S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 402–427 (2006) УДК 517.98

MSC 03H05

ЧТО ТАКОЕ БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ?

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

Abstract. This is a brief overview of the technique of Boolean valued analysis.

1. Введение

Термин «булевозначный анализ» возник в пределах математической логики. В употребление его ввел Такеути, выдающийся специалист в области теории доказательств. Такеути определил в [1] булевозначный анализ как приложение к анализу булевозначных моделей теории множеств, построенных Скоттом и Соловеем. Аналогичные модели в те же времена предложил Вопенка. Тем самым вопрос, вынесенный в заголовок, получает некоторый ответ в нулевом приближении. Однако заканчивать на этом было бы рано. Уместно обсудить более подробно следующие три вопроса.

1.1. **Зачем вообще нужно знать про булевозначный анализ?** В науке мы нередко руководствуемся любопытством, а еще чаще занимаемся тем, что получается. Однако ценим мы в науке то, что делает нас умнее. Булевозначный анализ обладает такой ценностью, раздвигая пределы наших знаний и снимая шоры категоричности с глаз совершенного математика — математика par excellence. Главная цель дальнейшего изложения — обосновать этот тезис.

Kutateladze, S.S., What is Boolean valued analysis?

Расширенный вариант доклада на семинаре И. А. Тайманова по геометрии, топологии и их приложениям 25 сентября 2006 г.

Благодарю А. Е. Гутмана за ценные и тонкие замечания к препринту этого доклада, способствовавшие улучшению изложения.

Поступила 11 октября 2006 г., опубликована 19 декабря 2006 г.

1.2. **Для чего это знать работающему математику?** Часть ответа уже дана — чтобы стать умнее. Есть и другое, не менее важное обстоятельство. Булевозначный анализ не только связан со многими топологическими и геометрическими идеями, но и предоставляет технологию расширения содержания уже доказанных теорем. Каждая теорема, доказанная классическими средствами, обладает новым неочевидным содержанием, относящимся к «переменным» множествам. Точнее говоря, любая доказанная теорема порождает новое семейство теорем, занумерованное всевозможными полными булевыми алгебрами или, что то же самое, негомеоморфными стоуновыми пространствами.

1.3. **Что дают булевозначные модели теории множеств?** Ответу на этот вопрос будут посвящены как содержательная, так и техническая части обзора. В центре внимания будут общие методы, не зависящие от тонких внутренних свойств исходной полной булевой алгебры. Эти приемы просты, наглядны и удобны в обращении, а потому могут пригодится любому работающему математику. Следует помнить при этом, что булевозначные модели теории множеств были придуманы ради того, чтобы упростить изложение метода форсинга Коэна [2]. Математика немыслима без доказательств. Nullius in Verba. Стать умнее без собственных усилий нереально. Поэтому часть места будет отведена схеме доказательства независимости отрицания гипотезы континуума от аксиом теории множеств Цермело — Френкеля (с выбором) ZFC. Именно за этот результат, закрывший первую проблему Гильберта[1], в 1966 году Коэну была присуждена Филдсовская медаль.

2. Булевозначные модели

Арена булевозначного анализа — некоторая булевозначная модель теории множеств ZFC. Чтобы задать такую модель, нужно взять полную булеву алгебру[2]. Из соображений комфортности элементы $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ выбранной полной булевой алгебры B и операции в B можно считать набором специальных символов, используемых при обсуждении вопросов истинности математических утверждений.

2.1. **Булевозначный универсум.** Для каждого ординала α положим

$$\mathbb{V}_{\alpha}^{(B)} := \{x \mid \mathrm{Fnc}\,(x) \ \wedge\ (\exists\beta)(\beta < \alpha \ \wedge\ \mathrm{dom}(x) \subset \mathbb{V}_{\beta}^{(B)}) \ \wedge\ \mathrm{im}(x) \subset B\}.$$

(Нужные сведения об ординалах собраны ниже в пункте 7.2.) Более подробно

$$\mathbb{V}_{0}^{(B)} := \varnothing,$$

$$\mathbb{V}_{\alpha+1}^{(B)} := \{x \mid x \text{ — функция},\ \mathrm{dom}(x) \subset \mathbb{V}_{\alpha}^{(B)},\ \mathrm{im}(x) \subset\ B\},$$

$$\mathbb{V}_{\alpha}^{(B)} := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{V}_{\beta}^{(B)} \quad (\alpha \text{ — предельный ординал}).$$

---

[1]Гильберт [3] считал правдоподобным, что «с точностью до эквивалентности, таким образом, есть только две совокупности чисел — счетная совокупность и континуум».

[2]Булева алгебра B — это алгебра с единицей $\mathbb{1}$ (отличной от нуля $\mathbb{0}$) над *двухэлементным полем* $2 := \{0, 1\}$, в которой каждый элемент идемпотентен. Для $a, b \in B$ полагают $a \leq b \leftrightarrow ab = a$. Полнота B означает наличие точных верхних и нижних границ у любого подмножества B.

Класс

$$\mathbb{V}^{(B)} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathbb{V}^{(B)}_\alpha$$

и есть *булевозначный универсум.* Элементы $\mathbb{V}^{(B)}$ именуют *B-значными множествами.* Следует заметить, что $\mathbb{V}^{(B)}$ состоит исключительно из функций. В частности, $\varnothing$ — это функция с областью определения $\varnothing$ и образом $\varnothing$. Следовательно, три «нижних» этажа $\mathbb{V}^{(B)}$ устроены следующим образом: $\mathbb{V}^{(B)}_0 = \varnothing$, $\mathbb{V}^{(B)}_1 = \{\varnothing\}$, $\mathbb{V}^{(B)}_2 = \{\varnothing, (\{\varnothing\}, b) \mid b \in B\}$. Стоит подчеркнуть, что $\alpha \leq \beta \to \mathbb{V}^{(B)}_\alpha \subset \mathbb{V}^{(B)}_\beta$ для любых ординалов α и β. Кроме того, в $\mathbb{V}^{(B)}$ имеет место *принцип индукции*

$$(\forall x \in \mathbb{V}^{(B)})\,((\forall y \in \mathrm{dom}(x))\ \varphi(y) \to \varphi(x)) \to (\forall x \in \mathbb{V}^{(B)})\,\varphi(x),$$

где φ — формула ZFC.

2.2. **Оценка истинности.** Возьмем теперь произвольную формулу ZFC вида $\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n)$. Если заменить элементы $u_1, \dots, u_n$ элементами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$, то мы получим конкретное утверждение об объектах $x_1, \dots, x_n$. Попробуем приписать этому утверждению некоторую *оценку истинности*, которую короче мы будем именовать просто *оценкой.* Такая оценка $[\![\varphi]\!]$ должна быть элементом алгебры B. При этом мы естественно хотим, чтобы теоремы ZFC стали «наиболее истинными» в смысле новой процедуры, приобретая в качестве оценки истинности наибольший элемент $\mathbb{1} := \mathbb{1}_B$ алгебры B, т. е. ее *единицу.*

Оценку правильно построенной формулы следует определять «двойной» индукцией. Во-первых, нужно учесть способ построения данной формулы из атомарных формул вида $x \in y$ и $x = y$. Во-вторых, нужно определить оценки атомарных формул для x и y, пробегающих $\mathbb{V}^{(B)}$, привлекая рекурсивное определение булевозначного универсума.

Очевидно, что если φ и ψ уже оцененные формулы ZFC, а $[\![\varphi]\!] \in B$ и $[\![\psi]\!] \in B$ — оценки этих формул, то следует положить

$$\begin{gathered}
[\![\varphi \wedge \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!],\\
[\![\varphi \vee \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!],\\
[\![\varphi \to \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!],\\
[\![\neg\varphi]\!] := \neg[\![\varphi]\!],\\
[\![(\forall x)\,\varphi(x)]\!] := \bigwedge_{x\in\mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(x)]\!],\\
[\![(\exists x)\,\varphi(x)]\!] := \bigvee_{x\in\mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(x)]\!],
\end{gathered}$$

где в правых частях стоят булевы операции, отвечающие логическим связкам и кванторам в левых частях: $\wedge$ — пересечение, $\vee$ — объединение, $\neg$ — дополнение, а импликация $\to$ определена правилом: $a \to b := \neg a \vee b$ для $a, b \in B$. Только такие определения обеспечат значение «единица» для оценок классических тавтологий.

Перейдем теперь к оцениванию атомарных формул $x \in y$ и $x = y$ для $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$. Интуитивная идея определения состоит в том, что B-значное множество y «нечеткое», т. е. «содержит элемент z из $\operatorname{dom}(y)$ с вероятностью $y(z)$». Руководствуясь этим и желая сохранить логическую тавтологию $x \in y \leftrightarrow (\exists z \in y)\,(z = x)$ наряду с аксиомой экстенсиональности, мы приходим к следующему рекурсивному определению:

$$[\![x \in y]\!] := \bigvee_{z \in \operatorname{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z = x]\!],$$

$$[\![x = y]\!] := \Bigg(\bigwedge_{z \in \operatorname{dom}(x)} x(z) \to [\![z \in y]\!]\Bigg) \wedge \Bigg(\bigwedge_{z \in \operatorname{dom}(y)} y(z) \to [\![z \in x]\!]\Bigg).$$

Теперь мы можем придать смысл формальным выражениям вида $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и φ — формула ZFC. Иначе говоря, мы в состоянии точно определить смысл, в котором теоретико-множественное утверждение $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ верно при задании набора объектов $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$.

Именно, мы будем говорить, что *формула* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *выполнена внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ или что *элементы* $x_1, \dots, x_n$ *обладают свойством* φ *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ при условии, что $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = \mathbb{1}$. В этой ситуации пишут $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Если некоторая формула φ теории ZFC записана на нашем естественном языке, то из педантизма ставят кавычки: $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «φ». *Знак удовлетворения* $\models$ приводит к употреблению теоретико-модельных выражений типа «$\mathbb{V}^{(B)}$ — это *булевозначная модель* для φ» вместо $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi$.

Ясно, что все аксиомы и теоремы исчисления предикатов первого порядка верны в $\mathbb{V}^{(B)}$. В частности,

(1) $[\![x = x]\!] = \mathbb{1}$,
(2) $[\![x = y]\!] = [\![y = x]\!]$,
(3) $[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \le [\![x = z]\!]$,
(4) $[\![x = y]\!] \wedge [\![z \in x]\!] \le [\![z \in y]\!]$,
(5) $[\![x = y]\!] \wedge [\![x \in z]\!] \le [\![y \in z]\!]$.

Отметим, что для любой формулы φ будет $\mathbb{V}^{(B)} \models x = y \wedge \varphi(x) \to \varphi(y)$, т. е.

(6) $[\![x = y]\!] \wedge [\![\varphi(x)]\!] \le [\![\varphi(y)]\!]$.

3. Принципы булевозначного анализа

В булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ соотношение $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$ ни в коей мере не означает, что функции x и y совпадают как элементы $\mathbb{V}$. Например, функция, равная нулю на каком-либо из слоев $\mathbb{V}_\alpha^{(B)}$, где $\alpha \ge 1$, играет роль пустого множества в $\mathbb{V}^{(B)}$. Это обстоятельство может затруднить некоторые конструкции, необходимые в дальнейшем.

3.1. **Отделимый универсум.** В этой связи мы перейдем от $\mathbb{V}^{(B)}$ к *отделимому булевозначному универсуму* $\overline{\mathbb{V}}^{(B)}$, обычно сохраняя за последним прежний символ $\mathbb{V}^{(B)}$; т. е. положим $\mathbb{V}^{(B)} := \overline{\mathbb{V}}^{(B)}$. При этом, чтобы определить $\overline{\mathbb{V}}^{(B)}$, мы рассмотрим отношение эквивалентности $\{(x, y) \mid [\![x = y]\!] = \mathbb{1}\}$ на $\mathbb{V}^{(B)}$. Выбирая элемент (представитель наименьшего ранга) в каждом классе эквивалентных функций, мы и приходим к отделимому универсуму $\overline{\mathbb{V}}^{(B)}$.

