S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 71–82 (2006) УДК 517.95

MSC 13A99

ЗАДАЧА МОРАВЕЦ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ

А.А. АКИМОВ

Abstract. The article is devoted to the Morawetz problem, which arises in mathematical models of transonic flows. A theorem on existence and uniqueness of the solution to Morawetz problem for generalized Tricomi equation with boundary conditions is proven.

1. Введение

Двумерное стационарное течение невязкого газа со сверхзвуковой подобластью, прилегающей к аэродинамическому профилю в околозвуковом приближении может быть описано потенциалом скорости $\varphi(x, y)$, который удовлетворяет уравнению Кармана-Фальковича [1]

$$(\gamma+1)(1-\varphi_x)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0, \tag{1}$$

где $\gamma > 1$– постоянная адиабаты, x, y – декартовы координаты. Возмущение $u(x, y)$ потенциала $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению эллиптико – гиперболического типа

$$(\gamma+1)[(1-\varphi_x)u_x+u_x^2/2]_x+u_{yy}=0, \tag{2}$$

которое следует из уравнения (1). Задача Франкля [2] для уравнения (2) состоит в нахождении гладкого решения этого уравнения при заданном возмущении скорости u_x на бесконечности, условии симметрии и условии Неймана на части профиля. Единственность решения задачи Франкля была доказана Моравец [3] с использованием плоскости годографа. Позднее Кук доказала [4] аналогичную теорему непосредственно на плоскости (x, y).

Akimov, A.A., Morawetz problem for generalized Tricomi equation.

Поступила 1 октября 2005 г., опубликована 2 марта 2006 г.

Чтобы избежать формирования ударных волн около заданного профиля, вместо условия Неймана можно использовать краевое условие с наклонной производной, которое с физической точки зрения означает обтекание проницаемой (пористой или перфорированной) поверхности. Вместе с тем в практике аэродинамического проектирования широко используются алгоритмы с применением смешанного условия Неймана – Дирихле. Согласно ему, вдоль некоторого участка профиля задается непрерывное распределение модуля скорости, в то время как координаты этого участка должны быть найдены в процессе численного решения задачи [5], [6].

2. Постановка задачи

Линеаризация уравнения (2) приводит его к уравнению Чаплыгина

$$Lu = K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{3}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$. Рассмотрим это уравнение в области D, ограниченной кривой Γ из класса Ляпунова, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, длины l и характеристиками γ_1 и γ_2 уравнения (3) при $y < 0$:

$$\gamma_1 : \xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}dt = 0, \qquad \gamma_2 : \eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}dt = 1.$$

Пусть $C(1/2, y_C)$ – точка пересечения γ_1 и γ_2, $y_C < 0$; $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. Для уравнения (3) в области D поставим задачу типа Неймана, рассмотренную К. Моравец [3]. Она при некоторых геометрических ограничениях на кривую Γ получила теорему единственности решения этой задачи. Задача с условием Неймана на части кривой Γ изучена в работе Врагова В.Н. [7].

Задача Моравец. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{4}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{5}$$

$$\delta_s[u]|_\Gamma = K(y)u_x\frac{dy}{ds} - u_y\frac{dx}{ds} = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l; \tag{6}$$

$$\delta_x[u]|_{\gamma_1} = K(y)u_x\frac{dy}{dx} - u_y = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{7}$$

где s – длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки B, а φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции. В точках A и B производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже $1 - 2\beta$.

В данной работе доказана теорема об однозначной разрешимости задачи (4) – (7) при выполнении условий К.И. Бабенко относительно кривой Γ.

Определение 1. *Под регулярным в D решением уравнения (3) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (4), (5) и к интегралам*

$$\int\int\limits_D uLudxdy, \quad \int\int\limits_D u_xLudxdy, \quad \int\int\limits_D u_yLudxdy$$

можно применить формулу Грина.

Введем в рассмотрение функцию

$$F(y) = 2\left(\frac{K}{K'}\right)' + 1.$$

Приведенное ниже утверждение является обобщением теоремы 6, приведенной в работе [8].

Теорема 1. *Пусть 1)* $K(y) \in C^2[y_C, 0)$, $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$ *при* $y < 0$, $F(0) > 0$; *2)* $u(x, y)$ *– регулярное в* D *решение уравнения (3), удовлетворяющее условию* $\delta[u(x, y)] = 0$ *на* Γ *и* γ_1. *Тогда* $u(x, y) \equiv const$ *в* D.

