S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 451–463 (2006) УДК 515.16
MSC 57M25

ПЛОСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е.А. СБРОДОВА

Abstract. In this paper we consider the problem of algorithmic finding of a proper essential *planar surface* in a given irreducible orientable compact 3-manifold. The method uses the Haken theory of normal surfaces in 3-manifolds with boundary pattern [5]. The solution is based on an estimate, considered in [3], of the average length of boundary curves of an arbitrary proper essential planar surface and on the notion of a slope in the boundary of an arbitrary manifold that generalizes the notion of a slope on a torus.

Аннотация

В работе решается задача алгоритмического нахождения существенных плоских поверхностей в неприводимых ориентируемых компактных 3-многообразиях. Решение строится в терминах теории нормальных поверхностей Хакена и использует понятие граничного узора многообразия [5]. Большая роль при построении алгоритма отводится понятию наклона на крае произвольного 3-многообразия, обобщающему понятие наклона на торе, и оценке средней длины граничных кривых любой существенной плоской поверхности в данном многообразии, предложенной в [3].

Введение

В начале 60-х годов В. Хакен описал алгоритм, выясняющий, содержит ли данное многообразие существенный собственный диск с заданным краем [1]. Позднее был описан алгоритм, позволяющий ответить на тот же вопрос, но без фиксации края диска, т. е. проверить, является ли многообразие гранично неприводимым (смотри, например, [2]). В 1998 году У. Джейко, Х. Рубинштейн

Sbrodova E.A., Planar surfaces in three-manifolds.

Работа поддержана INTAS (грант № 03-51-3663) и РФФИ-Урал (грант № 04-01-96014).

Поступила 30 октября 2006 г., опубликована 29 декабря 2006 г.

и Э. Седжвик описали алгоритм, выясняющий, содержит ли данное многообразие с краем тор [4] (а затем и многообразие с краем, состоящим из нескольких торов [3]) собственную существенную *плоскую поверхность* (т. е. проколотый диск). Мы обобщаем последний результат на многообразия с произвольными краями. Ключевым моментом при этом является оценка средней длины граничных кривых любой существенной плоской поверхности в данном многообразии, предложенная в [3], и рассмотрение понятия наклона на произвольном крае, обобщающего понятие наклона на торическом крае.

Под *наклоном* на крае трехмерного многообразия M мы будем понимать набор $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ нетривиальных простых замкнутых кривых на ∂M, которые попарно не пересекаются и не изотопны. Будем говорить, что край собственной поверхности $F \subset M$ *имеет наклон* $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, если ∂F состоит из k_1 кривых параллельных кривой α_1, k_2 кривых параллельных кривой α_2 и т. д., где $k_1, k_2, \ldots$ принимают натуральные значения. Аналогично определяется наклон для многообразия с *граничным узором* (с фиксированным графом на крае многообразия), при этом кривые наклона не должны пересекать узор. Собственная поверхность F в многообразии с граничным узором Γ называется *чистой*, если ∂F не пересекает Γ.

Работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе изложены предварительные сведения, в том числе основные сведения теории нормальных поверхностей Хакена. В параграфе 2 строится алгоритм, выясняющий для данного многообразия (M, Γ) и данного наклона α на крае $\partial(M, \Gamma)$, содержит ли (M, Γ) такую чистую существенную плоскую поверхность F, что наклон ∂F содержится в α (теорема 1). В параграфе 3 строится алгоритм, выясняющий, содержит ли данное 3-многообразие (M, Γ) чистую существенную плоскую поверхность (теорема 3).

Автор благодарит С.В. Матвеева за помощь в написании данной работы.

1. Предварительные сведения

Напомним, что трехмерное многообразие M с фиксированным графом (одномерным полиэдром) $\Gamma \subset \partial M$ без изолированых вершин называется *многообразием с граничным узором* и обозначается (M, Γ). Подмножество X в 3-многообразии (M, Γ) с граничным узором называется *чистым*, если X не пересекает Γ. Изотопия $f_t : X \to M$ называется *чистой*, если $f_t(X) \cap \Gamma = \emptyset$ для любого t [5].

Определение 1. *Чистая связная собственная поверхность F, лежащая в трехмерном неприводимом гранично неприводимом многообразии (M, Γ), называется* существенной*, если:*

(1) *F несжимаема, т. е. край любого такого диска $D \subset Int(M, \Gamma)$, что $D \cap F = \partial D$, является тривиальной кривой на F;*
(2) *F гранично несжимаема, т. е. для любого такого чистого диска $D \subset (M, \Gamma)$, что ∂D есть объединение двух дополнительных дуг $l = D \cap F$ и $l_1 = D \cap \partial(M, \Gamma)$, дуга l отсекает от поверхности F чистый диск;*
(3) *F отлична от сферы и чистого диска.*

Замечание. *В случае пустого узора это определение совпадает с классическим (см.* [4], [3]*).*

Напомним основные сведения теории нормальных поверхностей Хакена. Пусть многообразие (M, Γ) триангулировано так, что Γ состоит из ребер триангуляции. Будем говорить, что собственная поверхность $F \subset (M, \Gamma)$, находящаяся в общем положении, является *нормальной*, если ее пересечение с любым тетраэдром состоит из дисков, каждый из которых является либо треугольником, отсекающим одну из вершин тетраэдра, либо четырехугольником, рассекающим тетраэдр на две части, по две вершины в каждой. Таким образом, нормальная поверхность естественным образом разбивается на диски *разрешенного* типа: треугольники и четырехугольники (связные компоненты ее пересечения с тетраэдрами триангуляции).