Заметим, что импликация

$$[\![x = y]\!] = \mathbb{1} \to [\![\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(y)]\!]$$

справедлива для произвольной формулы φ теории ZFC и элементов x, y из $\mathbb{V}^{(B)}$. Следовательно, в отделимом универсуме можно вычислять оценки формул, не обращая никакого внимания на выбор представителей. В дальнейшем, при работе в отделимом универсуме, мы будем удобства ради рассматривать конкретный представитель класса эквивалентности, а не весь класс (как это принято в анализе, скажем, при работе с функциональными пространствами шкалы Рисса).

3.2. **Свойства булевозначной модели.** Важнейшие свойства булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ собраны в следующих трех предложениях:

(1) Принцип переноса. Все теоремы ZFC верны в $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. символически:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}\,.$$

Принцип переноса устанавливается трудоемкой проверкой того, что все аксиомы ZFC получили оценку $\mathbb{1}$ и что все правила вывода оценку формул увеличивают. Иногда принцип переноса выражают словами: «$\mathbb{V}^{(B)}$ — это булевозначная модель ZFC». Так термин «булевозначная модель теории множеств» входит в математику.

(2) Принцип максимума. Для каждой формулы φ теории ZFC существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![(\exists x)\,\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!]$.

В частности, если внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верно, что есть x, для которого $\varphi(x)$, то (в смысле $\mathbb{V}$) существует элемент x_0 в $\mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\varphi(x_0)]\!] = \mathbb{1}$. Символически:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists x)\,\varphi(x) \to (\exists x_0)\,\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_0).$$

Принцип максимума означает, что $(\exists x_0 \in \mathbb{V}^{(B)})\,[\![\varphi(x_0)]\!] = \bigvee_{x\in\mathbb{V}^{(B)}}[\![\varphi(x)]\!]$ для любой формулы φ теории ZFC. Последнее соотношение объясняет происхождение термина «принцип максимума». Доказательство же этого принципа состоит в несложном применении следующего факта.

(3) Принцип перемешивания. Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *разбиение единицы* в B, т. е. семейство элементов булевой алгебры B такое, что

$$\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = \mathbb{1}, \quad (\forall\xi,\eta\in\Xi)\,(\xi\neq\eta \to b_\xi\wedge b_\eta = \mathbb{0}).$$

Для каждого семейства элементов $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ и любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ существует, и притом единственное, перемешивание (x_ξ) с помощью (или с вероятностями) (b_ξ); т. е. элемент x отделимого универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $b_\xi \le [\![x = x_\xi]\!]$ для всех $\xi \in \Xi$.

Перемешивание x семейства (x_ξ) с помощью (b_ξ) обозначают следующим образом: $x = \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) = \mathrm{mix}\{b_\xi x_\xi \mid \xi\in\Xi\}$. Перемешивание связано с главной особенностью булевозначной модели — процедурой «ступенчатого» набора высшей оценки истинности.

(4) Пусть $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$. Определим функцию bx на $\mathrm{dom}(bx) := \mathrm{dom}(x)$ по правилу: $bx : t \mapsto b\wedge x(t)$ для $t\in\mathrm{dom}(x)$. Тогда $bx\in\mathbb{V}^{(B)}$ и для любых $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы равенства $[\![x\in by]\!] = b\wedge[\![x\in y]\!]$ и $[\![bx = by]\!] = b \to [\![x = y]\!]$.

Проверка первого соотношения состоит в непосредственном подсчете булевых значений истинности с привлечением бесконечного дистрибутивного закона:

$$[\![x\in by]\!] = \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(by)} (by)(t)\wedge[\![t = x]\!] = b\wedge \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(y)} y(t)\wedge[\![t = x]\!] = b\wedge[\![x\in y]\!].$$

Второе равенство использует правила оценивания из 2.2:

$$[\![bx = by]\!] = \Bigg(\bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(by)} (by)(t) \to [\![t \in bx]\!]\Bigg) \wedge \Bigg(\bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(bx)} (bx)(t) \to [\![t \in by]\!]\Bigg) =$$

$$= \Bigg(\bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(y)} (b \wedge y(t)) \to (b \wedge [\![t \in x]\!])\Bigg) \wedge \Bigg(\bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} (b \wedge x(t)) \to (b \wedge [\![t \in y]\!])\Bigg) =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(y)} ((b \wedge y(t)) \to b) \wedge ((b \wedge y(t)) \to [\![t \in x]\!]) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} ((b \wedge x(t)) \to b) \wedge ((b \wedge x(t)) \to [\![t \in y]\!]) =$$

$$= \Bigg(\bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(y)} b \to (y(t) \to [\![t \in x]\!])\Bigg) \wedge \Bigg(\bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} b \to (x(t) \to [\![t \in y]\!])\Bigg) =$$

$$= b \to [\![x = y]\!].$$

(5) Для $b \in B$ и $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет $[\![bx = x]\!] = b \vee [\![x = \varnothing]\!]$ и $[\![bx = \varnothing]\!] = \neg b \vee [\![x = \varnothing]\!]$. В частности, $\mathbb{V}^{(B)} \models bx = \mathrm{mix}\{bx, \neg b\varnothing\}$.

(6) Пусть (b_ξ) — разбиение единицы в B, а семейство $(x_\xi) \subset \mathbb{V}^{(B)}$ таково, что $\mathbb{V}^{(B)} \models x_\xi \neq x_\eta$ для любых $\xi \neq \eta$. Тогда существует элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![x = x_\xi]\!] = b_\xi$ при всех ξ. В самом деле, положим $x := \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ и $a_\xi := [\![x = x_\xi]\!]$. По условию $a_\xi \wedge a_\eta = [\![x = x_\xi]\!] \wedge [\![x_\eta = x]\!] \leq \neg[\![x_\xi \neq x_\eta]\!] = \mathbb{0}$ при $\xi \neq \eta$. Кроме того, $b_\xi \leq a_\xi$ для всех ξ в силу свойств перемешивания. Таким образом, (a_ξ) также разбиение единицы в B. С другой стороны, $\neg b_\xi = \bigvee_{\eta\neq\xi} b_\eta \leq \bigvee_{\eta\neq\xi} a_\eta = \neg a_\xi$ и $\neg b_\xi \leq \neg a_\xi$, т. е. $b_\xi \geq a_\xi$. Итак, разбиения единицы (b_ξ) и (a_ξ) совпадают.

(7) Рассмотрим формулы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ теории ZFC. Допустим, что для некоторого $u_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $[\![\varphi(u_0)]\!] = \mathbb{1}$. Тогда

$$[\![(\forall\, x)(\varphi(x) \to \psi(x))]\!] = \bigwedge \big\{[\![\psi(u)]\!] \mid u \in \mathbb{V}^{(B)},\ [\![\varphi(u)]\!] = \mathbb{1}\big\},$$

$$[\![(\exists\, x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))]\!] = \bigvee \big\{[\![\psi(u)]\!] \mid u \in \mathbb{V}^{(B)},\ [\![\varphi(u)]\!] = \mathbb{1}\big\}.$$

Эти формулы раскрывают «мозаичные» механизмы верификации в $\mathbb{V}^{(B)}$.

3.3. **Функциональная реализация.** Пусть Q — стоуново пространство полной булевой алгебры B. Обозначим через $\mathfrak{U}$ (отделимый) булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$. Для каждой точки $q \in Q$ введем отношение эквивалентности $\sim_q$ на классе $\mathfrak{U}$ следующим образом: $u \sim_q v \ \leftrightarrow\ q \in [\![u = v]\!]$. Рассмотрим расслоение $V^Q := \big\{\big(q, \sim_q(u)\big) \mid q \in Q,\ u \in \mathfrak{U}\big\}$ и условимся обозначать пару $\big(q, \sim_q(u)\big)$ символом $\widehat{u}(q)$. Очевидно, что для каждого элемента $u \in \mathfrak{U}$ отображение $\widehat{u} : q \mapsto \widehat{u}(q)$ представляет собой сечение расслоения V^Q. Заметим, что для всякого $x \in V^Q$ существуют $u \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $\widehat{u}(q) = x$. Кроме того, равенство $\widehat{u}(q) = \widehat{v}(q)$ выполнено тогда и только тогда, когда $q \in [\![u = v]\!]$.

Превратим каждый слой V^q расслоения V^Q в алгебраическую систему сигнатуры $\{\in\}$, полагая $V^q \models x \in y \ \leftrightarrow\ q \in [\![u \in v]\!]$, где элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\widehat{u}(q) = x$ и $\widehat{v}(q) = y$. Легко убедиться в том, что приведенное определение корректно. Действительно, если $\widehat{u}_1(q) = x$ и $\widehat{v}_1(q) = y$ для какой-либо другой пары элементов u_1, v_1, то утверждения $q \in [\![u \in v]\!]$ и $q \in [\![u_1 \in v_1]\!]$ эквивалентны.

Несложно убедиться в том, что класс, составленный множествами $\{\widehat{u}(A) \mid u \in \mathfrak{U}\}$, где A — открыто-замкнутое подмножество Q, является базой некоторой топологии на V^Q. Это позволяет рассматривать V^Q как непрерывное расслоение, называемое *непрерывным поливерсумом*. Под *непрерывным сечением* расслоения V^Q понимают сечение, являющееся непрерывной функцией. Обозначим через $\mathfrak{C}$ класс всех непрерывных сечений V^Q.

Отображение $u \mapsto \widehat{u}$ осуществляет биекцию между $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{C}$, в которой легко распознать основу для удобной функциональной реализации булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Детали этой универсальной конструкции, принадлежащей Гутману и Лосенкову, приведены в [8, гл. 6].

3.4. **Социализация.** Математика двадцатого века дала немало примеров достижений, полученных за счет социализации объектов и проблем, т. е. включения их в класс себе подобных[3]. Булевозначные модели получают естественный статут в рамках теории категорий. Идея переменного множества стала основой категорного анализа логики, осуществляемого в рамках современной теории топосов [4].

3.5. **Дистанционное моделирование.** Свойства булевозначного универсума отражают новую научную концепцию, которую можно назвать *заочным* или *дистанционным моделированием*. Поясним суть этой концепции ее сравнением с традиционными подходами.

Сталкиваясь с двумя классическими моделями одной теории, мы пытаемся установить взаимно однозначное соответствие между универсумами этих моделей. Если такую биекцию удается подобрать, переводя предикаты и операции одной модели в их аналоги в другой, то мы говорим об изоморфности моделей. Таким образом, описанное представление об изоморфизме подразумевает явное сопоставление моделей — предъявление биекции универсумов.

Представим себе, что мы лишены физической возможности поэлементного сравнения моделей, однако можем обмениваться информацией с обладателем другой модели на расстоянии. В процессе общения легко установить, что наш партнер изучает с помощью своей модели объекты, которые он именует хорошо знакомыми нам словами, говоря о множествах, их сравнении и принадлежности. Поскольку нас интересует ZFC, мы спрашиваем у него — истинны ли аксиомы ZFC? Поработав в своей модели, партнер сообщает «да, истинны». Убедившись также, что наш партнер использует те же правила вывода, что приняты нами, мы должны признать, что имеющаяся у него модель — это модель интересующей нас теории. Полезно подчеркнуть, что сделав такой вывод, мы ничего не узнали ни об объектах, составляющих его модель, ни о процедурах, с помощью которых он отличает истинные утверждения от ложных.

Новизна дистанционного моделирования связана с отказом от отождествления предметных областей и с допуском ранее неизвестных процедур верификации утверждений.

[3]Гильберт сказал в своем докладе [3]: «Если нам не удается найти решение математической проблемы, то часто причина этого заключается в том, что мы не овладели еще достаточно общей точкой зрения, с которой рассматриваемая проблема представляется лишь отдельным звеном в цепи родственных проблем».