Доказательство теоремы можно найти в работе [9]. Отметим, что аналог данной теоремы в случае задачи Трикоми был доказан в работе [10].

Далее докажем существование решения задачи (4)–(7). Пусть $K(y) = sgny \cdot |y|^m$, $m = const > 0$, а $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Г. Относительно кривой Г будем предполагать выполнение условий К.И.Бабенко [11] (условия(Б)):

1) функции $x = x(s)$, $y = y(s)$ на отрезке $[0, l]$ имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера на $[0, l]$;

2) в окрестностях точек A и B выполняется условие ортогональности

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leq C y^{m+1}(s).$$

Предварительно рассмотрим две вспомогательные задачи в эллиптической и гиперболической областях.

Задача типа Дарбу (Задача D**).** Найти в области D_- функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}_-) \cap C^1(D_- \cup AB) \cap C^2(D_-), \tag{8}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_-, \tag{9}$$

$$\delta_s[u]\Big|_{\gamma_1} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad x \in (0, 1). \tag{11}$$

Следует отметить, что решение задачи (8) – (11) не единственно, но любые два решения отличаются друг от друга на произвольную постоянную.Для однозначной разрешимости задачи типа Дарбу необходимо задать значение функции $u(x, y)$ в произвольной точке области $\overline{D}_-$. В частности, положим $u(0, 0) = 0$. Тогда с учетом этого условия в характеристических координатах (ξ, η) решение задачи (8) – (11) имеет вид [11, с. 183]

$$u(\xi, \eta) = \gamma \int_0^\xi \frac{\nu(t)}{(\xi - t)^\beta (\eta - t)^\beta} dt + \int_0^\eta B(0, t; \xi, \eta)\psi_2(t) dt, \tag{12}$$

где $B(0,t;\xi,\eta)$ – функция Римана-Адамара задачи Дарбу [11, с. 119],

$$\psi_2(t)=\psi_1(t)+\frac{1}{t}\int\limits_0^t \psi_1(\eta)d\eta,\ \ \psi_1(t)=t^{-2\beta}\psi(\frac{t}{2}),$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)},\ \ \beta=\frac{m}{2(m+2)},\ \Gamma(\cdot)-\text{гамма-функция}.$$

В формуле (12) полагая $\eta=\xi=x$, получим первое функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x)=\gamma\int\limits_0^x (t-x)^{-2\beta}\nu(t)dt+\psi_3(x), \tag{13}$$

где

$$\psi_3(x)=k\int\limits_0^x \frac{t^{2\beta}\psi_2(t)}{x^\beta(x-t)^\beta}dt, \qquad k=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}.$$

Задача DN. Найти в области D_+ функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\in C(\overline{D_+})\cap C^2(D_+);\ \ Lu\equiv 0, \quad (x,y)\in D_+;$$
$$\delta_s[u]\Big|_\Gamma=\varphi(s), \quad 0\le s\le l;\ \ u(x,0)=\tau(x), \quad 0\le x\le 1.$$

Лемма 1. *Если функция $\tau(x)\in C[0,1]$, а $\varphi(s)\in C[0,l]$, то существует единственное решение задачи DN и оно определяется формулой*

$$u(x,y)=k_1\int\limits_0^1\left\{\left[(t-x)^2+\frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2}\right]^{-\beta}-\right.$$
$$\left.\left[(t+x-2tx)^2+\frac{4(2t-1)^2y^{m+2}}{(m+2)^2}\right]^{-\beta}\right\}\tau(t)dt+\int\limits_0^1 H(t,0;x,y)\tau(t)dt+$$
$$+\int\limits_0^l G(\xi,\eta;x,y)\varphi(s)ds, \tag{14}$$

где $H(\xi,\eta;x,y), G(\xi,\eta;x,y)$ определены в работе [11, с. 83], а $\omega(s)-$ решение интегрального уравнения

$$\omega(s)-\int\limits_0^1 K_2(t,s)\omega(t)dt=2\varphi(s), \tag{15}$$

$$K_2(s,t)=\delta_s[q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))], \tag{16}$$

$$q_2(\xi,\eta,x,y)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}(r_1^2)^{-\beta}(1-\sigma)^{1-2\beta}F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\sigma),$$

где $F(\cdot)$ – гипергеометрическая функция Гаусса;