Допустим, что нормальные поверхности F_1, F_2 в триангулированном многообразии (M, Γ) таковы, что для любого тетраэдра Δ^3 любые два четырехугольника из $(F_1 \cap \Delta^3) \cup (F_2 \cap \Delta^3)$ имеют одинаковые типы, т. е. пересекают одни и те же ребра тетраэдра. Тогда определена *геометрическая сумма* поверхностей F_1 и F_2. Она строится так. Сначала нужно изотопно пошевелить поверхности F_1, F_2 так, чтобы для любого тетраэдра Δ^3 триангуляции многообразия (M, Γ) любые диски $\alpha \subset F_1 \cap \Delta^3$, $\beta \subset F_2 \cap \Delta^3$ либо не пересекались, либо пересекались ровно по одной дуге. Затем вдоль каждой дуги пересечения нужно разрезать поверхности и склеить полученные части попарно так, чтобы образовались непересекающиеся диски разрешенного типа (треугольники и четырехугольники). Построенная таким образом нормальная поверхность называется *геометрической суммой* поверхностей F_1, F_2 и обозначается $F_1 + F_2$.

Нормальная поверхность в триангулированном многообразии (M, Γ) называется *фундаментальной*, если ее нельзя представить в виде геометрической суммы двух непустых поверхностей из (M, Γ). В триангулированном многообразии с граничным узором, состоящим из ребер триангуляции, число фундаментальных поверхностей конечно, и существует процедура их перечисления (см. [5]).

Доказательство существования искомых алгоритмов базируется на методе Хакена нахождения поверхностей в трехмерном многообразии (M, Γ), обладающих некоторым свойством P. В нашем случае, поверхность $F \subset (M, \Gamma)$ обладает свойством P, если F является существенной плоской поверхностью. Напомним основные этапы этого метода.

(1) Нужно триангулировать данное многообразие (M, Γ) так, чтобы узор Γ состоял из ребер триангуляции.
(2) Нужно доказать, что если в (M, Γ) существует поверхность со свойством P, то в (M, Γ) существует нормальная поверхность со свойством P.
(3) Нужно доказать, что если в (M, Γ) существует нормальная поверхность со свойством P, то в (M, Γ) существует фундаментальная поверхность со свойством P.

Используя этот метод, алгоритм строится довольно просто: нужно перечислить все фундаментальные поверхности (их конечное число) и проверить, найдется ли фундаментальная поверхность со свойством P.

Напомним, что в нашем случае свойство P — это свойство поверхности быть существенной и плоской. Следующая лемма обеспечивает выполнение пункта 2 метода Хакена.

Лемма 1. *Пусть неприводимое гранично неприводимое 3-многообразие M с граничным узором Γ триангулировано так, что Γ состоит из ребер триангуляции. Тогда, если (M,Γ) содержит существенную поверхность F, то в (M,Γ) найдется нормальная существенная поверхность чисто изотопная F.*

Доказательство. Смотри предложение 3.3.24 [5] . □

Частичное решение пункта 3 метода Хакена, а именно, доказательство того, что свойство поверхности быть существенной сохраняется при переходе к фундаментальным поверхностям, следует из теоремы У. Джейко, справедливой и для многообразий с граничными узорами (теорема 4.1.36 [5]). Мы обобщили этот результат, при этом нормальная поверхность F в триангулированном многообразии (M,Γ), пересекающая ребра триангуляции в наименьшем числе точек среди всех поверхностей, чисто изотопных данной, называется *минимальной* [5].

Лемма 2. *Пусть даны два неприводимых гранично неприводимых 3-многообразия (M,Γ) и (M,Γ') с фиксированными триангуляциями T и T', причем $T = T'$ и $\Gamma \subset \Gamma'$. Допустим, что чистая минимальная в (M,Γ') существенная в (M,Γ) нормальная связная поверхность F представлена в виде $F = F_1 + F_2$, где F_1 и F_2 — связные чистые поверхности в (M,Γ'). Тогда F_1 и F_2 являются существенными поверхностями в (M,Γ).*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\Gamma' = \Gamma$. В этом случае формулировка леммы совпадает с формулировкой теоремы 4.1.36 из книги [5]. Доказательство этой теоремы в [5] ведется от противного. Предположив, что хотя бы одна из поверхностей F_1 или F_2 допускает сжимающий или гранично сжимающий чистый диск, удается прийти к противоречию одного из следующих двух типов.

(1) Построить сжимающий или гранично сжимающий чистый в (M,Γ) диск для F. Это противоречит существенности поверхности F.
(2) Построить чистую в (M,Γ) изотопию поверхности F, которая уменьшает число ее пересечений с ребрами триангуляции. Это противоречит минимальности поверхности F.

Оказывается, что эти же аргументы верны и в случае, когда $\Gamma' \neq \Gamma$. В пункте 1 получается то же самое противоречие с существенностью в (M,Γ) поверхности F. Пункт 2 рассмотрим более подробно. Формально говоря, построенная в нем изотопия поверхности F является чистой в (M,Γ). Однако, непосредственная проверка показывает, что эту изотопию легко сделать чистой в (M,Γ'), что по-прежнему будет противоречить минимальности поверхности F в (M,Γ'). □

2. Плоские поверхности с заданными наклонами краев

Определение 2. Наклоном *на крае трехмерного многообразия* (M,Γ) *называется набор* $\alpha = \{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ *нетривиальных простых замкнутых чистых кривых на* $\partial(M,\Gamma)$, *которые попарно не пересекаются и чисто не изотопны.*

Рассмотрим два наклона $\alpha = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ и $\beta = \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$ на $\partial(M,\Gamma)$. Будем говорить, что наклон α *содержится* в наклоне β, если существует чистая изотопия, переводящая кривые $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ в кривые $\{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_n}\}$, где $\beta_{i_j} \in \beta$. Два наклона α и β считаются *равными*, если $\alpha \subset \beta$ и $\beta \subset \alpha$.