3.6. **Технология.** Для доказательства относительной совместимости теоретико-множественных утверждений универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ используют следующую схему. Пусть $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$ — расширения теории Цермело — Френкеля ZF (без выбора), причем из совместимости ZF следует совместимость $\mathscr{S}$. Предположим, что можно определить B так, что $\mathscr{S} \models$ «B — полная булева алгебра» и при этом $\mathscr{S} \models [\![\varphi]\!] = \mathbb{1}$ для каждой аксиомы φ теории $\mathscr{T}$. Тогда из совместимости ZF следует совместимость $\mathscr{T}$. Так $\mathbb{V}^{(B)}$ используют в исследованиях по основаниям математики.

Другие возможности применения $\mathbb{V}^{(B)}$ базируются на том, что при любом выборе булевой алгебры B этот универсум — полигон для испытания произвольного математического события. В силу принципов переноса и максимума в любом из $\mathbb{V}^{(B)}$ имеются объекты, играющие роли чисел, групп, банаховых пространств, многообразий и вообще всех уже введенных в оборот и еще пока непридуманных математических понятий. Эти объекты можно воспринимать как нестандартные реализации соответствующих исходных образований.

Все знаменитые и не очень теоремы интерпретируются для элементов $\mathbb{V}^{(B)}$ и получают при этом наивысшую оценку истинности. Возникает возможность новой технологии — сопоставления интерпретаций математических фактов в универсумах над разными булевыми алгебрами. Разработка соответствующего аппарата составляет существо булевозначного анализа.

4. **Спуски и подъемы**

Никакое сопоставление невозможно без своего рода диалога между $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(B)}$. Нам нужен достаточно удобный математический инструментарий для сравнительного анализа интерпретации понятий и фактов в разных моделях. Соответствующая *техника спусков и подъемов* основана на операциях канонического погружения, спуска и подъема, которыми мы сейчас и займемся. Начнем с канонического погружения универсума фон Неймана.

4.1. **Каноническое погружение.** Взяв $x \in \mathbb{V}$, обозначим символом $x^{\wedge}$ *стандартное имя* x в $\mathbb{V}^{(B)}$; т. е. элемент, определенный следующей схемой рекурсии:

$$\varnothing^{\wedge} := \varnothing, \quad \operatorname{dom}(x^{\wedge}) := \{y^{\wedge} \mid y \in x\}, \quad \operatorname{im}(x^{\wedge}) := \{\mathbb{1}\}.$$

Отметим некоторые свойства отображения $x \mapsto x^{\wedge}$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

(1) Если $x \in \mathbb{V}$, а φ — формула ZFC, то

$$[\![(\exists y \in x^{\wedge})\, \varphi(y)]\!] = \bigvee\{[\![\varphi(z^{\wedge})]\!] \mid z \in x\},$$
$$[\![(\forall y \in x^{\wedge})\, \varphi(y)]\!] = \bigwedge\{[\![\varphi(z^{\wedge})]\!] \mid z \in x\}.$$

(2) Если x и y — элементы $\mathbb{V}$, то с помощью трансфинитной индукции мы видим, что

$$x \in y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models x^{\wedge} \in y^{\wedge}, \quad x = y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models x^{\wedge} = y^{\wedge}.$$

Другими словами, стандартное имя можно рассматривать как функтор погружения $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

Пусть $2 := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, где $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ — нуль и единица булевой алгебры B. Эту двухэлементную алгебру воспринимают как одну из ипостасей двойки. Ясно, что

$\mathbb{V}^{(2)}$ можно рассматривать как подкласс $\mathbb{V}^{(B)}$ Нет сомнений, что стандартное имя отображает $\mathbb{V}$ на $\mathbb{V}^{(2)}$, что фиксирует следующее предложение:

(3) $(\forall u \in \mathbb{V}^{(2)})\,(\exists! x \in \mathbb{V})\ \mathbb{V}^{(B)} \models u = x^{\wedge}$.

(4) Формулу называют *ограниченной*, если каждая связанная переменная в ней входит под знак ограниченного квантора; т. е. квантора, распространенного на какое-либо множество. Точнее говоря, каждая связанная переменная x ограничена квантором вида $(\forall x \in y)$ или $(\exists x \in y)$ для некоторого y.

Ограниченный принцип переноса. *Для каждой ограниченной формулы φ теории* ZFC *и любого набора $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ выполнено соотношение:*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1^{\wedge}, \dots, x_n^{\wedge}).$$

Работая далее в отделимом универсуме $\overline{\mathbb{V}}^{(B)}$, условимся сохранять символ $x^{\wedge}$ за выделенным элементом класса, соответствующего $x^{\wedge}$.

(5) В качестве примера отметим полезное следствие ограниченного принципа переноса:

$$«\Phi \text{ — соответствие из } x \text{ в } y» \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models «\Phi^{\wedge} \text{ — соответствие из } x^{\wedge} \text{ в } y^{\wedge}»;$$

$$«f \text{ — функция из } x \text{ в } y» \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models «f^{\wedge} \text{ — функция из } x^{\wedge} \text{ в } y^{\wedge}»$$

(при этом $f(a)^{\wedge} = f^{\wedge}(a^{\wedge})$ для всех $a \in x$). Таким образом, стандартное имя можно рассматривать как ковариантный функтор из категории множеств (или соответствий) внутри $\mathbb{V}$ в подходящую подкатегорию $\mathbb{V}^{(2)}$ внутри отделимого универсума $\mathbb{V}^{(B)}$.

(6) Множество x называют *конечным*, если x совпадает с образом функции, определенной на конечном ординале. Символически это выражают так: $\mathrm{Fin}(x)$. Следовательно, $\mathrm{Fin}(x) := (\exists\, n)(\exists\, f)(n \in \omega \wedge \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = n \wedge \mathrm{im}(f) = x)$, где, как обычно, $\omega := \{0, 1, 2, ...\}$. Ясно, что выписанная формула не является ограниченной. Тем не менее преобразование конечных множеств с помощью канонического погружения достаточно удобно. В самом деле, обозначим через $\mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(x)$ класс конечных подмножеств x, т. е. $\mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(x) := \{y \in \mathscr{P}(x) \mid \mathrm{Fin}(y)\}$. Для любого множества x имеет место соотношение: $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(x)^{\wedge} = \mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(x^{\wedge})$. Ввиду неограниченности формулы, определяющей множество подмножеств, в общем случае будет только $[\![\mathscr{P}(x)^{\wedge} \subset \mathscr{P}(x^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$.

(7) Пусть ρ — произвольный автоморфизм булевой алгебры B, а ψ_ρ — элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, определяемый функцией $\{(b^{\wedge}, \rho(b)) \mid b \in B\}$. Тогда

- **(a)** $\rho(b) = [\![b^{\wedge} \in \psi_\rho]\!]$ для любого $b \in B$;
- **(b)** для множества $A \subset B$ выполняется $[\![A^{\wedge} \subset \psi_\rho \to (\bigwedge A)^{\wedge} \in \psi_\rho]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $\rho\,(\bigwedge A) = \bigwedge \rho(A)$;
- **(c)** $[\![\psi_\rho$ — ультрафильтр на $B^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$.

(8) Пусть π — гомоморфизм B в полную булеву алгебру C. Рекурсией по отношению $y \in \mathrm{dom}(x)$ мы можем определить отображение $\pi^* : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^{(C)}$ такое, что $\mathrm{dom}(\pi^* x) := \{\pi^* y \mid y \in \mathrm{dom}(x)\}$ и $\pi^* x : v \mapsto \bigvee \big\{\pi(x(z)) \mid z \in \mathrm{dom}(x),\ \pi^* z = v\big\}$. Если гомоморфизм π инъективен, то инъективным будет и отображение π^*. При этом $\pi^* x : \pi^* y \mapsto \pi(x(y))$ для всех $y \in \mathrm{dom}(x)$.

Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в булевой алгебре B, а $\mathfrak{U}'$ — двойственный к нему идеал, т. е. $\mathfrak{U}' := \{\neg b \mid b \in \mathfrak{U}\}$. Тогда фактор-алгебра $B/\mathfrak{U}'$ двухэлементна и ее можно отождествить с булевой алгеброй $2 := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Фактор-гомоморфизм $\pi : B \to 2$ не является, вообще говоря, полным. Это не позволяет связать оценки истинности в $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(2)}$. Однако если π полон (т. е. если $\mathfrak{U}$ — главный ультрафильтр), то для любых формулы $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ и набора $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$\mathbb{V}^{(2)} \models \varphi(\pi^* u_1,\dots,\pi^* u_n) \leftrightarrow [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] \in \mathfrak{U}\,,$$

ибо для $b \in B$ равносильны соотношения $\pi(b) = \mathbb{1}$ и $b \in \mathfrak{U}$.

(9) Путем факторизации из универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ и ультрафильтра $\mathfrak{U}$ можно сконструировать модель, отличную от $\mathbb{V}^{(2)}$.

Введем в $\mathbb{V}^{(B)}$ отношение $\sim_{\mathfrak{U}}$ по формуле $\sim_{\mathfrak{U}} := \{(x,y) \in \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)} \mid [\![x = y]\!] \in \mathfrak{U}\}$. Ясно, что $\sim_{\mathfrak{U}}$ — эквивалентность на $\mathbb{V}^{(B)}$. Обозначим символом $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U}$ фактор-класс $\mathbb{V}^{(B)}$ по $\sim_{\mathfrak{U}}$ и наделим его отношением $\in_{\mathfrak{U}} := \{(\widetilde{x},\widetilde{y}) \mid x,y \in \mathbb{V}^{(B)},\ [\![x \in y]\!] \in \mathfrak{U}\}$, где $x \mapsto \widetilde{x}$ — каноническое фактор-отображение из $\mathbb{V}^{(B)}$ в $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U}$. Можно показать, что $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U} \models \varphi(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n) \leftrightarrow [\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!] \in \mathfrak{U}$ для $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и формулы φ теории ZFC.

4.2. **Спуск.** Взяв произвольный элемент x (отделимого) булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$, определим *спуск* $x{\downarrow}$ элемента x следующим образом:

$$x{\downarrow} := \{y \in \mathbb{V}^{(B)} \mid [\![y \in x]\!] = \mathbb{1}\}.$$

Приведем простейшие свойства спусков:

(1) Класс $x{\downarrow}$ — это множество, т. е. $x{\downarrow} \in \mathbb{V}$ для $x \in \mathbb{V}^{(B)}$. Если $[\![x \ne \varnothing]\!] = \mathbb{1}$, то $x{\downarrow}$ — непустое множество.

(2) Пусть $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![z \ne \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. Тогда для любой формулы φ теории ZFC будет

$$[\![(\forall x \in z)\,\varphi(x)]\!] = \bigwedge\{[\![\varphi(x)]\!] \mid x \in z{\downarrow}\},$$

$$[\![(\exists x \in z)\,\varphi(x)]\!] = \bigvee\{[\![\varphi(x)]\!] \mid x \in z{\downarrow}\}.$$

При этом существует $x_0 \in z{\downarrow}$ такой, что $[\![\varphi(x_0)]\!] = [\![(\exists x \in z)\,\varphi(x)]\!]$.

(3) Пусть Φ — соответствие из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Иначе говоря, Φ, X и Y — элементы $\mathbb{V}^{(B)}$ и при этом $[\![\Phi \subset X \times Y]\!] = \mathbb{1}$. Тогда найдется, и притом единственное, соответствие $\Phi{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ такое, что $\Phi{\downarrow}(A{\downarrow}) = \Phi(A){\downarrow}$ для любого непустого подмножества A множества X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Возникающее соответствие $\Phi{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ называют *спуском* соответствия Φ из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

(4) Спуск суперпозиции соответствий внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ равен суперпозиции их спусков: $(\Psi \circ \Phi){\downarrow} = \Psi{\downarrow} \circ \Phi{\downarrow}$.

(5) Если Φ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то $(\Phi^{-1}){\downarrow} = (\Phi{\downarrow})^{-1}$.

(6) Пусть Id_X — тождественное отображение некоторого $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда $(\mathrm{Id}_X){\downarrow} = \mathrm{Id}_{X{\downarrow}}$.