Из формулы (14) получаем второе соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=\frac{k_1}{1-2\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\int\limits_0^x(x-t)^{2\beta-1}\tau(t)dt+\int\limits_x^1(t-x)^{2\beta-1}\tau(t)dt\right]-$$

$$-k_1\int\limits_0^1\frac{\tau(t)dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}}+\int\limits_0^1\chi(t,x)\tau(t)dt+\Phi(x),\quad 0<x<1, \tag{17}$$

где

$$\Phi(x)=\int\limits_0^l\omega(s)\frac{\partial q_2(\xi(s),\eta(s);x,0)}{\partial y}ds,$$

$$\chi(t,x)=\frac{\partial^2H(t,0;x,0)}{\partial y\partial x}=$$

$$=\int\limits_0^l\frac{\partial\lambda(s;t,0)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\delta_s[G_0(\xi,\eta;x,0)]ds.$$

Вопрос о существовании решения задачи Моравец эквивалентен вопросу о разрешимости уравнений (13) и (17). В результате исключения $\tau(x)$ из этих уравнений получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\nu(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(\frac{1-\xi}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left[\frac{1}{\xi-x}-\frac{1}{\xi+x-2\xi x}\right]\nu(\xi)d\xi=$$

$$=f(x)+\lambda\int\limits_0^1M(x,\xi)\nu(\xi)d\xi, \tag{18}$$

где

$$\lambda=\frac{cos\pi\beta}{\pi(1+sin\pi\beta)},\qquad M(x,\xi)=\frac{1-2\beta}{k_1}\int\limits_\xi^1(t-\xi)^{-2\beta}\chi(t,x)dt.$$

$$f(x)=\frac{k_1}{1-2\beta}\left[-\int\limits_0^x(x-t)^{2\beta-1}\psi_3'(t)dt+\int\limits_x^1(t-x)^{2\beta-1}\psi_3'(t)dt-\right.$$

$$\left.-\psi_3(1)(1-x)^{2\beta-1}-\psi_3(0)x^{2\beta-1}\right]-k_1\int\limits_0^1\frac{\psi_3(t)dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}}+$$

$$+\int\limits_0^1\chi(t,x)\psi_3(t)dt+\Phi(x),\quad 0<x<1.$$

3. Предварительные оценки и основная теорема

Для ядра и правой части уравнения (18) справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $\psi_1(x) = x^{-a}(1-x)^{-b}\psi_0(x)$, *где* $\psi_0(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $0 \le a, b \le 1$. *Тогда 1) если* $b+\beta \ge 1$ *имеем* $\psi_3(x) = x^{1-a}(1-x)^{1-b-\beta}\psi_{3,0}(x)$, $\psi_{3,0}(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$; *2)если* $b+\beta < 1$, *то справедливы представления* $\psi_3(x) = x^{1-a}\psi_{3,0}(x))$, *и* $\psi_3'(x) = x^{-a}(1-x)^{-b-\beta}\psi_{3,1}(x)$, $\psi_{3,1}(x) \in C[0,1]$.

Доказательство. Очевидно, что гладкость функции $\psi_2(x)$ на отрезке $[0,1]$ совпадает там с гладкостью функции $\psi_1(x)$. Исходя из представления функции $\psi_3(x)$ можно показать, что она принадлежит классу $C^2(0,1)$. Оценим $\psi_3(x)$ на концах сегмента $[0,1]$.

$$| \psi_3(x) |=| kx \int\limits_0^1 \frac{z^{2\beta}\psi_2(xz)}{(1-z)^\beta} dz | \le$$

$$\le C_0 k x^{1-a} \int\limits_0^1 \frac{z^{2\beta-a}(1-xz)^{-b}}{(1-z)^\beta} dz = C_0 x^{1-a} F(2\beta - a + 1, b, 2+\beta-a; x) =$$

$$= C_0 x^{1-a}(1-x)^{1-b-\beta} F(1-\beta, 2+\beta-a-b, 2+\beta-a; x). \tag{19}$$

Теперь оценим производную $\psi_3'(x)$ на концах сегмента $[0,1]$.