Если край чистой собственной поверхности $F \subset (M, \Gamma)$ состоит из нетривиальных кривых, то под *наклоном ее края* будем понимать такой набор $[\partial F]$ попарно чисто неизотопных кривых $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, лежащих в ∂F, что каждая компонента края ∂F чисто изотопна одной из кривых $\alpha_i \in [\partial F]$. Таким образом, если $[\partial F] = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, то край поверхности F имеет вид $\partial F = k_1\alpha_1 \cup k_2\alpha_2 \cup \dots \cup k_n\alpha_n$, т. е. состоит из k_1 копий кривой α_1, k_2 копий кривой α_2 и т. д., где k_i принимают натуральные значения.

Как уже было сказано выше, доказательство существования алгоритмов базируется на методе Хакена. Как правило, третий этап метода Хакена (переход к фундаментальным поверхностям) является самым сложным. В нашем случае трудность состоит в том, что при геометрическом суммировании двух поверхностей наклон края суммарной поверхности может отличаться от наклонов краев исходных поверхностей. Идея преодоления этой трудности состоит в рассмотрении специальных триангуляций.

Лемма 3. *Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — наклон на крае трехмерного ориентируемого многообразия (M, Γ). Тогда существует такая триангуляция T_α многообразия (M, Γ) и такой набор чистых симплициальных колец $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ на $\partial(M, \Gamma)$, что выполнены следующие условия:*

1. *Γ состоит из ребер триангуляции T_α;*
2. *Каждая кривая α_i лежит внутри кольца A_i;*
3. *Кольца $\{A_i\}$ попарно не пересекаются;*
4. *Триангуляция любого кольца A_i устроена таким образом, что все вершины и одно ребро каждого треугольника этой триангуляции лежат на крае ∂A_i.*

Доказательство. Рассмотрим такую регулярную окрестность N объединения кривых $\cup_i \alpha_i$ в $\partial(M, \Gamma)$, что $N \cap \Gamma = \emptyset$. Такая окрестность всегда существует, так как все кривые α_i являются чистыми. Тогда N состоит из n чистых непересекающихся колец, по одному кольцу A_i для каждой кривой α_i. Каждое кольцо триангулируем так, чтобы все вершины и одно из ребер каждого треугольника лежали на крае кольца. Искомая триангуляция T_α получится продолжением триангуляции объединения колец $\{A_i\}$ на все многообразие (M, Γ), так чтобы узор Γ состоял из ребер триангуляции T_α. □

На крае неприводимого гранично неприводимого триангулированного 3-многообразия (M, Γ) рассмотрим новый граничный узор $\Gamma' = \Gamma \cup G$, где G — граф, состоящий из некоторых ребер триангуляции $\partial(M, \Gamma)$. Новое многообразие (M, Γ') будет неприводимым 3-многообразием с фиксированной триангуляцией, которая индуцирована триангуляцией многообразия (M, Γ).

Лемма 4. *Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — наклон на крае ориентируемого неприводимого гранично неприводимого 3-многообразия (M, Γ). Пусть триангуляция T_α и набор симплициальных колец $\{A_i\}$ удовлетворяют условиям 1–4 леммы 3. Обозначим через Γ' граф, состоящий из вершин и ребер триангуляции края $\partial(M, \Gamma)$, не лежащих в объединении $\cup_i Int(A_i)$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *Если* (M,Γ) *содержит такую существенную плоскую поверхность* F, *что* $[\partial F] \subset \alpha$, *то* (M,Γ') *содержит такую чистую плоскую поверхность* F_C, *что* F_C *является существенной поверхностью в* (M,Γ).
(2) *Если найдется чистая в* (M,Γ') *существенная в* (M,Γ) *плоская поверхность, то найдется и нормальная чистая в* (M,Γ') *существенная в* (M,Γ) *плоская поверхность,*
(3) *Если найдется нормальная чистая в* (M,Γ') *существенная в* (M,Γ) *плоская поверхность, то найдется фундаментальная чистая в* (M,Γ') *существенная в* (M,Γ) *поверхность, которая является либо проколотым диском, либо проколотой проективной плоскостью.*

Доказательство. 1. Допустим, что (M,Γ) содержит такую существенную плоскую поверхность $F \subset (M,\Gamma)$, что $[\partial F] \subset \alpha = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. Триангуляция T_α многообразия (M,Γ) выбрана таким образом, что каждая кривая α_i лежит в чистом симплициальном кольце $A_i \subset \partial(M,\Gamma)$. Для каждого i при помощи чистой изотопии сдвинем компоненты края ∂F, чисто изотопные кривой α_i, так, чтобы все они оказались внутри кольца A_i. Получим поверхность $F_C \subset (M,\Gamma)$, которая не пересекает граничный узор Γ', и, следовательно, является чистой поверхностью в (M,Γ'). Так как F является существенной в (M,Γ), то F_C, чисто изотопная поверхности F, будет существенной поверхностью в (M,Γ).

2. Доказательство следует из леммы 1.