(7) Предположим, что для $X, Y, f \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $[\![f : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$, т. е. f — отображение из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда $f{\downarrow}$ — единственное отображение из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$, удовлетворяющее соотношению $[\![f{\downarrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in X{\downarrow}$.

В силу (1)–(7), мы можем рассматривать спуск как функтор из категории B-значных множеств и отображений (соответствий) в категорию обычных множеств и отображений (соответствий) в смысле $\mathbb{V}$.

(8) Взяв $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$, обозначим через $(x_1,\dots,x_n)^B$ соответствующую упорядоченную n-ку внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Допустим, что P — это n-арное отношение на X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $X, P \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![P \subset X^n]\!] = \mathbb{1}$. Тогда существует n-арное отношение P' на $X{\downarrow}$ такое, что

$$(x_1,\dots,x_n) \in P' \leftrightarrow [\![(x_1,\dots,x_n)^B \in P]\!] = \mathbb{1}.$$

Допуская небольшую вольность, мы будем обозначать отношение P' занятым символом $P{\downarrow}$ и именовать его *спуском* P. Аналогичным образом осуществляют спуск функций нескольких переменных.

4.3. **Подъем.** Пусть $x \in \mathbb{V}$ и $x \subset \mathbb{V}^{(B)}$, т. е. пусть x — это некоторое множество, составленное из B-значных множеств или, другими словами, $x \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. Положим $\varnothing{\uparrow} := \varnothing$ и $\operatorname{dom}(x{\uparrow}) := x, \quad \operatorname{im}(x{\uparrow}) := \{\mathbb{1}\}$ при условии, что $x \neq \varnothing$. Элемент $x{\uparrow}$ (отделимого) универсума $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. выделенный представитель класса $\{y \in \mathbb{V}^{(B)} \mid [\![y = x{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}\}$, называют *подъемом* x.

(1) Следующие равенства справедливы для всех $x \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ и любой формулы φ:

$$[\![(\forall z \in x{\uparrow})\,\varphi(z)]\!] = \bigwedge_{y\in x} [\![\varphi(y)]\!], \quad [\![(\exists z \in x{\uparrow})\,\varphi(z)]\!] = \bigvee_{y\in x} [\![\varphi(y)]\!].$$

Производя подъем соответствия $\Phi \subset X \times Y$, следует иметь в виду возможное различие между его областью отправления X и областью определения $\operatorname{dom}(\Phi) := \{x \in X \mid \Phi(x) \neq \varnothing\}$. Это обстоятельство несущественно для наших ближайших целей. Поэтому говоря о спусках, мы всегда будем иметь в виду только всюду определенные соответствия: $\operatorname{dom}(\Phi) = X$.

(2) Пусть $X, Y, \Phi \in \mathbb{V}$, $X, Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и Φ — соответствие из X в Y. Существует, и притом единственное, соответствие $\Phi{\uparrow}$ из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такое, что равенство $\Phi{\uparrow}(A{\uparrow}) = \Phi(A){\uparrow}$ справедливо для каждого подмножества A множества $\operatorname{dom}(\Phi)$, в том и только в том случае, если Φ *экстенсионально*, т. е. удовлетворяет следующему условию:

$$y_1 \in \Phi(x_1) \to [\![x_1 = x_2]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in \Phi(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!]$$

для $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(\Phi)$. При этом $\Phi{\uparrow} = \Phi'{\uparrow}$, где $\Phi' := \{(x,y)^B \mid (x,y) \in \Phi\}$. Элемент $\Phi{\uparrow}$ называют *подъемом* исходного соответствия Φ.

(3) Суперпозиция экстенсиональных соответствий тоже экстенсиональна. При этом подъем суперпозиции равен суперпозиции подъемов (внутри $\mathbb{V}^{(B)}$): т. е. при условии $\operatorname{dom}(\Psi) \supset \operatorname{im}(\Phi)$ будет $\mathbb{V}^{(B)} \models (\Psi \circ \Phi){\uparrow} = \Psi{\uparrow} \circ \Phi{\uparrow}$.

Заметим, что если Φ и Φ^{-1} экстенсиональны, то $(\Phi{\uparrow})^{-1} = (\Phi^{-1}){\uparrow}$. Однако, в общем случае экстенсиональность Φ никак не гарантирует экстенсиональность Φ^{-1}.

(4) Стоит упомянуть, что если экстенсиональное соответствие f является функцией из X в Y, то подъем $f{\uparrow}$ соответствия f будет функцией из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$. При этом свойство экстенсиональности можно записать следующим образом: $[\![x_1 = x_2]\!] \leq [\![f(x_1) = f(x_2)]\!]$ для всех $x_1, x_2 \in X$.

Для множества $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$, символом $\operatorname{mix}(X)$ мы будем обозначать совокупность всех перемешиваний вида $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$ и (b_ξ) — произвольное разбиение единицы. Нижеследующие предложения именуют *правилами сокращения стрелок* или *правилами подъемов и спусков*. Есть много веских оснований называть их просто *правилами Эшера* [6].

(5) Пусть X и X' — два подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$ и $f : X \to X'$ — экстенсиональное отображение. Предположим, что $Y, Y', g \in \mathbb{V}^{(B)}$ удовлетворяют условию $[\![Y \neq$

$\varnothing]\!] = [\![g : Y \to Y']\!] = \mathbb{1}$. Тогда

$$X\uparrow\downarrow = \mathrm{mix}(X), \quad Y\downarrow\uparrow = Y;$$
$$f\uparrow\downarrow|_X = f, \quad g\downarrow\uparrow = g.$$

(6) По аналогии с 4.1 (6) легко вывести следующее полезное соотношение

$$\mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(X\uparrow) = \{\theta\uparrow \mid \theta \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(X)\}\uparrow .$$

В общем случае можно утверждать лишь, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеет место включение $\mathscr{P}(X\uparrow) \supset \{\theta\uparrow \mid \theta \in \mathscr{P}(X)\}\uparrow$.

4.4. **Модифицированные спуски и подъемы.** Пусть $X \in \mathbb{V}$, $X \neq \varnothing$, т. е. X — непустое множество. Пусть, далее, буква $\imath$ обозначает каноническое вложение $x \mapsto x^\wedge$ $(x \in X)$. Тогда $\imath(X)\uparrow = X^\wedge$ и $X = \imath^{-1}(X^\wedge\downarrow)$. Используя приведенные соотношения, мы можем распространить операции спуска и подъема на случай, когда Φ — соответствие из X в $Y\downarrow$, а $[\![\Psi$ — соответствие из $X^\wedge$ в $Y]\!] = \mathbb{1}$, где $Y \in \mathbb{V}^{(B)}$. Именно, положим $\Phi\upharpoonleft := (\Phi \circ \imath^{-1})\uparrow$ и $\Psi\downharpoonleft := \Psi\downarrow \circ \imath$. В этой ситуации элемент $\Phi\upharpoonleft$ называют *модифицированным подъемом* соответствия Φ, а $\Psi\downharpoonleft$ именуют *модифицированным спуском* соответствия Ψ. (В случае, когда контекст устраняет двусмысленность, мы будем по-прежнему говорить просто о подъемах и спусках и использовать обыкновенные стрелки.) Легко проверить, что $\Phi\upharpoonleft$ — единственное соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющее соотношению $[\![\Phi\upharpoonleft(x^\wedge) = \Phi(x)\uparrow]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in X$. Аналогично, $\Psi\downharpoonleft$ — единственное соответствие из X в $Y\downarrow$, для которого равенство $\Psi\downharpoonleft(x) = \Psi(x^\wedge)\downarrow$ имеет место при всех $x \in X$.

Если $\Phi := f$ и $\Psi := g$ — это функции, то приведенные соотношения принимают вид $[\![f\upharpoonleft(x^\wedge) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$, $\quad g\downharpoonleft(x) = g(x^\wedge)$ для всех $x \in X$.

5. Элементы булевозначного анализа

В каждом булевозначном универсуме имеется полный набор математических объектов, включающий множества с любыми дополнительными структурами: группы, кольца, алгебры и т. п. Применение спуска к алгебраическим системам в булевозначной модели выделяет образования с новыми свойствами и ведет к выявлению фактов об их строении и взаимосвязях. Нахождение таких связей и составляет содержание булевозначного анализа. В настоящем обзоре естественно ограничиться основами соответствующей техники.

5.1. **Булевы множества.** Начнем с распознавания простейших объектов, реализуемых внутри булевозначного универсума.

(1) *Булево множество* или *множество с B-структурой* или же просто *B-множество* — это по определению пара (X, d), где $X \in \mathbb{V}$, $X \neq \varnothing$, и d — отображение из $X \times X$ в булеву алгебру B такие, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено:

(a) $d(x, y) = \mathbb{0} \leftrightarrow x = y$;
(b) $d(x, y) = d(y, x)$;
(c) $d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y)$.

Пример B-множества представляет каждое непустое подмножество $\varnothing \neq X \subset \mathbb{V}^{(B)}$, если считать, что $d(x,y) := [\![x \neq y]\!] = \neg[\![x = y]\!]$ для $x, y \in X$. Другой пример возникает, если снабдить непустое множество X «дискретной B-метрикой» d, т. е. считать, что $d(x,y) = \mathbb{1}$, если $x \neq y$, и $d(x,y) = \mathbb{0}$, если $x = y$.

(2) На любой булевой алгебре D в качестве D-метрики можно взять *симметрическую разность*: $x \vartriangle y := (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$. Разберем связанную с этим конструкцию. Пусть ψ — ультрафильтр на булевой алгебре D. Рассмотрим булево множество (X, d_X) с D-метрикой d_X. Введем бинарное отношение $\sim_\psi$ в X формулой $(x,y) \in \sim_\psi \leftrightarrow \neg\, d_X(x,y) \in \psi$. Из определения булевой метрики видно, что $\sim_\psi$ — отношение эквивалентности. Пусть $X/{\sim_\psi}$ — фактор-множество X по эквивалентности $\sim_\psi$, а $\pi_X : X \to X/{\sim_\psi}$ — каноническое фактор-отображение. Если мы начинали с булева множества $(D, \vartriangle)$, то в качестве $D/{\sim_\psi}$ получится двухэлементная булева алгебра 2. При этом существует единственное отображение $\overline{d} : X/{\sim_\psi} \to 2$ такое, что $\overline{d}(\pi_X(x), \pi_X(y)) = \pi_D(d(x,y))$ для всех $x, y \in X$. Кроме того, $\overline{d}$ — дискретная булева метрика на $X/{\sim_\psi}$. Если d_X — дискретная метрика, то $\sim_\psi = \mathrm{Id_X}$ и $X/{\sim_\psi} = X$.

(3) Пусть (X, d) — некоторое B-множество. Пусть $\psi := \psi_{\mathrm{Id}_B}$ — ультрафильтр, построенный в соответствии с 4.1 (7) на $B^\wedge$. По ограниченному принципу переноса $(X^\wedge, d^\wedge)$ является $B^\wedge$-множеством внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $\mathscr{X} := X^\wedge/{\sim_\psi}$. При этом $[\![x^\wedge \sim_\psi y^\wedge]\!] = \neg d(x,y)$ для всех $x, y \in X$. Следовательно, существуют элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и инъекция $\imath : X \to X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ такие, что $d(x,y) = [\![\imath(x) \neq \imath(y)]\!]$ для всех $x, y \in X$ и каждый элемент $x' \in X'$ допускает представление $x' = \mathrm{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi \imath(x_\xi))$, где $(x_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset X$ и $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в B. Элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ называют *булевозначной реализацией* B-множества X. Если X — дискретное B-множество, то $\mathscr{X} = X^\wedge$ и $\imath(x) = x^\wedge$ для всех $x \in X$. Если $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$, то $\imath{\uparrow}$ — инъекция из $X{\uparrow}$ в $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

(4) Отображение f из B-множества (X, d) в B-множество (X', d') называют *сжимающим* при условии, что $d'(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ для всех $x, y \in X$.