$$| \psi_3'(x) |=\le| k \int\limits_0^1 \frac{z^{2\beta}\psi_2(xz)}{(1-z)^\beta} dz | + kx | \int\limits_0^1 \frac{z^{2\beta}\psi_2'(xz)}{(1-z)^\beta} dz | \le$$

$$\le C_1 x^{-a} \int\limits_0^1 \frac{z^{2\beta-a}(1-xz)^{-b}}{(1-z)^\beta} dz +$$

$$+ C_2 x^{-a} \int\limits_0^1 \frac{(1-xz)^{-b-1} z^{2\beta-a}}{(1-z)^\beta} dz \le$$

$$\le C_3 x^{-a} F(2\beta - a + 1, b, 2+\beta-a; x) + C_2 x^{-a} F(2\beta - a + 1, b+1, 2+\beta-a; x) \le$$

$$\le C_4 x^{-a}(1-x)^{1-\beta-b} + C_5 (1-x)^{-b-\beta} x^{-a} \le C(1-x)^{-b-\beta} x^{-a}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Если* $\varphi(s) = (1-s)^\alpha \varphi_0(s)$, $0 \le \alpha \le \frac{m}{2}$, *то* $\omega(s) = (1-s)^\alpha \omega_0(s)$, *где* $\omega(s)$ *является решением интегрального уравнения (15). Если* $\alpha > \frac{m}{2}$, *то* $\omega(s) = (1-s)^{\frac{m}{2}} \omega_0(s)$.

Доказательство. Ядро уравнения (15) с учетом (16) имеет вид

$$K_2(s,t) = \delta_s[q_2(\xi(t), \eta(t); x(s), y(s))],$$

где

$$\delta_s[q_2(\xi(s), \eta(s); x(t), y(t))] = \frac{k_2 y}{r_1^{2(1-\beta)}} F(1-\beta, -\beta, 1-2\beta; 1-\sigma) \frac{d\xi}{ds} -$$

$$-\frac{k_2(1-\beta)y\eta}{r_1^2(1-\beta)}F(1-\beta,-\beta,2-2\beta;1-\sigma)\delta_s[\ln r^2],$$

$$\delta_s[\ln r^2]=\frac{2}{r^2}\left[\eta^m(\xi-x)\frac{d\eta}{ds}-\eta^{\frac{m}{2}}(\eta^{\frac{m+2}{2}}-y^{\frac{m+2}{2}})\frac{d\xi}{ds}\right].$$

При $s\to 0$ имеем $s\sim\eta$, а при $s\to 1$ имеем $1-s\sim\eta$, тогда в окрестности $s=1$, с учетом условий (Б) имеем

$$|\ K_2(s,t)\ |\leq\frac{c_1y\eta^{m+1}}{r_1^{2(1-\beta)}}+\frac{c_2y\eta^{\frac{m}{2}+1}}{r_1^{2(1-\beta)}}<\frac{c\eta^{\frac{m}{2}}}{r_1^{2\beta}}.$$

Тогда ядро $K_2(s,t)$ можно представить в виде

$$K_2(t,s)=\frac{(1-s)^{\frac{m}{2}}}{(1-t)^{\frac{m}{2}}}L(t,s),$$

где $L(t,s)$ является непрерывной функцией при $0\leq s,t\leq 1$. Отсюда вытекает доказательство леммы.

Лемма 4. *Если решение интегрального уравнения (15) имеет представление $\omega(s)=(1-s)^{\gamma}s^{\alpha}\omega_0(s)(m/2>\alpha>0,\gamma>0)$, где $\omega_0(s)$ непрерывна в малых окрестностях точек A и B, то $\Phi(x)$ бесконечно дифференцируема при $x\in(0,1)$ и в окрестностях точек A и B может обращаться в бесконечность порядка не больше $\frac{2\gamma-m}{m+2}$ и $\frac{2\alpha-m}{m+2}$, соответственно.*

Доказательство. Поскольку функция $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x)=k_2\int\limits_0^l\omega(s)\frac{\eta ds}{\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{1-\beta}},$$

где подинтегральная функция по $x\in(0,1)$ бесконечно дифференцируема, то и сама $\Phi(x)$ на $(0,1)$ бесконечно дифференцируема. Исследуем поведение функции $\Phi(x)$ при $x\to 0$ и $x\to 1$. Представим $\Phi(x)$ в следующем виде:

$$\Phi(x)=k_2\left(\int\limits_0^{\varepsilon_1}+\int\limits_{\varepsilon_1}^{l-\varepsilon_2}+\int\limits_{l-\varepsilon_2}^{l}\right)\frac{\omega(s)\eta ds}{\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{1-\beta}}.$$