3. Докажем более общее утверждение: если найдется нормальная чистая в (M,Γ') существенная в (M,Γ) поверхность, которая является либо проколотым диском, либо проколотой проективной плоскостью, то найдется фундаментальная чистая в (M,Γ') существенная в (M,Γ) поверхность, которая является либо проколотым диском, либо проколотой проективной плоскостью.

Допустим, что найдется нормальная чистая в (M,Γ') существенная в (M,Γ) поверхность, которая является либо проколотым диском, либо проколотой проективной плоскостью. Среди всех таких поверхностей выберем минимальную, т. е. пересекающую ребра триангуляции в наименьшем числе точек, и обозначим ее через F_N. Тогда F_N является фундаментальной чистой поверхностью в (M,Γ').

Действительно, предположим противное, F_N не является фундаментальной поверхностью, и существует разложение $F_N = F_1 + F_2$ в сумму двух непустых связных чистых поверхностей F_1, $F_2 \subset (M,\Gamma')$. По лемме 2, F_1 и F_2 являются существенными поверхностями в (M,Γ), более того и F_1, и F_2 отличны от проективной плоскости (см. теорему 4.1.36 [5]).

Нетривиальные компоненты края любой нормальной чистой поверхности в (M,Γ'), в силу выбора граничного узора, лежат в объединении $\cup_i Int A_i$ и пересекают каждый треугольник триангуляции колец $\{A_i\}$ по дуге, параллельной ребру, лежащему на крае кольца. Следовательно, ∂F_1 и ∂F_2 лежат в $\cup_i Int A_i$. Более того, $k = k_1 + k_2$, где k, k_1 и k_2 — числа компонент связности ∂F_N, ∂F_1 и ∂F_2, соответственно. Из условия аддитивности эйлеровой характеристики при геометрическом суммировании имеем равенство:

$$\chi(F_N) + k = (\chi(F_1) + k_1) + (\chi(F_2) + k_2).$$

По условию, поверхность F_N является либо проколотым диском, либо проколотой проективной плоскостью, поэтому $\chi(F_N) + k > 0$. Тогда хотя бы одно из слагаемых, пусть $\chi(F_1) + k_1$, строго больше 0. По построению, F_1 является связной поверхностью, поэтому $\chi(F_1) + k_1 \leq 2$. Таким образом, нормальная чистая в (M, Γ') существенная в (M, Γ) поверхность F_1, отличная от сферы и проективной плоскости, будет либо проколотым диском, либо проколотой проективной плоскостью. Учитывая, что число точек пересечения поверхности F_1 с ребрами триангуляции меньше, чем у поверхности F_N, получили противоречие минимальности поверхности F_N. Поэтому чистая в (M, Γ') существенная в M, Γ поверхность F_N будет фундаментальной.

□

Теорема 1. *Существует алгоритм, который для данного неприводимого гранично неприводимого компактного ориентируемого 3-многообразия* (M, Γ) *и данного наклона* α *на* $\partial(M, \Gamma)$ *выясняет, содержит ли* (M, Γ) *такую существенную плоскую поверхность* F*, что* $[\partial F] \subset \alpha$.

Доказательство. Требуемый алгоритм состоит в выполнении следующих шагов:

1. Нужно задать триангуляцию многообразия (M, Γ) и набор симплициальных колец $\{A_i\}$, удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 3. Затем выбрать новый граничный узор Γ' как граф, состоящий из тех ребер триангуляции края $\partial(M, \Gamma)$, которые не лежат в $\cup_i Int(A_i)$.

2. Выписать все чистые фундаментальные поверхности в (M, Γ') (их конечное число и существует процедура их перечисления [5]).

3. Выяснить, найдутся ли в списке чистых фундаментальных поверхностей существенные в (M, Γ) проколотые диски или проколотые проективные плоскости. Если таких поверхностей нет, то в данном многообразии существенных плоских поверхностей, наклон края которых содержится в α, нет (смотри лемму 4). Если найдется фундаментальный существенный в (M, Γ) проколотый диск, то он будет искомой плоской существенной поверхностью. Если найдется фундаментальная существенная в (M, Γ) проколотая проективная плоскость, то край ее регулярной окрестности в многообразии (M, Γ) будет искомой существенной плоской поверхностью.

Прокомментируем пункт 3. Для выяснения, является ли поверхность проколотым диском или проколотой проективной плоскостью, достаточно знать ее эйлерову характеристику и число компонент края. Условие существенности данной поверхности в многообразиях с граничными узорами проверяется алгоритмически (смотри, например, [5]). Заметим также, что ввиду выбора граничного узора Γ', наклон края любой чистой в (M, Γ') существенной в (M, Γ) поверхности содержится в α. □

3. Плоские поверхности с произвольными наклонами краев

Будем говорить, что наклон α на крае многообразия (M, Γ) удовлетворяет условию A, если (M, Γ) содержит такую существенную плоскую поверхность F, что $[\partial F] \subset \alpha$. Будем говорить, что наклон α удовлетворяет условию B, если (M, Γ) содержит такую существенную поверхность F, что ∂F не пересекает кривых наклона α и имеет ровно одну или ровно две кривые, чисто не изотопные никакой кривой наклона α.

Рассмотрим неприводимое гранично неприводимое ориентируемое компактное 3-многообразие (M, Γ). Разобьем множество всех наклонов на крае $\partial(M, \Gamma)$ на три типа. Будем говорить, что наклон α *имеет тип I*, если α удовлетворяет условию A. Наклон α *имеет тип II*, если α удовлетворяет условию B и не удовлетворяет условию A. Наклон α *имеет тип III*, если α не удовлетворяет ни условию A, ни условию B.