Пусть X и Y — некоторые B-множества. Пусть, далее, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — их булевозначные реализации, а $\imath : X \to \mathscr{X}{\downarrow}$ и $\jmath : Y \to \mathscr{Y}{\downarrow}$ — соответствующие инъекции. Если $f : X \to Y$ — сжимающее отображение, то существует, и притом единствен, элемент $g \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![g : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}]\!] = \mathbb{1}$ и $f = \jmath^{-1} \circ g{\downarrow} \circ \imath$. Условимся писать $\mathscr{X} := \mathscr{F}^\sim(X) := X^\sim$ и $g := \mathscr{F}^\sim(f) := f^\sim$.

(5) Справедливы утверждения:

(a) $\mathbb{V}^{(B)} \models f(A)^\sim = f^\sim(A^\sim)$ для $A \subset X$;

(b) Если $g : Y \to Z$ — сжимающее отображение, то $g \circ f$ также сжимающее отображение и $\mathbb{V}^{(B)} \models (g \circ f)^\sim = g^\sim \circ f^\sim$;

(c) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$f^\sim$ — инъекция» в том и только в том случае, если f служит B-изометрией;

(d) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$f^\sim$ —сюръекция» в том и только в том случае, если будет

$$(\forall y \in Y) \ \bigvee \{d(f(x), y) \mid x \in X\} = \mathbb{1}.$$

(6) Рассмотрим B-множество (X, d). Пусть (b_ξ) — разбиение единицы в B и (x_ξ) — семейство элементов B-множества X. *Перемешиванием семейства* (x_ξ) *с помощью* (b_ξ) называют элемент $x \in X$ такой, что $b_\xi \wedge d(x, x_\xi) = \mathbb{0}$ для всех ξ. Как и раньше, перемешивание обозначаем символом $x = \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$. Перемешивание (если оно существует) единственно. В самом деле, если $y \in X$

и $(\forall\,\xi)(b_\xi \wedge d(y, x_\xi) = \mathbb{0})$, то

$$b_\xi \wedge d(x, y) \leq b_\xi \wedge (d(x, x_\xi) \vee d(x_\xi, y)) = \mathbb{0}.$$

В полной булевой алгебре B выполнен бесконечный дистрибутивный закон и, стало быть,

$$d(x, y) = \bigvee \{b_\xi \wedge d(x, y)\} = \mathbb{0}.$$

Значит, $x = y$.

Подчеркнем, что в отличие от универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 4.3) перемешивания в абстрактном B-множестве существуют не всегда.

(7) Взяв $A \subset X$, обозначим символом $\mathrm{mix}(A)$ множество всех перемешиваний элементов из A. Если $\mathrm{mix}(A) = A$, то говорят, что A — *циклическое подмножество* X. Пересечение всех циклических множеств, содержащих A, обозначают символом $\mathrm{cyc}(A)$. Булево множество X называют *расширенным* или *универсально полным*, если в нем существуют перемешивания $\mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ любых семейств $(x_\xi) \subset X$ относительно любых разбиений единицы $(b_\xi) \subset B$. В случае, когда такие перемешивания существуют лишь для конечных семейств элементов, само X называют *разложимым.* Можно показать, что если X — расширенное B-множество, то $\mathrm{mix}(A) = \mathrm{cyc}(A)$ для любого $A \subset X$. Циклическое подмножество B-множества не всегда является расширенным B-множеством. В то же время циклическое подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$ со своей канонической B-метрикой есть расширенное B-множество.

5.2. **Алгебраические B-системы.** Вспомним, что под *сигнатурой* понимают тройку $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$, где F и P — некоторые (возможно, пустые) множества и $\mathfrak{a}$ — отображение из $F \cup P$ в ω. Если множества F и P конечны, то σ именуют *конечной сигнатурой.* В приложениях обычно нам приходится иметь дело с алгебраическими системами конечной сигнатуры. Их рассмотрением мы и ограничимся.

Под *n-арной операцией* и *n-арным предикатом* на B-множестве A понимают сжимающие отображения $f : A^n \to A$ и $p : A^n \to B$ соответственно. Принято считать f и p *сжимающими* при условии, что

$$d\big(f(a_0, \dots, a_{n-1}), f(a'_0, \dots, a'_{n-1})\big) \leq \bigvee_{k=0}^{n-1} d(a_k, a'_k),$$

$$\triangle\big(p(a_0, \dots, a_{n-1}), p(a'_0, \dots, a'_{n-1})\big) \leq \bigvee_{k=0}^{n-1} d(a_k, a'_k)$$

для всех $a_0,\ a'_0, \dots, a_{n-1},\ a'_{n-1} \in A$, где d — это B-метрика на A.

Ясно, что данные выше определения зависят от B и было бы правильнее говорить о B-операциях, B-предикатах и т. п. Стоит, разумеется, придерживаться более простой и экономной практики, когда это не вызывает особых недоразумений.

Алгебраическая B-система $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ — это по определению пара (A, ν), где A — непустое B-множество, *основное множество* или *носитель* или *универсум* системы $\mathfrak{A}$, а ν — отображение такое, что

(a) $\mathrm{dom}(\nu) = F \cup P$;

(b) $\nu(f)$ — это $\mathfrak{a}(f)$-арная операция на A для всех $f \in F$;

(c) $\nu(p)$ — это $\mathfrak{a}(p)$-арный предикат на A для всех $p \in P$.

Принято называть ν *интерпретацией* $\mathfrak{A}$ и использовать обозначения f^ν и p^ν вместо $\nu(f)$ и $\nu(p)$. Сигнатуру алгебраической B-системы $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ часто обозначают через $\sigma(\mathfrak{A})$, а носитель A системы $\mathfrak{A}$ символом $|\mathfrak{A}|$.

Алгебраическую B-систему $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ именуют *расширенной* или *разложимой*, если таковым является носитель A. Раз $A^0 = \{\varnothing\}$, то 0-арные операции и предикаты на A представляют собою отображения из $\{\varnothing\}$ в множество A и алгебру B соответственно. Мы будем отождествлять отображение $g : \{\varnothing\} \to A \cup B$ с элементом $g(\varnothing)$. Каждая 0-арная операция на A трансформируется таким образом в единственный элемент A. Аналогично, множество всех 0-арных предикатов на A превращается в булеву алгебру B.

Если $F := \{f_1, \dots, f_n\}$ и $P := \{p_1, \dots, p_m\}$, то алгебраическую B-систему сигнатуры σ часто записывают как $(A, \nu(f_1), \dots, \nu(f_n),\ \nu(p_1), \dots, \nu(p_m))$ или даже $(A, f_1, \dots, f_n,\ p_1, \dots, p_m)$. При этом мы будем подставлять выражение $\sigma = (f_1, \dots, f_n, p_1, \dots, p_m)$ вместо $\sigma = (F, P, \mathfrak{a})$.

Перейдем к B-значной интерпретации языка первого порядка. Рассмотрим алгебраическую B-систему $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ сигнатуры $\sigma := \sigma(\mathfrak{A}) := (F, P, \mathfrak{a})$.

Пусть $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ — формулы сигнатуры σ с n свободными переменными. Допустим, что заданы $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$. В этой ситуации мы можем определить оценку истинности $|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \in B$ формулы φ в системе $\mathfrak{A}$ для данного набора значений $a_0, \dots, a_{n-1}$ переменных $x_0, \dots, x_{n-1}$. Определение, как обычно, дается индукцией по длине формулы φ. Рассматривая логические связки и кванторы, положим

$$
\begin{gathered}
|\varphi \wedge \psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \wedge |\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});\\
|\varphi \vee \psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \vee |\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});\\
|\neg\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \neg|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});\\
|(\forall\, x_0)\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n-1}) := \bigwedge_{a_0 \in A} |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});\\
|(\exists\, x_0)\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n-1}) := \bigvee_{a_0 \in A} |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}).
\end{gathered}
$$

Теперь следует разобраться с атомарными формулами. Допустим, что $p \in P$ символизирует m-арный предикат, $q \in P$ — это 0-арный предикат, а $t_0, \dots, t_{m-1}$ — термы сигнатуры σ, принимающие значения $b_0, \dots, b_{m-1}$ при заданных значениях $a_0, \dots, a_{n-1}$ переменных $x_0, \dots, x_{n-1}$. По определению мы положим:

$$
\begin{gathered}
|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \nu(q), \ \text{ если } \varphi = q;\\
|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \neg d(b_0, b_1), \quad \text{если } \varphi = (t_0 = t_1);\\
|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := p^\nu(b_0, \dots, b_{m-1}), \quad \text{если } \varphi = p(t_0, \dots, t_{m-1}),
\end{gathered}
$$

где d — это B-метрика на A.

Формулу $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ называют *выполненной* в алгебраической B-системе $\mathfrak{A}$ при заданных значениях $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ переменных $x_0, \dots, x_{n-1}$ и пишут $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ при условии, что $|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mathbb{1}_B$. Альтернативные выражения в этой ситуации таковы: значения $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ *удовлетворяют* $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ или $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ *истинно* в $\mathfrak{A}$. В случае двухэлементной булевой алгебры мы приходим к обычному пониманию выполнения формулы в алгебраической системе.

Вспомним, что замкнутую формулу φ сигнатуры σ называют *тавтологией* при условии, что φ выполнена в любой алгебраической $\mathbb{2}$-системе сигнатуры σ.

(1) Рассмотрим теперь алгебраические B-системы $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ и $\mathfrak{D} := (D, \mu)$ одной сигнатуры σ. Отображение $h : A \to D$ называют *гомоморфизмом* $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{D}$ при условии, что для всех $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ выполнены следующие соотношения:

(a) $d_D(h(a_1), h(a_2)) \le d_A(a_1, a_2)$;
(b) $h(f^\nu) = f^\mu$, если $\mathfrak{a}(f) = 0$;
(c) $h(f^\nu(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^\mu(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$, если $0 \ne n := \mathfrak{a}(f)$;
(d) $p^\nu(a_0, \dots, a_{n-1}) \le p^\mu(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$, где $n := \mathfrak{a}(p)$.

(2) Гомоморфизм h называют *сильным*, если для любого $p \in P$ такого, что $0 \ne n := \mathfrak{a}(p)$, при всех $d_0, \dots, d_{n-1} \in D$ выполнено неравенство

$$p^\mu(d_0, \dots, d_{n-1}) \le$$
$$\le \bigvee_{a_0, \dots, a_{n-1} \in A} p^\nu(a_0, \dots, a_{n-1}) \wedge \neg d_D(d_0, h(a_0)) \wedge \dots \wedge \neg d_D(d_{n-1}, h(a_{n-1})).$$

Если в (a) и (d) имеет место равенство, то h называют *изоморфизмом* из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{D}$. Несомненно, что каждый сюръективный изоморфизм и, в частности, тождественное отображение $\mathrm{Id}_A : A \to A$ служат сильными гомоморфизмами. Суперпозиция (сильных) гомоморфизмов — снова (сильный) гомоморфизм. Очевидно, что если h — гомоморфизм и h^{-1} тоже гомоморфизм, то h изоморфизм.

Снова отметим, что в случае двухэлементной булевой алгебры мы приходим к самым обычным понятиям гомоморфизма, сильного гомоморфизма и изоморфизма.

5.3. **Спуск двойки.** Прежде, чем переходить к определению спуска общей алгебраической системы, рассмотрим спуск двухэлементной булевой алгебры. Выберем произвольные два элемента $0,\ 1 \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющие условию $[\![0 \ne 1]\!] = \mathbb{1}_B$. Например, можно считать, что $0 := \mathbb{0}_B^\wedge$ и $1 := \mathbb{1}_B^\wedge$. Спуск D двухэлементной булевой алгебры $\{0,1\}^B$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ представляет собой полную булеву алгебру, изоморфную B. Формулы $[\![\chi(b) = 1]\!] = b$ и $[\![\chi(b) = 0]\!] = \neg b$, где $b \in B$, задают изоморфизм $\chi : B \to D$.