Тогда в окрестности точки $x=1$

$$|\ \Phi(x)\ |\leq C\int\limits_{l-\varepsilon}^{l}\frac{\eta^{\alpha+1}d\eta}{\left[(1-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{1-\beta}}\leq$$

$$\leq C_1\int\limits_{\varepsilon}^{0}\frac{z^{\frac{2+\alpha}{m+2}-1}}{((1-x)^2+z)^{1-\beta}}dz\leq C_2\int\limits_0^1 z^{\frac{2+\alpha}{m+2}-1}((1-x)^2+z)^{1-\beta}dz=$$

$$=C_2\int\limits_0^1(1-t)^{\frac{2+\alpha}{m+2}-1}((1-x)^2+1-t)^{\beta-1}dt=$$

$$= C_2[1+(1-x)^2]^{\beta-1}\int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{2+\alpha}{m+2}-1}\left(1-\frac{t}{((1-x)^2+1)}\right)^{\beta-1}dt =$$

$$= C_2[1+(1-x)^2]^{\beta-1}(1-x)^{\frac{2\alpha-m}{m+2}}F\left(\frac{2+\alpha}{m+2},\frac{2+\alpha}{m+2}+\beta,1+\frac{2+\alpha}{m+2};\frac{1}{(1-x)^2+1}\right).$$

Аналогичное представление получаем в окрестности точки A. Отсюда следует справедливость леммы.

Теорема 2. *Если* $\psi(x) = x^{2\beta-1+\varepsilon_1}(1-x)^{\beta-1+\varepsilon_2}\psi_0(x)$ $(\varepsilon_1 > 0,\ \ \varepsilon_2 \geq 0)$, $\psi_0(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(s) = (1-s)^{\frac{m}{2}-1+\delta_1}s^{\frac{m}{2}-1+\delta_2}\varphi_0(s)$ $(\delta_1 > 0, \delta_2 > 0)$, $\varphi(s) \in C[0,1]$, *тогда для правой части интегрального уравнения (18) справедливо представление* $f(x) = (1-x)^{2\beta-1}x^{2\beta-1+\varepsilon_1}f_0(x),\ f_0(x) \in C^2[0,1]$.

Доказательство. Из леммы 2 получаем, что $\psi_3(x) = x^{\varepsilon_1}\psi_{3,0}(x)$, $\psi_3'(x) = x^{-1+\varepsilon_1}(1-x)^{-1+\varepsilon_2}\psi_{3,1}(x)$, Оценим $f(x)$. Для этого разобьем $f(x)$ на четыре части $f(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + \Phi_1(x)$, где

$$I_1(x) = -\int\limits_0^x (x-t)^{2\beta-1}\psi_3'(t)dt + \int\limits_x^1 (t-x)^{2\beta-1}\psi_3'(t)dt,$$

$$I_2(x) = \int\limits_0^1 \frac{\psi_3(t)dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}},$$

$$I_3(x) = \int\limits_0^1 \chi(t,x)\psi_3(t)dt,$$

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) - \frac{k_1}{(1-2\beta)}\psi_3(1)(1-x)^{2\beta-1}.$$

С учетом того, что $\psi_0(x) \in C^3(0,1)$ и $\varphi_0(s) \in C(0,1)$ на основании лемм 2 и 4 будем иметь, что $f(x) \in C^2[0,1]$. Оценим $f(x)$ на концах сегмента $[0,1]:$

$$\mid I_1(x) \mid = \mid -\int\limits_0^x (x-t)^{2\beta-1}\psi_3'(t)dt + \int\limits_x^1 (t-x)^{2\beta-1}\psi_3'(t)dt \mid \leq$$

$$\leq C_1 \mid \int\limits_0^x t^{-1+\varepsilon_1}(x-t)^{2\beta-1}(1-t)^{-1+\varepsilon_2}dt \mid +$$

$$+C_2 \mid \int\limits_x^1 t^{-1+\varepsilon_1}(t-x)^{2\beta-1}(1-t)^{-1+\varepsilon_2}dt \mid \leq$$

$$\leq C_1 x^{2\beta-1+\varepsilon_1}\int\limits_0^1 z^{-1+\varepsilon_1}(1-z)^{2\beta-1}(1-zx)^{-1+\varepsilon_2}dz +$$

$$+C_2(1-x)^{2\beta-1+\varepsilon_2}\int\limits_0^1 (1-(1-x)z)^{-1+\varepsilon_1}(1-z)^{2\beta-1}z^{-1+\varepsilon_2}dz \leq$$