Таким образом, теорему 1 можно переформулировать так. Существует алгоритм, выясняющий имеет ли тип I данный наклон α на крае данного неприводимого гранично неприводимого ориентируемого компактного 3-многообразия (M, Γ).

Теорема 2. *Существует алгоритм, выясняющий, какой тип имеет данный наклон α на крае данного неприводимого гранично неприводимого ориентируемого компактного 3-многообразия* (M, Γ).

Доказательство. В случае, если наклон $\alpha = \{\emptyset\}$, требуемый алгоритм существует (смотри, например, теоремы 4.1.13 и 6.4.10 [5]).

Пусть $\alpha \neq \{\emptyset\}$. По теореме 1 существует алгоритм, выясняющий имеет ли тип I данный наклон α. Так как данный наклон α имеет тип III ровно в том случае, если он не имеет тип I и не имеет тип II, то теорема будет доказана, если будет предъявлен алгоритм, выясняющий, имеет ли тип II данный наклон α.

Пусть наклон α не имеет тип I. Заметим, что если в (M, Γ) найдется существенная проколотая проективная плоскость P, край которой не пересекает кривых наклона α и содержит ровно одну кривую чисто не изотопную ни одной кривой наклона α, то край регулярной окрестности поверхности P в (M, Γ) будет существенной плоской поверхностью, край которой имеет ровно две кривые чисто не изотопные ни одной кривой наклона α. В этом случае наклон α будет иметь тип II.

Допустим, что многообразие (M, Γ) содержит такую существенную поверхность F, которая является либо плоской поверхностью, либо проколотой проективной плоскостью, что ∂F не пересекает кривых наклона α и имеет ровно одну или ровно две кривые чисто не изотопные ни одной кривой наклона α в случае, если F — плоская поверхность, и ровно одну кривую чисто не изотопные ни одной кривой наклона α, если F — проколотая проективная плоскость.

Зафиксируем триангуляцию T_α многообразия (M, Γ) и набор симплициальных колец $\{A_i\}$, удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 3. По лемме 1, (M, Γ) содержит нормальную чистую поверхность F_N, чисто изотопную поверхности F. Применив, если нужно, чистую изотопию, можем считать, что все граничные кривые нормальной поверхности F_N, чисто изотопные кривым наклона α, лежат в $\cup_i Int A_i$, остальные же кривые, их ровно одна или ровно две, не пересекают $\cup_i \partial A_i$.

На крае многообразия M рассмотрим новый граничный узор $\Gamma' = \Gamma \cup (\cup_i \partial A_i)$. Новое многообразие (M, Γ') будет неприводимым гранично неприводимым компактным ориентируемым многообразием с триангуляцией T_α. Существенная в (M, Γ) поверхность F_N будет нормальной чистой поверхностью в (M, Γ'). Без ограничения общности можем считать, что

F_N является минимальной поверхностью среди всех нормальных чистых в (M,Γ') существенных в (M,Γ) поверхностей, которые являются либо плоскими поверхностями, либо проколотыми проективными плоскостями, края которых имеют вид: все кривые чисто изотопные кривым наклона α лежат в $\cup_i IntA_i$, остальных кривых ровно одна или ровно две, как описано выше. Докажем, что тогда F_N является фундаментальной чистой поверхностью в (M,Γ').

Действительно, предположим противное, пусть поверхность F_N не является фундаментальной, и существует разложение $F_N = F_1 + F_2$ в геометрическую сумму двух непустых чистых связных поверхностей $F_1, F_2 \subset (M,\Gamma')$. Так как F_N является минимальной в (M,Γ') существенной в (M,Γ) поверхностью, то, по лемме 2, F_1 и F_2 являются существенными поверхностями в (M,Γ). Более того, и F_1, и F_2 отличны от проективных плоскостей (см. теорему 4.1.36 [5]). Триангуляция T_α и набор симплициальных колец $\{A_i\}$ выбраны таким образом, что число граничных кривых, лежащих в $\cup_i A_i$, аддитивно при геометрическом суммировании. Напомним, что эйлерова характеристика поверхности так же аддитивна при геометрическом суммировании. Поэтому справедливо равенство $\chi(F_N) + k_\alpha = (\chi(F_1) + k_{1\alpha}) + (\chi(F_2) + k_{2\alpha})$, где k_α, $k_{1\alpha}$ и $k_{2\alpha}$ равно числу граничных кривых, лежащих в $\cup_i IntA_i$, поверхностей F_N, F_1 и F_2, соответственно.

По предположению, F_N является либо плоской поверхностью, либо проколотой проективной плоскостью, край которой имеет вид: несколько кривых, возможно ноль, чисто изотопны кривым наклона α и лежат в $\cup_i IntA_i$, остальных кривых ровно одна или ровно две в случае, если F_N — плоская поверхность, и ровно одна, если F_N — проколотая проективная плоскость. Поэтому $\chi(F_N) + k_\alpha \in \{0,\ 1\}$ и, следовательно, найдется такое $i \in \{1,\ 2\}$, что $\chi(F_i) + k_{i\alpha} \geq 0$. Так как данный наклон α не имеет тип I, и F_i — связная поверхность, то для $i \in \{1,\ 2\}$ выполнено неравенство $\chi(F_i) + k_{i\alpha} < 2$. Следовательно, существует такое $i \in \{1,\ 2\}$, что $\chi(F_i) + k_{i\alpha} \in \{0,\ 1\}$.