5.4. **Спуск алгебраической *B*-системы.** Рассмотрим теперь алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры σ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, и пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathfrak{A} = (A, \nu)$ для некоторых A и ν». *Спуском* $\mathfrak{A}$ называют пару $\mathfrak{A}{\downarrow} := (A{\downarrow}, \mu)$, где μ — функция, определяемая с помощью следующих формул: $f^\mu := f^\nu{\downarrow}$ для $f \in F$, а $p^\mu := \chi^{-1} \circ p^\nu{\downarrow}$ для $p \in P$. Здесь χ — указанный в 5.3 изоморфизм булевых алгебр B и $\{0,1\}^B{\downarrow}$.

(1) Пусть $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ — фиксированная формула сигнатуры σ от n свободных переменных. Выпишем формулу $\Phi(x_0, \dots, x_{n-1}, \mathfrak{A})$ языка теории множеств, которая формализует утверждение $\mathfrak{A} \models \varphi(x_0,\ \dots, x_{n-1})$. Формула $\mathfrak{A} \models \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ задает n-арный предикат на A или, что то же самое, отображение из A^n в $\{0,1\}$. В силу принципов максимума и переноса существует, и притом единствен, элемент $|\varphi|^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}} : A^n \to \{0,1\}^B]\!] = \mathbb{1},$$
$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 1]\!] = [\![\Phi(a_0, \dots, a_{n-1}, \mathfrak{A})]\!] = \mathbb{1}$$

для всех $a_0, \dots, a_{n-1} \in A{\downarrow}$.

Таким образом, формула $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ истинно в $\mathfrak{A}$» верна в том и только в том случае, если $[\![\Phi(a_0, \dots, a_{n-1}, \mathfrak{A})]\!] = \mathbb{1}$.

(2) Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры σ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда $\mathfrak{A}{\downarrow}$ — это расширенная алгебраическая B-система сигнатуры σ. При этом

$$\chi \circ |\varphi|^{\mathfrak{A}\downarrow} = |\varphi|^{\mathfrak{A}}{\downarrow}$$

для каждой формулы φ сигнатуры σ.

(3) Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две алгебраические системы общей сигнатуры σ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}{\downarrow}$ и $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}{\downarrow}$. Тогда если h — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, то $h' := h{\downarrow}$ — гомоморфизм (соответственно, сильный гомоморфизм) B-систем $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$.

Наоборот, если $h' : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}'$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) алгебраических B-систем, то $h := h'{\uparrow}$ — это гомоморфизм (соответственно, сильный гомоморфизм) из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

(4) Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая B-система сигнатуры σ. Тогда найдутся $\mathscr{A}, \mu \in \mathbb{V}^{(B)}$ такие, что выполнены следующие условия:

- **(a)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$(\mathscr{A}, \mu)$ — алгебраическая система сигнатуры σ»;
- **(b)** если $\mathfrak{A}' := (A', \nu')$ — спуск $(\mathscr{A}, \mu)$, то $\mathfrak{A}$ — расширенная алгебраическая B-система сигнатуры σ;
- **(c)** имеется изоморфизм $\imath$ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ такой, что $A' = \mathrm{mix}(\imath(A))$;
- **(d)** для каждой формулы φ сигнатуры σ от n свободных переменных выполнены равенства

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = |\varphi|^{\mathfrak{A}'}(\imath(a_0), \dots, \imath(a_{n-1})) =$$
$$= \chi^{-1}\big((|\varphi|^{\mathfrak{A}^\sim}){\downarrow}(\imath(a_0), \dots, \imath(a_{n-1}))\big)$$

при любых $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$, где χ определено выше.

6. Булевозначные вещественные числа

Теперь мы уже в состоянии применить технику булевозначного анализа к алгебраической системе наипервейшего значения для всей математики — к полю вещественных чисел. Напомним сначала некоторые необходимые факты из теории векторных решеток.

6.1. Пространства Канторовича. Начнем с определений. Элементы x и y векторной решетки E называют *дизъюнктными* (и пишут $x \perp y$) при условии, что $|x| \wedge |y| = 0$. *Полоса* или *компонента* E определена как *дизъюнктное дополнение* $M^\perp := \{x \in E \mid (\forall y \in M)\, x \perp y\}$ какого-либо подмножества $M \subset E$. Там, где это уместно, мы удобства ради исключаем из рассмотрения тривиальную векторную решетку, состоящую из одного нуля.

Упорядоченное по включению множество $\mathfrak{B}(E)$ полос E представляет собою полную булеву алгебру относительно следующих операций:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad \neg L = L^\perp \quad (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

Булеву алгебру $\mathfrak{B}(E)$ часто именуют *базой* E.

Порядковой проектор в E — это идемпотентный линейный оператор $\pi : E \to E$, удовлетворяющий неравенствам $0 \le \pi x \le x$ при всех $0 \le x \in E$. Множество

$\mathfrak{P}(E)$ всех порядковых проекторов, упорядоченное правилом $\pi \le \rho \Longleftrightarrow \pi \circ \rho = \pi$, является булевой алгеброй со следующими операциями:

$$\pi \wedge \rho = \pi \circ \rho, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \neg\pi = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in (E)).$$

Пусть $u \in E_+$ и $e \wedge (u - e) = 0$ для некоторого $0 \le e \in E$. Тогда e — это *фрагмент* или *осколок* u. Множество $\mathfrak{E}(u)$ всех осколков ненулевого элемента $u \in E$ с порядком, индуцированным из E, представляет собою булеву алгебру с решеточными операциями, такими же как в E, и дополнением, действующим по правилу $\neg e := u - e$.

Векторную решетку называют *пространством Канторовича* или *K-пространством*, если каждое непустое ограниченное сверху подмножество в ней имеет точную верхнюю границу. Если каждое семейство попарно дизъюнктных элементов K-пространства E ограничено, то E называют *расширенным* или *универсально полным*.

(1) Пусть E — произвольное K-пространство. Тогда отображение $\pi \mapsto \pi(E)$ задает изоморфизм между булевыми алгебрами $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathfrak{B}(E)$. Если в E есть порядковая единица $\mathbb{1}$, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{E}(\mathbb{1})$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{E}(\mathbb{1})$ в $\mathfrak{B}(E)$ также осуществляют изоморфизм соответствующих булевых алгебр.

(2) Каждое расширенное K-пространство E с порядковой единицей $\mathbb{1}$ может быть наделено единственным умножением, превращающим E в точную f-алгебру, а $\mathbb{1}$ — в единицу кольца. В этой f-алгебре каждый порядковый проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ совпадает с оператором умножения на $\pi(\mathbb{1})$.

6.2. **Спуск поля вещественных чисел.** На основании принципов максимума и переноса существует элемент $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{R}$ — упорядоченное поле вещественных чисел». Ясно, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ поле $\mathscr{R}$ единственно с точностью до изоморфизма, т. е. если $\mathscr{R}'$ — другое поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «поля $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}'$ изоморфны». Несложно показать, что $\mathbb{R}^\wedge$ — архимедово упорядоченное поле внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Поэтому мы можем считать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathbb{R}^\wedge \subset \mathscr{R}$ и $\mathscr{R}$ — (метрическое) пополнение $\mathbb{R}^\wedge$». Взяв обыкновенную единицу 1 в $\mathbb{R}$, заметим, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$1 := 1^\wedge$ служит порядковой единицей $\mathscr{R}$».

Рассмотрим спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ алгебраической системы $\mathscr{R} := (|\mathscr{R}|, +, \cdot, 0, 1, \le)$.

(1) В соответствии с общей процедурой мы превращаем спуск носителя $\mathscr{R}$ в алгебраическую систему, спуская операции и порядок из $\mathscr{R}$.

Более подробно, сложение, умножение и сравнение возникают для элементов $x, y, z \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ по следующим правилам:

(a) $x + y = z \leftrightarrow [\![x + y = z]\!] = \mathbb{1}$;
(b) $xy = z \leftrightarrow [\![xy = z]\!] = \mathbb{1}$;
(c) $x \le y \leftrightarrow [\![x \le y]\!] = \mathbb{1}$;
(d) $\lambda x = y \leftrightarrow [\![\lambda^\wedge x = y]\!] = \mathbb{1}$.

(2) Алгебраическая система $\mathscr{R}{\downarrow}$ представляет собой расширенное K-пространство. При этом имеется (канонический) изоморфизм χ булевой алгебры B на базу $\mathfrak{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$ такой, что

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \le [\![x = y]\!],$$

$$\chi(b)x \le \chi(b)y \leftrightarrow b \le [\![x \le y]\!]$$

для всех $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$.

Этот замечательный результат, установивший имманентную связь между булевозначным анализом и теории векторных решеток, принадлежит Гордону [7]. Теорема Гордона показала, что расширенные пространства Канторовича являются новыми равноправными моделями поля вещественных чисел. При этом каждая архимедова векторная решетка, например, любое пространство $L_p, p \geq 1$, поднимается в плотную подрешетку поля $\mathbb{R}$ в соответствующей булевозначной модели.

Спуск поля скаляров открыл дорогу к широкому использованию булевозначных моделей в функциональном анализе. В настоящее время такой анализ проведен достаточно полно для банаховых пространств, банаховых алгебр, решеточно нормированных пространств и модулей. Соответствующий материал подробно представлен в [8, гл. 10–12].

7. **Кардинальный сдвиг**

Булевозначные модели были предложены для работы в основаниях математики. Многие тонкие свойства объектов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существенно зависят от строения булевой алгебры B. Возникающее разнообразие возможностей и огромный багаж сведений о булевых алгебрах сделали булевозначные модели одним из самых мощных инструментов современных исследований в основаниях математики.

Работающий математик крайне редко ощущает зависимость от оснований, поэтому выше мы рассматривали такие конструкции и свойства $\mathbb{V}^{(B)}$, в которых специфические особенности булевой алгебры B не играли роли. Именно на них и зиждется основной блок булевозначного анализа. Между тем зависимость ядра математики от оснований исключительно существенна. Булевозначный анализ обязан своим происхождением прекрасным результатам Гёделя и Коэна, продемонстрировавшим нам независимость гипотезы континуума от остальных аксиом теории ZFC. Вполне уместно обсудить связанные с этим вопросы.

7.1. **Загадки континуума.** Понятие континуума относится к числу важнейших в общенаучном инструментарии. Математические воззрения на континуум родственны физическим представлениям о времени и связанных с ним переменах. Достаточно сослаться на великих Ньютона и Лейбница, по-разному воспринимавших континуум. Плавное течение, образ прибывающих и убывающих текучих аргументов, непрерывно порождающих изменения зависящих от них переменных величин, лежат в основе мировоззрения Ньютона и его метода первых и последних отношений. Принципиальное затруднение представлений Ньютона связано с невозможностью вообразить непосредственно предшествующий момент времени, ближайшую к данной, соседнюю точку числового континуума. Для Лейбница переменная величина кусочно постоянна в бесконечно малом с точностью до недоступных ощущению величин высших порядков. Континуум для него распадается в набор непересекающихся монад, совершенно особых идеальных сущностей.

Воззрения Ньютона и Лейбница суммируют идеи, восходящие к глубокой древности. Математики Древней Эллады различали точки и монады, эксплицируя двойственную природу геометрических и числовых объектов математики. От пращуров сквозь века пришла к нам тайна устройства континуума.

Теоретико-множественная установка обнаружила новую загадку континуума. Кантор установил неравномощность натурального ряда и простейшего математического континуума — числовой прямой. Немедленно возникла проблема континуума — задача о нахождении мощностей промежуточных множеств. Гипотеза континуума состоит в том, что никаких новых мощностей промежуточные подмножества не имеют.

Проблема континуума стояла первой в уже цитированном докладе Гильберта [3]. Убежденный anti-ignorabimus, Гильберт всегда склонялся к справедливости гипотезы континуума. Любопытно, что одна из его самых ярких и красивых статей [5], датированная 1925 годом и содержащая знаменитую фразу о канторовом рае, посвящена на самом деле ошибочному доказательству гипотезы континуума.