$$\leq C_1 x^{-1+2\beta+\varepsilon_1}(1-x)^{-1+2\beta+\varepsilon_2} F(2\beta, 2\beta-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2, 2\beta+\varepsilon_1; x)+$$
$$+C_3(1-x)^{-1+2\beta+\varepsilon_2} x^{-1+2\beta+\varepsilon_1} F(2\beta, 2\beta-1+\varepsilon_2+\varepsilon_1, 2\beta+\varepsilon_2; 1-x) \leq$$
$$\leq C(1-x)^{-1+2\beta+\varepsilon_2} x^{-1+2\beta+\varepsilon_1};$$

$$| I_2(x) |=| \int\limits_0^1 \frac{\psi_3(t)dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}} |\leq$$
$$\leq C \int\limits_0^1 (t+x-2tx)^{2\beta-2} t^{\varepsilon_1} dt \leq$$
$$\leq C x^{2\beta-2} \int\limits_0^1 (1-t\frac{2x-1}{x})^{2\beta-2} t^{\varepsilon_1} dt =$$
$$= C x^{2\beta-2} F(1+\varepsilon_1, 2-2\beta, 2+\varepsilon_1; \frac{2x-1}{x}) =$$
$$= C\frac{(1-x)^{2\beta-1}}{x} F\left(1, \varepsilon_1+2\beta, 2+\varepsilon_1; \frac{2x-1}{x}\right) =$$
$$= C x^{-1+2\beta+\varepsilon_1}(1-x)^{-1-\varepsilon_1} F\left(1+\varepsilon_1, \varepsilon_1+2\beta, 2+\varepsilon_1; \frac{2x-1}{x-1}\right) \leq$$
$$\leq C x^{-1+2\beta+\varepsilon_1}(1-x)^{2\beta-1};$$

$$| I_3(x) |=| \int\limits_0^1 \chi(t,x)\psi_3(t)dt |\leq C_2 \int\limits_0^1 (t+x-2tx)^{2\beta-1} t^{\varepsilon_1} dt \leq C_4$$
$$= C_2(1-x)^{2\beta-1} F\left(1, 1-2\beta, 2+\varepsilon_1; \frac{2x-1}{x-1}\right) \leq C_0;$$
$$| \Phi_1(x) |=| \Phi(x) - \frac{k_1}{(1-2\beta)}\psi_3(1)(1-x)^{2\beta-1} |\leq$$
$$=| \Phi(x) - k_1 x^{2\beta-2}\psi_3(x) F(1, 2-2\beta, 2; \frac{2x-1}{x}) - \frac{k_1}{(1-2\beta)}\psi_3(1)(1-x)^{2\beta-1} |\leq$$
$$\leq C(1-x)^{2\beta-1} x^{2\beta-1+\delta_2}.$$

Принимая во внимание лемму 3 получаем искомое доказательство.

Проводя регуляризацию уравнения (18), в силу [11, с. 46-49] получаем эквивалентное уравнение Фредгольма второго рода

$$\nu(x) - \frac{cos\pi\beta}{2\pi} \int\limits_0^1 K(x,t)\nu(t)dt = F(x),$$

$$K(x,t) = M(x,t) + \lambda \int\limits_0^1 \left(\frac{\xi(1-\xi)}{x(1-x)}\right)^{0.5-\beta} \left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{1}{\xi+x-2\xi x}\right) M(\xi,t) d\xi,$$

$$F(x)=\frac{1}{1+\pi^2\lambda^2}\left\{f(x)+\lambda\int\limits_0^1\left(\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right)^{0.5-\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)f(t)dt\right\}.$$

Лемма 5. *Если выполнены условия теоремы 2, то функция $F(x)$ имеет представление $F(x)=(1-x)^{2\beta+\varepsilon_1-1}x^{2\beta-1+\varepsilon_2}f_0(x)(\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0)$, где $f_0(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$.*

Доказательство. Представим $f(t)$ в виде

$$f(t)=\frac{f_1(t)}{(1-t)^{1-2\beta}},$$

где $f_1(t)\in C(0,1]$. Тогда произведя замену $\mu=x(1-t)/(t(1-x))$ в интеграле

$$J_1=\frac{\lambda}{(1-x)^{1-2\beta}}\int\limits_0^1\left(\frac{x(1-x)}{t(1-t)}\right)^{0.5-\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)f_1(t)dt,$$