Пусть для некоторого $i \in \{1,\ 2\}$ выполнено равенство $\chi(F_i) + k_{i\alpha} = 1$. Так как наклон α не имеет тип I, и поверхность F_i отлична от проективной плоскости, то существенная в (M,Γ) поверхность F_i является плоской и содержит ровно одну граничную кривую чисто не изотопную ни одной из кривых наклона α. Получили противоречие с минимальностью поверхности F_N.

Пусть для любого $i \in \{1,\ 2\}$ выполнено неравенство $\chi(F_i) + k_{i\alpha} < 1$. По предположению, $\sum_{i=1}^{2} F_i + k_{i\alpha} \geq 0$, поэтому $\chi(F_i) + k_{i\alpha} = 0$ для любого $i \in \{1,\ 2\}$. Так как $k - k_\alpha > 0$, то найдется такое $i \in \{1,\ 2\}$, что $k_i - k_{i\alpha} > 0$. В этом случае поверхность F_i либо содержит ровно одну граничную кривую, не лежащую в $\cup_i IntA_i$, и является существенной в (M,Γ) проколотой проективной плоскостью, либо содержит ровно две граничные кривые, не лежащие в $\cup_i IntA_i$, и является существенной в (M,Γ) плоской поверхностью. Так как наклон α не имеет тип I, то хотя бы одна граничная кривая поверхности F_i чисто не изотопна ни одной кривой наклона α. По построению, число точек пересечения поверхности F_i с ребрами триангуляции меньше, чем у поверхности F_N. Получили противоречие с минимальностью поверхности F_N.

Таким образом, алгоритм, выясняющий, имеет ли тип II данный наклон α, не типа I, состоит из следующих шагов. Нужно выбрать триангуляцию многообразия (M,Γ) и набор $\{A_i\}$ симплициальных колец, удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 3. Задать новый граничный узор $\Gamma' = \Gamma \cup (\cup_i \partial A_i)$ многообразия M. Выписать множество чистых фундаментальных поверхностей в (M, Γ') (напомним, что их конечное число) и проверить, найдется ли среди них такая существенная в (M, Γ) поверхность F, что $\chi(F) + k_\alpha \in \{0,\ 1\}$ и $k - k_\alpha > 0$. По доказанному выше следует, что если таких поверхностей нет, то данный наклон α не имеет тип II.

Если найдется такая фундаментальная чистая в (M, Γ') существенная в (M, Γ) поверхность F, что $\chi(F) + k_\alpha = 1$ и $k - k_\alpha > 0$, то F является плоской поверхностью и содержит ровно одну граничную кривую чисто не изотопную ни одной из кривых наклона α. Если же $\chi(F) + k_\alpha = 0$ и $k - k_\alpha > 0$, поверхность F либо является проколотой проективной плоскостью, край которой содержит ровно одну граничную кривую, чисто не изотопную ни одной кривой наклона α, либо является плоской поверхностью, край которой содержит ровно одну или ровно две граничные кривые, чисто не изотопные ни одной кривой наклона α. Таким образом, наклон α имеет тип II. □

Основной идеей построения алгоритма, выясняющего, содержит ли данное многообразие существенные плоские поверхности, является оценка $C(\alpha)$ средней длины кривых наклона α, предложенная в работе [3]. Напомним, что *длиной* нормальной кривой γ на крае триангулированного 3-многообразия M называется число $l(\gamma)$ точек пересечения кривой γ с ребрами триангуляции многообразия M. Рассмотрим наклон $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ на крае $\partial(M, \Gamma)$, имеющий тип III. Допустим, что зафиксированы триангуляция T_α многообразия (M, Γ) и набор $\{A_i\}$ симплициальных колец, удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 3. Выберем новый граничный узор $\Gamma' = \Gamma \cup (\cup_i \partial A_i)$. Тогда для любой чистой собственной поверхности $F \subset (M, \Gamma')$ определены следующие числа: $l_{\overline{\alpha}}(\partial F)$, равное длине граничных кривых поверхности F, не лежащих в $\cup_i Int A_i$, и $\chi_{\overline{\alpha}}(F) = \chi(F) + k_\alpha$. Обозначим через $C(\alpha)$ число $\max\left\{\frac{l_{\overline{\alpha}}(\partial F_j)}{-\chi_{\overline{\alpha}}(F_j)}\right\}$, где максимум берется по всем таким фундаментальным чистым в (M, Γ') существенным в (M, Γ) поверхностям F_j, что $(-\chi_{\overline{\alpha}}(F_j)) > 0$. Если таких поверхностей нет, то полагаем $C(\alpha) = 0$. Построим в (M, Γ') все чистые кривые, которые чисто не изотопны в (M, Γ) ни одной из кривых наклона α, и имеют длину не больше $C(\alpha)$. Таких кривых существует конечное число. Обозначим эти кривые через γ_t, $1 \le t \le k$. Добавляя для каждого $t = 1, \ldots, k$ кривую γ_t к наклону α, получим конечное множество наклонов $S(\alpha) = \{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_t\},\ t = 1, \ldots, k\}$ на $\partial(M, \Gamma)$.