Русский провидец Лузин считал несостоятельным простое предположение о независимости гипотезы континуума. Он отмечал на Всероссийском съезде математиков в 1927 г.: «Первое, что приходит на ум, это то, что установление мощности continuum'а есть дело свободной аксиомы, вроде аксиомы о параллелях для геометрии. Но в то же время, как при инвариантности всех прочих аксиом геометрии Евклида и при варьировании аксиомы о параллельных меняется самый смысл произнесенных или написанных слов: „точка“, „прямая“, etc. — смысл каких слов должен меняться, если мы делаем мощность continuum'а подвижной на алефической шкале, все время доказывая непротиворечивость этого движения? Мощность continuum'а, если только мыслить его как множество точек, есть единая некая реальность и она должна находиться на алефической шкале там, где она на ней есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы J. Hadamard, „даже невозможно для нас, людей“» [9].

Гёдель доказал совместимость гипотезы континуума с аксиомами ZFC, построив универсум конструктивных множеств [10]. Коэн установил совместимость отрицания гипотезы континуума с аксиомами теории ZFC с помощью *форсинга*, изобретенного им нового метода изменения свойств имеющихся или гипотетических моделей теории множеств. Булевозначные модели сделали трудный результат Коэна простым[4], продемонстрировав работающему математику независимость гипотезы континуума с той же наглядностью, что и модель Пуанкаре для неевклидовой геометрии. Знакомые с этой техникой люди склонны, следуя Коэну [2, с. 282], считать гипотезу континуума «*очевидно* ложной».

Будем руководствоваться знаменитым указанием Дедекинда «не принимать без доказательств ничего из того, что можно доказать» и обсудим вкратце формальную сторону дела. Содержательные аргументы собраны в замечательных статьях Канамори [12], Коэна [13] и Манина [14].

7.2. **Ординалы.** Концепция ординала отражает древнейший механизм счета с помощью последовательного нанесения зарубок.

Класс X называют *транзитивным*, если каждый элемент X является подмножеством X, т. е. $\mathrm{Tr}\,(X) := (\forall\, y)(y \in X \to y \subset X)$.

[4]О своем результате Коэн однажды заметил [11, с. 82]: «Но, конечно, этот результат *на самом деле* легкий в том смысле, что тут есть ясная философская идея».

Ординальным классом именуют транзитивный класс, вполне упорядоченный отношением принадлежности $\in$. Запись $\mathrm{Ord}\,(X)$ означает, что X — ординальный класс. Ординальный класс, являющийся множеством, называют *ординалом*, *порядковым* или *трансфинитным числом.* Класс всех ординалов обозначают On. Сами ординалы принято обозначать малыми греческими буквами. При этом используют следующие сокращения: $\alpha < \beta := \alpha \in \beta$, $\quad \alpha \leq \beta := (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)$, $\quad \alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$. Если $\alpha < \beta$, то говорят, что α *предшествует* β, а β *следует* за α.

Привлекая аксиому фундирования, легко установить, что можно пользоваться более простым определением: ординал – это транзитивное множество, линейно упорядоченное на основе отношения принадлежности:

$$\mathrm{Ord}\,(X) \leftrightarrow \mathrm{Tr}\,(X) \wedge (\forall\, u \in X)(\forall\, v \in X)(u \in v \ \vee \ u = v \ \vee \ v \in u).$$

Отметим полезные вспомогательные факты.

(1) Пусть X и Y — произвольные классы. Если X ординален, Y транзитивен и $X \neq Y$, то равносильны соотношения $Y \subset X$ и $Y \in X$.

(2) Пересечение любых двух ординальных классов есть ординальный класс.

(3) Если X и Y — ординальные классы, то $X \in Y \vee X = Y \vee Y \in X$.

(4) Справедливы следующие утверждения:

(a) элементами любого ординального класса могут быть только ординалы;

(b) On — единственный ординальный класс, не являющийся ординалом;

(c) для каждого ординала α множество $\alpha + 1$ служит ординалом, причем наименьшим из всех следующих за α ординалов;

(d) объединение $\bigcup X$ непустого класса ординалов $X \subset \mathrm{On}$ снова ординальный класс; если X — множество, то $\bigcup X$ есть верхняя граница множества X в упорядоченном классе On.

(5) Точную верхнюю границу множества ординалов x принято обозначать $\lim(x)$. Ординал α называют *предельным*, если $\alpha \neq \varnothing$ и $\lim(\alpha) = \alpha$. Эквивалентно, α — предельный ординал, если он непредставим в виде $\alpha = \beta + 1$ с каким-либо $\beta \in \mathrm{On}$. Символ K_{II} обозначает класс всех предельных ординалов. Ординалы, не входящие в K_{II}, образуют класс *непредельных* ординалов $K_{\mathrm{I}} := \mathrm{On} \setminus K_{\mathrm{II}} = \{\alpha \in \mathrm{On} \,|\, (\exists\, \beta \in \mathrm{On})(\alpha = \beta + 1)\}$. Обозначим буквой ω наименьший предельный ординал. Приятно вспомнить, что элементы ω называют *положительными целыми числами.*

(6) Поскольку для $x \in \mathbb{V}$ формула $\mathrm{Ord}\,(x)$ ограничена, то в силу 4.1 (4)

$$\alpha \in \mathrm{On} \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(\alpha^{\wedge}).$$

(7) Для произвольного $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(x)$ в том и только в том случае, если существуют ординал $\beta \in \mathrm{On}$ и разбиение единицы $(b_\alpha)_{\alpha \in \beta} \subset B$ такие, что $x = \mathrm{mix}_{\alpha \in \beta}(b_\alpha \alpha^{\wedge})$.

7.3. **Кардиналы.** Концепция кардинала восходит к палеолитическому методу пересчета сравнением с заранее известной совокупностью. Этот прием засвидетельствован археологическими находками многочисленных булл с токенами.

Два множества называют *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение одного из них на другое. Ординал, не равномощный никакому предшествующему ординалу, называют *кардиналом.* Таким образом, кардиналы — это эталоны сравнения мощностей ординалов, референты меры количества. Любое целое положительное число служит кардиналом. Ясно, что ω служит наименьшим бесконечным кардиналом. Для любого бесконечного ординала α существует, и притом единствен, наименьший кардинал $\mathscr{H}(\alpha)$, превосходящий α. Эти ординалы принято называть *алефами* и использовать для них традиционные, несколько избыточные обозначения:

$$\aleph_0 := \omega_0 := \omega;$$
$$\aleph_{\alpha+1} := \omega_{\alpha+1} := \mathscr{H}(\omega_\alpha) \qquad (\alpha \in \mathrm{On});$$
$$\aleph_\beta := \omega_\beta := \lim\{\omega_\alpha \mid \alpha \in \beta\} \quad (\beta \in K_{\mathrm{II}}).$$

(1) Всякое множество x равномощно единственному кардиналу $|x|$, называемому *кардинальным числом* или *мощностью* этого множества. Множество x *счетно*, если $|x| = \omega_0 := \omega$, и *не более чем счетно*, если $|x| \leq \omega_0$.

(2) Стандартные имена ординалов и кардиналов принято называть *стандартными ординалами* и *стандартными кардиналами*. Если $\alpha \in \mathrm{On}$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}(\alpha^\wedge)$ и, стало быть, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственный алеф $\aleph_{\alpha^\wedge}$. Как отмечено в 7.2 (7), произвольный ординал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ есть перемешивание стандартных ординалов. Аналогично, любой булевозначный кардинал служит перемешиванием некоторого множества стандартных кардиналов.

(3) Для любого кардинала α выполнено соотношение $[\![(\omega_\alpha)^\wedge \leq \aleph_{\alpha^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$.

(4) Булева алгебра B имеет *счетный тип*, если любое множество попарно дизъюнктных элементов B не более чем счетно. В такой алгебре для любого ординала $\alpha \in \mathrm{On}$ будет $\mathbb{V}^{(B)} \models (\omega_\alpha)^\wedge = \aleph_{\alpha^\wedge}$.

7.4. **Гипотеза континуума.** Взяв произвольный ординал α, мы обозначим символом 2^{ω_α} мощность множества $\mathscr{P}(\omega_\alpha)$, т. е. $2^{\omega_\alpha} := |\mathscr{P}(\omega_\alpha)|$. Такое обозначение оправдано тем, что 2^x и $\mathscr{P}(x)$ равномощны для любого x, где 2^x — класс всех отображений из x в 2. Кантор обнаружил и доказал, что $|x| < |2^x|$ каково бы ни было множество x. В частности, $\omega_\alpha < 2^{\omega_\alpha}$ для любого ординала α. Стало быть, по определению $\omega_{\alpha+1} \leq 2^{\omega_\alpha}$.

Вопрос о том, имеются или нет какие либо промежуточные мощности между $\omega_{\alpha+1}$ и 2^{ω_α}, т. е. выполнено ли равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$, составляет содержание *обобщенной проблемы континуума.* При $\alpha = 0$ это классическая *проблема континуума.*

Под *гипотезой континуума* понимают равенство $\omega_1 = 2^\omega$. Гипотеза континуума позволяет вполне упорядочить отрезок числовой прямой способом, при котором любой собственный подотрезок в новом порядке будет не более чем счетным. Отсутствие промежуточных мощностей, т. е. соотношение $(\forall \alpha \in \mathrm{On})\, \omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$, называют *обобщенной гипотезой континуума.*

7.5. **Алгебры форсинга.** Займемся описанием специального класса булевых алгебр B, обеспечивающих такие возможности, как «склеивание» двух стандартных бесконечных кардиналов при погружении в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, так и различные смещения на алефической шкале.

(1) Рассмотрим упорядоченное множество $P := (P, \leq)$. Будем предполагать, что в P имеется наименьший элемент $\mathbb{0}$. Если же в P отсутствует наименьший элемент, его всегда можно добавить, заменив P на $P \cup \{\mathbb{0}\}$. В множестве P введем бинарное отношение $\perp$, полагая

$$p \perp q \leftrightarrow (\forall r \in P)(r \leq p \wedge r \leq q \to r = \mathbb{0}).$$

Рассмотрим поляру $A^{\perp} := \pi_{\perp}(A) := \{q \mid (\forall p \in A)\ q \perp p\}$ и будем пользоваться сокращенной записью $[p] := \{p\}^{\perp\perp}$. Отношение $\perp$ симметрично. Кроме того, при $p \perp p$ будет $p = \mathbb{0}$. В частности, наименьшая $\perp$-компонента $P^{\perp}$ совпадает с $\{\mathbb{0}\}$. Нетрудно проверить, что отображение $p \mapsto [p]$ изотонно, а $\perp$ представляет собой так называемое *отношение дизъюнктности* на P. В силу общих свойств таких отношений множество $\mathfrak{K}_{\perp}(P) := \{A^{\perp} \mid A \subset P\}$ всех $\perp$-компонент в P, упорядоченное по включению, образует полную булеву алгебру. Напомним, что подмножество P булевой алгебры B называют *плотным*, если для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $p \in P$, для которого $p \leq b$.

(2) Для упорядоченного множества P равносильны утверждения:

- **(a)** если $p, q \in P$ и $\mathbb{0} \neq q \nleq p$, то существует ненулевой элемент $p' \in P$, для которого $p' \leq q$ и $p \perp p'$;
- **(b)** $[p] = [\mathbb{0}, p]$ для любого $p \in P$;
- **(c)** отображение $p \mapsto [p]$ взаимно однозначно;
- **(d)** отображение $p \mapsto [p]$ служит порядковым изоморфизмом P на плотное подмножество полной булевой алгебры $\mathfrak{K}_{\perp}(P)$.

Упорядоченное множество P называют *измельченным*, если оно удовлетворяет одному (а тогда и каждому) из условий (a)–(d) из 7.5 (2). Таким образом, измельченные упорядоченные множества и только эти множества изоморфны плотным подмножествам полных булевых алгебр. При этом булеву алгебру $\mathfrak{K}_{\perp}(P)$ принято называть *булевым пополнением* упорядоченного множества P. Рассмотрим необходимые нам примеры измельченных упорядоченных множеств.