получим

$$J_1=\frac{\lambda}{(1-x)^{1-2\beta}}\int\limits_0^\infty\mu^{\beta-0.5}\frac{1}{x+(1-x)\mu}\frac{2\mu}{1-\mu^2}f_1(t)d\mu=$$

$$=\frac{\lambda}{(1-x)^{1-2\beta}}\int\limits_0^\infty\mu^{\beta-0.5}\frac{1}{x+(1-x)\mu}\frac{\mu}{1-\mu}f_1(t)d\mu+$$

$$+\frac{\lambda}{(1-x)^{1-2\beta}}\int\limits_0^\infty\mu^{\beta-0.5}\frac{1}{x+(1-x)\mu}\frac{\mu}{1+\mu}f_1(t)d\mu=\frac{\lambda}{(1-x)^{1-2\beta}}\int\limits_0^\infty\frac{\mu^{\beta-0.5}}{1-\mu}f_1(t)d\mu-$$

$$-\frac{\lambda x}{(1-x)^{1-2\beta}}\int\limits_0^\infty\frac{\mu^{\beta-0.5}}{x+(1-x)\mu}f_1(t)d\mu+\frac{\lambda}{(1-x)^{1-2\beta}}\frac{1}{1-2x}\int\limits_0^\infty\frac{\mu^{\beta-0.5}}{1+\mu}f_1(t)d\mu-$$

$$-\frac{\lambda}{(1-x)^{1-2\beta}}\frac{x}{1-2x}\int\limits_0^\infty\frac{\mu^{\beta-0.5}}{x+(1-x)\mu}f_1(t)d\mu=$$

$$=\frac{\lambda}{(1-x)^{1-2\beta}}\left(I_1+I_2+I_3\right);$$

$$\lim_{x\to1}I_3=\lim_{x\to1}\frac{1}{1-2x}\int\limits_0^\infty\frac{\mu^{\beta-0.5}}{1+\mu}f_1\left(\frac{x}{x+(1-x)\mu}\right)d\mu=$$

$$=-f_1(1)\int\limits_0^\infty\frac{\mu^{\beta-0.5}}{1+\mu}d\mu=-f_1(1)\frac{\pi}{\cos\pi\beta};$$

$$\lim_{x\to1}I_2=\lim_{x\to1}\int\limits_0^\infty\frac{\mu^{\beta-0.5}}{1-\mu}f_1\left(\frac{x}{x+(1-x)\mu}\right)d\mu=$$

$$= f_1(1)\int\limits_0^\infty \frac{\mu^{\beta-0.5}}{1-\mu} = f_1(1)\pi\operatorname{ctg}\pi(0.5+\beta) = -f_1(1)\frac{\sin\pi\beta}{\cos\pi\beta};$$

$$\lim_{x\to1} I_1 = \lim_{x\to1}\int\limits_0^\infty \frac{\mu^{\beta-0.5}}{x+(1-x)\mu} f_1\left(\frac{x}{x+(1-x)\mu}\right) d\mu =$$

$$= C_1\lim_{x\to1}\frac{x^{0.5+\beta}(1-x)^{0.5-\beta}}{1-2x}\int\limits_0^1 t^{-0.5-\beta}(1-t)^{0.5-\beta}dt = 0.$$

Так как

$$\lambda = \frac{\pi(\sin\pi\beta+1)}{\cos\pi\beta},$$

то

$$\lim_{x\to1}(1-x)^{1-2\beta}J_1 = -f_1(1).$$

Таким образом в окрестности $x=1$ имеем: $\mid F(x)\mid < C_2(1-x)^{2\beta-1+\varepsilon_1}$. Проводя аналогичные преобразования, получим в окрестности точки $x=0$ оценку: $\mid F(x)\mid < C_3x^{2\beta-1+\varepsilon_2}$.

Лемма 6. *При $0<t<1$, $0<x<1$ имеет место неравенство*

$$\mid\chi(t,x)\mid < C(t+x-2tx)^{2\beta-1},$$

где $C-$ постоянная, зависящая только от области D_+.

Доказательство данного утверждения проводится аналогично [11, с. 133 - 136].