Лемма 5. *Пусть наклон α на крае неприводимого гранично неприводимого компактного ориентируемого 3-многообразия (M, Γ) имеет тип III. Тогда существует и может быть алгоритмически построен такой конечный (возможно пустой) набор $S(\alpha)$ наклонов на $\partial(M, \Gamma)$, что выполнены следующие условия:*

(1) *Любой наклон из $S(\alpha)$ состоит из всех кривых наклона α и еще одной кривой на $\partial(M, \Gamma)$.*
(2) *Если (M, Γ) содержит такую существенную плоскую поверхность F, что ∂F не пересекает кривых наклона α, то (M, Γ) содержит такую существенную плоскую поверхность F', что $\partial F'$ не пересекает кривых хотя бы одного наклона из $S(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть наклон $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ на крае неприводимого гранично неприводимого компактного ориентируемого 3-многообразия (M, Γ) имеет тип III. Зафиксируем триангуляцию T_α многообразия (M, Γ) и набор $\{A_i\}$ симплициальных колец, удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 3.

Допустим, что в (M, Γ) найдется такая существенная плоская поверхность F, что $\partial F \cap (\cup_i \alpha_i) = \emptyset$. Применив если нужно чистую изотопию, можем считать, что для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ все кривые в ∂F, чисто изотопные кривой α_i, лежат внутри симплициального кольца A_i. Рассмотрим новый граничный узор $\Gamma' = \Gamma \cup (\cup_i \partial A_i)$ и новое многообразие (M, Γ'), которое будет неприводимым и гранично неприводимым, ввиду выбора Γ'. T_α будет образовывать триангуляцию многообразия (M, Γ'). Поверхность F будет чистой поверхностью в (M, Γ'). Более того, в (M, Γ') найдется нормальная чистая поверхность, чисто изотопная поверхности F (см. лемму 1). Среди всех нормальных чистых поверхностей в (M, Γ'), чисто изотопных F, выберем минимальную и обозначим ее такой же буквой F.

Как описано выше построим конечное множество наклонов $S(\alpha)$ на $\partial(M, \Gamma)$. По построению, каждый наклон из $S(\alpha)$ получается добавлением к наклону α ровно одной кривой на $\partial(M, \Gamma)$, длина которой не превосходит $C(\alpha)$. Таким образом, множество $S(\alpha)$ удовлетворяет требованию 1 нашей леммы.

Чтобы доказать, что $S(\alpha)$ удовлетворяет требованию 2, разложим поверхность F в геометрическую сумму $F_1 + F_2 + \dots + F_m$ связных чистых фундаментальных поверхностей в (M, Γ'). Для любого $1 \le j \le m$ поверхность F_j, так же как и F, является существенной в (M, Γ) и отлична проективной плоскости (см. лемму 2 и теорему 4.1.36 в [5]).

Триангуляция T_α выбрана таким образом, что число граничных кривых, лежащих в объединении $\cup_i Int(A_i)$, и их длина аддитивны при геометрическом суммировании, т. е. $k_\alpha = \sum_{j=1}^m k_{j\,\alpha}$ и $l_{\overline{\alpha}}(\partial F) = \sum_{j=1}^m l_{\overline{\alpha}}(\partial F_j)$, где $l_{\overline{\alpha}}(\partial F)$ равно длине граничных кривых поверхности F, не лежащих в $\cup_i Int A_i$. Так как при геометрическом суммировании эйлерова характеристика аддитивна, $\chi(F) = \sum_{j=1}^m \chi(F_j)$, то выполнено равенство $\chi_{\overline{\alpha}}(F) = \sum_{j=1}^m \chi_{\overline{\alpha}}(F_j)$. По условию наклон α имеет тип III, поэтому край плоской поверхности $F \subset (M, \Gamma)$ содержит по крайней мере три кривых чисто не изотопных в (M, Γ) ни одной из кривых наклона α, и имеет место неравенство $\chi_{\overline{\alpha}}(F) < 0$. Так как поверхность F является плоской, то $k - k_\alpha = 2 - \chi_{\overline{\alpha}}(F)$. Таким образом, среднюю длину граничных кривых поверхности F, не лежащих в $\cup_i Int A_i$, можно ограничить сверху.

$$\frac{l_{\overline{\alpha}}(\partial F)}{k - k_\alpha} = \frac{\sum_{j=1}^m l_{\overline{\alpha}}(\partial F_j)}{2 - \chi_{\overline{\alpha}}(F)} < \frac{\sum_{j=1}^m l_{\overline{\alpha}}(\partial F_j)}{-\chi_{\overline{\alpha}}(F)}.$$

Напомним, что $C(\alpha) = \max\left\{\frac{l_{\overline{\alpha}}(\partial F_j)}{-\chi_{\overline{\alpha}}(F_j)}\right\}$, где максимум берется по всем таким фундаментальным чистым в (M, Γ') существенным в (M, Γ) поверхностям F_j, что $-\chi_{\overline{\alpha}}(F_j) > 0$. Тогда

$$\frac{l_{\overline{\alpha}}(\partial F)}{k - k_\alpha} < \frac{\sum_{j=1}^m C(\alpha)(-\chi_{\overline{\alpha}}(F_j))}{-\chi_{\overline{\alpha}}(F)} = C(\alpha).$$

Таким образом, средняя длина граничных кривых поверхности F, чисто не изотопных в (M, Γ) ни одной из кривых наклона α, не превосходит $C(\alpha)$. Следовательно, хотя бы одна граничная кривая поверхности F чисто изотопна в (M, Γ) одной из построенных кривых $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, и, можем считать, что F

не пересекает эту кривую. Напомним, что любой наклон из $S(\alpha)$ состоит из кривых $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n,\ \gamma_t\}$, где $1 \leq t \leq k$. Таким образом, существенная в (M, Γ) поверхность F не пересекает кривых хотя бы одного наклона из $S(\alpha)$. □