(3) Возьмем два непустых множества x и y. Обозначим символом $C(x, y)$ множество всех функций, определенных на конечных подмножествах x и действующих в y. Таким образом,

$$C(x, y) := \{f \mid \mathrm{Fnc}\,(f)\ \wedge\ \mathrm{dom}(f) \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(x)\ \wedge\ \mathrm{im}(f) \subset y\}.$$

Отношение порядка в $C(x, y)$ введем формулой $g \leq f \leftrightarrow g \supset f$. Если $g \nleq f$, то либо $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ и $f \neq g|_{\mathrm{dom}(f)}$, либо $\mathrm{dom}(f)$ не лежит в $\mathrm{dom}(g)$.

В первом случае положим $f' := g$, а во втором случае определим f' формулами $\mathrm{dom}(f') := \mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)$, $f'|_{\mathrm{dom}(g)} = g$, $f'|_z \neq f|_z$, где $z := \mathrm{dom}(f) \setminus \mathrm{dom}(g)$. В обоих случаях легко видеть, что $f' \leq g$ и $f \perp f'$ в $C(x, y) \cup \{\mathbb{0}\}$. Значит, $C(x, y) \cup \{\mathbb{0}\}$ — измельченное упорядоченное множество. Соответствующую полную булеву алгебру мы обозначим символом $B(x, y)$.

(4) Пусть $\varkappa$ — бесконечный кардинал, а x и y — те же, что и в (3), причем $|y| \geq 2$. Обозначим символом $C_{\varkappa}(x, y)$ множество всех функций, определенных на подмножествах x мощности строго меньше, чем $\varkappa$. Иначе говоря,

$$C_{\varkappa}(x, y) := \{f \mid \mathrm{Fnc}\,(f)\ \wedge\ \mathrm{dom}(f) \in \mathscr{P}(x)\ \wedge\ |\mathrm{dom}(f)| < \varkappa\ \wedge\ \mathrm{im}(f) \subset y\}.$$

Порядок в $C_{\varkappa}(x, y)$ вводится так же, как и в (3). Теми же рассуждениями, что и выше, можно убедиться, что $C_{\varkappa}(x, y) \cup \{\mathbb{0}\}$ — измельченное упорядоченное множество. Соответствующее булево пополнение мы обозначим символом $B_{\varkappa}(x, y)$. Ясно, что $C(x, y) = C_{\omega}(x, y)$ и $B(x, y) = B_{\omega}(x, y)$.

7.6. **Смещение алефов.** Набор булевых алгебр, предъявленный в 7.5, позволяет добиться кардинального сдвига в подходящей булевозначной модели и тем самым получить прекрасный результат Коэна. В своем докладе 2001 года об открытии форсинга Коэн отметил, что «использование языка булевых алгебр приближает нашу технику форсинга к обычным приемам» [13, с. 1096].

(1) Пусть λ — произвольный бесконечный кардинал. Возьмем полную булеву алгебру $B := B(\omega, \lambda)$. Тогда $|\lambda^\wedge|$ — счетный кардинал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models |\lambda^\wedge| = \aleph_0$.

(2) Для любых бесконечных кардиналов $\varkappa$ и λ существует полная булева алгебра B такая, что $\mathbb{V}^{(B)} \models |\varkappa^\wedge| = |\lambda^\wedge|$.

(3) $B(x, 2)$ — булева алгебра счетного типа.

(4) Пусть x — непустое множество и $|x| = \omega_\alpha$. Тогда справедливы оценки

$$\omega_\alpha \le |B(x, 2)| \le (\omega_\alpha)^{\omega_0}.$$

(5) Если $(\omega_\alpha)^{\omega_0} = \omega_\alpha$ и $B := B(\omega \times \omega_\alpha, 2)$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha^\wedge}$.

(6) Если ZF — непротиворечивая теория, то непротиворечива и ZFC при добавлении к ней аксиомы $2^{\,\omega_0} = \omega_2$.

В самом деле, Гёдель доказал [10], что непротиворечивость ZF не исчезнет при принятии аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума. Значит, можно предположить, что

$$(\omega_2)^{\omega_0} = \left(2^{\,\omega_1}\right)^{\omega_0} = 2^{\,\omega_1 \cdot \omega_0} = 2^{\,\omega_1} = \omega_2.$$

В силу (5) найдется полная булева алгебра B такая, что $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{2^\wedge}$. Ввиду очевидного соотношения $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^\wedge = 2$ будет $\mathbb{V}^{(B)} \models \aleph_{2^\wedge} = \aleph_2$ и, следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Кроме того, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ ZFC по принципу переноса 3.2 (1).

(7) Непрерывность всех гомоморфизмов классической банаховой алгебры $C([0, 1])$ не зависит от остальных аксиом теории ZFC, но зависит от мощности 2^{ω_0}. Об этом см. [15, с. 19].

(8) Пусть A — множество функций из $\mathbb{R}$ в счетные подмножества $\mathbb{R}$. Если $f \in A$, а x и y — наугад взятые числа, то можно думать, что $y \in f(x)$ с вероятностью 0, т. е. $x \notin f(y)$ с вероятностью 1. Аналогично, $y \notin f(x)$ с вероятностью 1. Руководствуясь этими содержательными соображениями, Фрейлинг предложил в [16] аксиому AX следующего содержания: $(\forall f \in A)(\exists x)(\exists y)\ x \notin f(y) \wedge y \notin f(x)$. При этом в ZFC аксиома AX оказывается переформулировкой отрицания гипотезы континуума CH. Это служит еще одним аргументом в пользу суждения Коэна: «консенсус будет достигнут на том, что CH — ложная гипотеза» [13, с. 1099].

Приведенный подход к проблеме континуума в основном изложен в [17]. По поводу опущенных деталей и библиографии см. [8, гл. 9]. Представление о современном состоянии метода форсинга можно составить по монографии [18].

8. **Логика и свобода**

Математика — древнейшая наука. Однако сначала было слово. Полезно помнить, что старинный «логос» живет не в грамматике, а в логике и логистике. Порядок в мыслях и порядок хранения — драгоценные дары наших пращуров.

На интеллектуальном поле не действует закон убывающего плодородия. Чем больше мы узнаем, тем значительнее становится граница с незнаемым, тем чаще мы сталкиваемся с неведомым. Двадцатый век обогатил наши геометрические представления понятиями пространства-времени и фрактальности.

Каждое конкретное знание — это событие, элемент пространства Минковского. Познанное нами образует явно ограниченное множество знаний. Рубежи науки составляют границу познанного с неведомым, которая несомненно фрактальна, и у нас нет никаких оснований предполагать ее спрямляемость или измеримость. Стоит при этом отметить, что маршруты к передовым границам науки, прокладываемые преподавателями в сфере образования, достаточно гладкие. Педагогика не любит скачков и резкой смены сложившейся парадигмы. Возможно, что эти топологические препятствия отражают объективные трудности модернизации образования.

Не счесть доказательств фрактальности границы знания и незнания. Среди них такие негативные явления, как безудержный рост псевдонауки, мистицизма и иных форм мракобесия, заползающих во все лакуны непознанного. Проявлениями фрактальности служат также самые неожиданные, прекрасные и поразительные взаимосвязи внешне далеких отраслей и разделов науки.

Революционные изменения математики на рубеже девятнадцатого и двадцатого веков связаны не только с новым исчислением бесконечности, созданным Кантором в его теории множеств. Не меньшее значение имело становление и развитие математической логики, подвергшей строгому анализу сам процесс математического доказательства. Разрешимость и неразрешимость, доказуемость и недоказуемость, противоречивость и непротиворечивость вошли в исследовательский лексикон совершенного математика. Математика стала рефлексивной наукой, занятой не только поиском истины, но и изучающей собственные способы ее поиска.

Логика Аристотеля, апории Зенона, бритва Вильяма из Оккама, осел Буридана, Calculemus Лейбница и алгебры Буля — выдающиеся достижения человеческого гения, осветившие дорогу к новому этапу логических исследований. Фреге обессмертил свое имя, создав исчисление предикатов — основу современной математической логики.

Двадцатый век отмечен стремительным проникновением идей математической логики во многие разделы науки и техники. Логика не только организует и упорядочивает мышление, но и освобождает нас от догматизма при выборе объектов и методов математического анализа. Логика наших дней — важнейший инструмент и институт математической свободы. Булевозначный анализ служит тому блестящим подтверждением.

Возвращаясь к исходному определению булевозначного анализа, данному Такеути, мы должны констатировать его чрезмерную широту. Булевозначная модель, основанная на дилемме «истина» или «ложь», неявно используется подавляющим большинством математиков. Наши беседы на семинарах не заслуживают квалификации произведений прозы. По аналогии, вряд ли стоит говорить, что Эйлер, Коши и Абель занимались булевозначным анализом.

Булевозначный анализ — это специальная математическая техника, основанная на оценке истинности с помощью нетривиальной булевой алгебры. С теоретико-категорной точки зрения булевозначный анализ — теория булевых топосов. С топологической точки зрения — теория непрерывных поливерсумов на стоуновых пространствах.

Мах учил нас экономии мышления. Возможно, следует применить его принцип и сократить громоздкий термин «булевозначный анализ». Математизация законов мышления восходит к Булю [19] и достойна лапидарного титула «булев анализ».

Список литературы

[1] Takeuti G. *Two Applications of Logic to Mathematics.* Tokio–Princeton: Iwanami Publ. & Princeton University Press, 1978.

[2] Коэн П. Дж. *Теория множеств и континуум-гипотеза.* М.: Мир, 1968.

[3] Гильберт Д. *Математические проблемы. Доклад, прочитанный 8 августа 1900 г.*, В кн.: Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969, 12–64.

[4] Johnstone P. T. *Sketches of an Elephant. A Topos Theory Compendium.* Oxford: Clarendon Press, 2002 (Oxford Logic Guides; 438).

[5] Hilbert D. *On the Infinite.* In: From Frege to Gödel 1879–1931: A Source Book in the History of Science. Cambridge: Harvard University Press, 1967, 367–392.

[6] Hofstadter D. R. *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid (20th Anniversary Edition).* New York: Basic Books, 1999.

[7] Гордон Е. И. (1977) *Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства.* Докл. АН СССР, **237**:4 (1977), 773–775.

[8] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. *Введение в булевозначный анализ.* М.: Наука, 2005.

[9] Лузин Н. Н. *Современное состояние теории функций действительного переменного.* Тр. Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля–4 мая 1927 г. М.–Л.: Главнаука, 1928.

[10] Гёдель К. *Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств.* Успехи мат. наук, **3**:1 (1948), 96–149.

[11] Yandell B. H. (2002) *The Honors Class. Hilbert's Problems and Their Solvers.* Natick: A. K. Peters, Ltd.

[12] Kanamori A. *The Mathematical Developments of Set Theory from Cantor to Cohen.* Bull. Symbolic Logic, **1**:1 (1996), 1–70.

[13] Cohen P. (2002) *The Discovery of Forcing.* Rocky Mountain J. Math., **32**:4 (2002), 1071–1100.

[14] Manin Yu. I. *Georg Cantor and His Heritage.* Труды МИАН, **246** (2004), 208–216.

[15] Dales H. G. and Oliveri G. (Eds.)) *Truth in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press, 1998.

[16] Freiling Ch. *Axioms of Symmetry: Throwing Darts at the Real Line.* J. Symbolic Logic, **51** (1986), 190–200.

[17] Bell J. L. *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs.* Oxford: Clarendon Press, 2005.

[18] Shelah S. *Proper and Improper Forcing.* Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[19] Boole G. *Selected Manuscripts on Logic and Its Philosophy.* Basel: Birkhäuser-Verlag, 1997 (Science Networks. Historical Studies; 20).

Семен Самсонович Кутателадзе
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: sskut@math.nsc.ru