Лемма 7. *При $0<x,\xi\le1$ функция $M(x,\xi)$ непрерывна, а в точке $(0,0)$ функция $M(x,\xi)$ имеет логарифмическую особенность.*

Доказательство. Пользуясь интегральным представлением функции $M(x,\xi)$, легко показать, что в виду слабой полярности подинтегральной функции, $M(x,\xi)$ при $0<x,\xi\le1$ непрерывна. Выясним поведение функции $M(x,\xi)$ на границе области $0<x,\xi<1$. Для этого выполним следующую оценку:

$$\mid M(x,\xi)\mid = \frac{1-2\beta}{k_1}\mid\int\limits_\xi^1(t-\xi)^{-2\beta}\chi(t,x)dt\mid \le C\frac{1-2\beta}{k_1}\int\limits_\xi^1(t-\xi)^{-2\beta}(t+x-2tx)^{2\beta-1}dt =$$

$$= C\frac{1-2\beta}{k_1}(1-\xi)^{1-2\beta}(1-x)^{2\beta-1}\int\limits_0^1(1-z)^{-2\beta}\left(1-z\frac{(1-\xi)(1-2x)}{1-x}\right)^{2\beta-1}dz =$$

$$= C\frac{1-2\beta}{k_1}(1-\xi)^{1-2\beta}(1-x)^{2\beta-1}F\left(1,1-2\beta,2-2\beta,\frac{(1-\xi)(1-2x)}{1-x}\right).$$

Поскольку гипергеометрическая функция имеет логарифмическую особенность при $x,\xi\to0$, то из вышеприведенной оценки следует, что функция $M(x,\xi)$ в точке $(0,0)$ имеет логарифмическую особенность. Применяя формулу автотрансформации для гипергеометрической функции, получим

$$\mid M(x,\xi)\mid \le C(1-\xi)^{1-2\beta}F\left(1,1-2\beta,2-2\beta,\frac{(1-\xi)(2x-1)}{x+\xi-2\xi x}\right),$$

откуда следует, что в остальных граничных точках области функция $M(x,\xi)$ непрерывна.

Лемма 8. *Ядро интегрального уравнения (18)* $K(x,t)$ *имеет следующее представление* $K(x,t) = x^{-\varepsilon}(1-x)^{0.5-\beta}K_0(x,t)$, $\varepsilon > 0$, *где* $K_0(x,t)$ *является непрерывной функцией при* $0 \le t, x \le 1$.

Доказательство данной леммы проводится аналогично лемме 5.

Теорема 3. *Если выполнены условия теорем 1 и 2, то существует решение задачи (4) – (7), определяемое с точностью до постоянного слагаемого.*

Пользуясь случаем автор выражает признательность профессору Сабитову К.Б. за постановку задачи и помощь при выполнении данной работы.

Список литературы

[1] Берс Л. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики,* Наука, Москва, 1961.

[2] Франкль Ф. И. *О плоскопараллельных воздушных течениях через каналы при околозвуковых скоростях* // Мат. сб., Т. 40, № 1, 1933, 59–72.

[3] Morawetz C. S. *Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation* // Proc. Roy. Soc., V. 236, № 1024, 1956, 141–144.

[4] Cook L. P. *Uniqueness of transonic flows* // Indiana University Math. J., V. 27, № 1, 1978, 51–71.

[5] Giles M. B., Drela M.*Fluid Dynamics computation* // AIAA J., V. 25, № 9 1987, 1199–1206.

[6] Obayashi S. *Flux vector splitting for the inviscid gas dynamics with applications to finite-difference methods* // AIAA Paper, № 95, 1995, 33–42.

[7] Врагов В.Н. *К вопросу о единственности решения обобщенной задачи Трикоми* // ДАН, Т. 226, № 4, 1976, 761–764.

[8] Сабитов К. Б., Акимов А. А. *К теории аналога задачи Неймана для уравнения смешанного типа* // Изв. ВУЗов. Матем., № 10, 2001, 73–80.

[9] Акимов А. А. *Теорема единственности решения задачи Моравец для уравнения Чаплыгина* //Труды международной конференции «Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы» посвященной юбилею академика В.А. Ильина. Стерлитамак. СФ АН РБ. Уфа: Гилем. Т. 2, 2003, 15–20.

[10] Protter M. H. *Uniqueness theorems for the Tricomi problem*// J. Rational Mech. and Analysis, Part I, 2, 1, 1953, 107–114; Part II, 4, 5 1955, 721–733.

[11] Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа,* Наука, Москва, 1985.

Андрей Анатольевич Акимов
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина 37,
453103, Стерлитамак, Россия
E-mail address: andakm@rambler.ru