Лемма 6. *Пусть кривые* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $n \geq 1$, *образуют наклон на связной замкнутой ориентируемой поверхности* F *рода* $g > 0$ *с фиксированным узором* $\Gamma \subset F$. *Тогда* n *не превосходит* $3(g-1)+1+c(\Gamma)$, *где* $c(\Gamma)$ *равно числу компонент связности графа* Γ.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случай когда узор пустой, т.е. $\Gamma = \emptyset$. Так как любой наклон на торе состоит из ровно одной кривой, то при $g = 1$ лемма верна. Поэтому. будем считать, что $g > 1$. Разрежем F по данному набору кривых. Получим поверхность с $2n$ компонентами края. Каждая из компонент связности, обозначим их $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, является ориентируемой поверхностью с непустым краем и, в силу выбора набора кривых $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, отлична от диска и кольца. Поэтому эйлерова характеристика каждой поверхности A_i не превосходит -1. Так как эйлерова характеристика при разрезании не меняется, то $\chi(F) = \sum_{i=1}^m \chi(A_i) \leq -m$. С другой стороны, эйлерова характеристика связной поверхности не превосходит 2, поэтому выполнено неравенство $\chi(A_i)+k_i \leq 2$, где k_i равно числу компонент связности края ∂A_i. Суммируя последнее неравенство по всем i и пользуясь аддитивностью эйлеровой характеристики и числа компонент края, получим:

$$\chi(F) + 2n \leq 2m.$$

Из полученного ранее неравенства имеем, $m \leq -\chi(F)$. Таким образом:

$$\chi(F) + 2n \leq -2\chi(F)$$

и, следовательно,

$$n \leq \frac{-3\chi(F)}{2} = -3(1-g).$$

В случае непустого узора набор $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ может содержать грязные кольца с чистыми краями и грязные диски с чистыми краями. Число таких поверхностей не превосходит число компонент связности графа Γ. Таким образом

$$n \leq 3(g-1) + c(\Gamma) + 1.$$

□

Теорема 3. *Существует алгоритм, выясняющий, содержит ли данное ориентируемое компактное неприводимое 3-многообразие* (M, Γ) *существенную плоскую поверхность.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда данное многообразие (M, Γ) является гранично приводимым. Алгоритм, выясняющий, является ли многообразие гранично неприводимым, был описан У. Джейко [2] и обобщен С.В. Матвеевым на случай многообразий с граничными узорами [5]. В этом случае многообразие (M, Γ) конечно же содержит чистую существенную плоскую поверхность.

Пусть многообразие (M, Γ) является гранично неприводимым. Требуемый алгоритм состоит из следующих шагов. Обозначим через S_0 множество, состоящее из пустого наклона. Далее, по индукции построим множества S_1, $S_2, \ldots$ наклонов на $\partial(M, \Gamma)$ следующим образом. Если множество S_i уже построено, то положим $S_{i+1} = \emptyset$ и для каждого наклона $\alpha \in S_i$ выполним следующее:

(1) Используя теорему 2, нужно выяснить какой тип имеет наклон α. В случае, если α имеет тип I или II, данное многообразие (M, Γ) содержит существенную плоскую поверхность, и алгоритм закончен.

(2) Если наклон α имеет тип III, нужно построить конечное множество наклонов $S(\alpha)$ как описано в лемме 5 и включить это множество в S_{i+1}.

Будем продолжать этот процесс до тех пор пока это возможно. По построению, множество S_i содержит лишь конечное число наклонов, каждый из которых содержит ровно i кривых. Таким образом, из леммы 6 следует, что процесс конечен, т. е. существует такое m, что $S_m = \emptyset$.

Утверждаем, что многообразие (M, Γ) содержит существенную плоскую поверхность, лишь в том случае, когда на каком-то этапе работы алгоритма был найден наклон, имеющий тип I или II.

Предположим противное, многообразие (M, Γ) содержит существенную плоскую поверхность F, но наклон типа I или II не был найден ни на каком этапе работы алгоритма. Так как поверхность F не пересекает пустого наклона, то, применяя последовательно лемму 5, получим такие существенные плоские поверхности $F_1, F_2, F_3, \ldots$ в (M, Γ), что ∂F_i не пересекает кривых хотя бы одного наклона из S_i. Тогда существует такая существенная плоская поверхность F_m, что ∂F_m не пересекает хотя бы одного наклона из S_m, но $S_m = \emptyset$. Получили противоречие. □

Список литературы

[1] W. Haken, *Theorie der Normalflächen.* Acta Math., German, **105** (1961), 245–375.

[2] W. Jaco and U. Oertel, *An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold.* Topology, **23**: 2 (1984), 195-209.

[3] W. Jaco, J.H. Rubinstein and E. Sedgwick, *Finding planar surfaces in knot- and link-manifolds.* arXiv:math.GT/0608700.

[4] W. Jaco and E. Sedgwick, *Decision problems in the space of Dehn fillings.* arXiv:math.GT/9811031.

[5] S. Matveev, *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.

[6] Е.А. Сбродова, *Алгоритм нахождения плоских поверхностей в трёхмерных многообразиях.* Фундаментальная и прикладная математика, **11**:4 (2005), 197–202.

Елена Александровна Сбродова
Челябинский государственный университет,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Братьев Кашириных 129,
454021, Челябинск, Россия
E-mail address: sbrodova@csu.ru