусть $G$ — группа, $H$ — ее собственная подгруппа и $a$ — неединичный элемент из $H$. Элемент $a$ назовем почти циклически $H$-фробениусовым, если почти для любого элемента $a^g$, где $g \in G \setminus H$, подгруппа $L_g = \langle a, a^g\rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$.*

---

Popov, A.M., On some groups with almost regular element of prime order.



*Представлена А.А.Махневым 13 марта 2006 , опубликована 16 марта 2006.*

**Предложение 1** ([4], теорема 3.5)**.** *Пусть $a$ — почти циклически $H$-фробениусовый элемент группы $G$, причем $a^2 \neq 1$. Тогда либо $|a^G| < \infty$, либо $G = F\lambda N_G(\langle a\rangle)$ и $F\lambda\langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $\langle a\rangle$.*

**Предложение 2** ([5], теорема 1)**.** *Если $G$ — группа Фробениуса вида $G = F\lambda\langle a\rangle$, где $F$ — ядро, $\langle a\rangle$ — дополнение простого порядка $p$, и $a$ — почти конечный элемент из $G$, то элемент $a$ конечен в $G$.*

Из теорем Томпсона и Хигмена и леммы 5.25 [4] вытекает

**Предложение 3.** *Пусть $G$ — группа Фробениуса вида $G = F\lambda\langle a\rangle$, где $F$ — ядро, $\langle a\rangle$ — дополнение простого порядка $p$ и $a$ — конечный элемент из $G$. Тогда, либо $F$ — нильпотентная группа, либо $F$ обладает нильпотентной подгруппой $R$, нормальной в $G$ и такой, что для любого $q \in \pi(F/R)$ порядки $q$-элементов из $F/R$ ограничены в совокупности.*

Из теоремы 5.11 [4] следует

**Предложение 4.** *Пусть $G$ — бесконечная группа Фробениуса вида $G = F\lambda\langle a\rangle$, где $F$ — ядро, $\langle a\rangle$ — дополнение простого порядка $p$ и $a$ — конечный элемент из $G$. Тогда каждая конечная $a$-допустимая подгруппа из $F$ содержится в бесконечной локально конечной $a$-допустимой подгруппе группы $F$.*

Следующее предложение — основной результат из [6].

**Предложение 5.** *Пусть $G$ — бесконечная нечерниковская группа без инволюций, $a$ — почти регулярный почти конечный элемент простого порядка $p$ и любая локально конечная подгруппа из $G$, содержащая элемент $a$, является черниковской. Тогда в $G$ существует такая $a$-инвариантная черниковская подгруппа $B$, что $H = N_G(B)$ — нечерниковская подгруппа, а всякая $a$-инвариантная локально конечная подгруппа из $H$, содержащая $B$ и отличная от нее, имеет черниковский нормализатор в $H$.*

**Доказательство теоремы.** Так же, как и в [1] будем рассматривать контрпример $G$ к теореме. Согласно предложению 5 можно считать, что всякая $a$-инвариантная локально конечная подгруппа из $G$ имеет черниковский нормализатор. Это означает, что для группы $G$ справедливы все леммы и доказательства работ [1, 2], за исключением леммы 6 из [1]. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.** *Пусть $H$ — собственная подгруппа группы $G$. Если почти для каждого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle a, g^{-1}ag\rangle$ является конечной группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$, то $G$ — черниковская группа.*

**Доказательство.** По предложению 1 либо $|a^G| < \infty$, либо $G = F\lambda N_G(\langle a\rangle)$ и $F\lambda\langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F$ и дополнением $\langle a\rangle$. В первом случае ввиду почти регулярности элемента $a$ группа $G$ конечна, что доказывает лемму.

Пусть $G$ представима в виде $G = F\lambda N_G(\langle a\rangle)$, где $F\lambda\langle a\rangle$ — группа Фробениуса. По предложению 2 $a$ является конечным элементом группы $G$. Если подгруппа $F$ локально конечна, то $G$ — черниковская группа ввиду её выбора, и лемма снова верна.

Предположим, что $F$ не является локально конечной группой. По предложению 3 $F$ обладает нильпотентной подгруппой $R(F)$ (локально конечным радикалом), нормальной в $G$, и такой, что для любого $q \in \pi(F/R(F))$ порядки

$q$-элементов из $F/R(F)$ ограничены в совокупности. В силу выбора группы $G$ локально конечный радикал $R(F)$ является черниковской группой. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/R(F)$. Легко убедиться, что $\overline{a}$ — конечный элемент группы $\overline{G}$, $C_{\overline{G}}(\overline{a}) = \langle \overline{a} \rangle$ — конечная подгруппа и в силу теоремы Шмидта, выбора группы $G$ и замкнутости класса черниковских групп относительно операции перехода к фактор-группам, каждая абелева периодическая $\overline{a}$-инвариантная подгруппа из $\overline{G}$ удовлетворяет условию минимальности, т. е. для фактор-группы $\overline{G}$ и элемента $\overline{a}$ выполняются все условия доказываемой теоремы.

Также нетрудно убедиться, что $\overline{G} = \overline{F}\lambda\langle \overline{a} \rangle$ — группа Фробениуса с ядром $\overline{F}$ и дополнением $\langle \overline{a} \rangle$. Ввиду конечности элемента $\overline{a}$ в $\overline{G}$ ядро $\overline{F}$ обладает конечными нетривиальными $\overline{a}$-инвариантными подгруппами вида $\overline{F}_{\overline{g}} = \overline{F} \cap \langle \overline{a}, \overline{a}^{\overline{g}} \rangle$. По предложению 4 подгруппа $\overline{F}_{\overline{g}}$ содержится в бесконечной локально конечной $\overline{a}$-инвариантной подгруппе $\overline{H}$.

В силу теоремы Шмидта и выбора группы $G$ подгруппа $H$ является черниковской. Последнее противоречит тому, что в $F/R(F)$ порядки $q$-элементов ограничены в совокупности для любого $q \in \pi(F/R(F))$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема доказана.

## Список литературы


[1] Попов А.М., Шунков В.П. Характеризация одного класса черниковских групп// Алгебра и логика.– Т. 26, №3.– 1987.– С. 358 – 375.

[2] Попов А.М., Шунков В.П. Дополнение к статье "Характеризация одного класса черниковских групп"// Алгебра и логика.– Т. 29, №1.– 1990.– С. 124 – 125.

[3] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп.– Изд-е 15-е.– Новосибирск: ИМ СО РАН.– 2002.

[4] Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П. Группы с системами фробениусовых подгрупп.– Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 212 С.

[5] Череп А.А. О бесконечных группах Фробениуса// Деп. в ВИНИТИ 11.03.91.– N 1014–В–91.

[6] Попов А.М. К вопросу о характеризации черниковских групп, обладающих почти регулярным элементом простого порядка// Красн. политехн. инст. – Красноярск.– 1985.– Деп. в ВИНИТИ 02.10.1985, №7327-85.– С. 1-24.



Алексей Михайлович Попов
Красноярский Государственный Технический Университет,
ул. акад. Киренского 26,
660074, Красноярск, Россия
*E-mail address*: alexey_m_popov@nemail.ru