S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 384–392 (2006) УДК 517.9

MSC 42A75, 54C65

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПО ВЕЙЛЮ СЕЧЕНИЯ НОСИТЕЛЕЙ МЕРОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Л.И. ДАНИЛОВ

Abstract. We prove that there exist Weyl almost periodic selections of supports of Weyl almost periodic measure-valued functions $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}(U)$ taking values in the space $\mathcal{M}(U)$ of Borel probability measures defined on a complete separable metric space U.

Введение

Утверждения о существовании почти периодических (п.п.) сечений многозначных п.п. отображений $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \subseteq H$ с замкнутыми образами в банаховом пространстве H необходимы при исследовании п.п. решений дифференциальных включений (см., например, работы [1, 2], в которых поставлен вопрос о существовании п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу сечений многозначных п.п. отображений). Известно, что п.п. по Бору многозначные отображения $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \subseteq H$ не всегда имеют п.п. по Бору сечения [3]. В [4], в частности, приведен пример не п.п. по Бору непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, для которой $\mathbb{R} \ni t \to \{-f(t), f(t)\} \subset \mathbb{R}^2$ – двузначное п.п. по Бору отображение. Существование п.п. по Степанову сечений многозначных п.п. по Степанову отображений было впервые доказано в [5] на основе результатов Фришковского [6]. Другое доказательство, использующее равномерную аппроксимацию п.п. по Степанову функций элементарными п.п. по Степанову функциями, предложено в [4]. Использование равномерной аппроксимации позволяет доказать существование п.п. по Степанову сечений, удовлетворяющих разнообразным дополнительным условиям [7, 8]. В [9, 10] доказано существование п.п. по Вейлю

Danilov, L.I., Weyl almost periodic selections of supports of measure-valued functions.

Поступила 5 мая 2006 г., опубликована 26 ноября 2006 г.

сечений многозначных п.п. по Вейлю отображений со значениями в полном метрическом пространстве U. Аналогичный результат для п.п. по Безиковичу сечений приведен в [11]. В данной работе исследуются п.п. по Вейлю сечения многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \subseteq U$ со значениями в полном сепарабельном метрическом пространстве U, являющихся носителями п.п. по Вейлю вероятностных мерозначных функций. Как и в [9], используется равномерная аппроксимация п.п. по Вейлю функций элементарными п.п. по Вейлю функциями.

В § 1 приведены определения и сформулированы утверждения о п.п. по Вейлю функциях, которые необходимы в дальнейшем. Многие результаты о п.п. функциях содержатся, например, в [12]. Доказательства ряда утверждений о п.п. по Вейлю функциях можно найти в [10] (см. также [9, 13]). Относительно используемых утверждений о вероятностных борелевских мерах см. [14]. В конце § 1 сформулирована теорема 2, являющаяся основным результатом работы. Доказательство теоремы 2 приведено в § 3. В § 2 собраны вспомогательные результаты.

1. Определения и основное утверждение

Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство, $meas$ – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Функция $f : \mathbb{R} \to U$ называется *элементарной*, если существуют точки $x_j \in U$ и непересекающиеся измеримые по Лебегу множества $T_j \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\operatorname{meas} \mathbb{R} \backslash \bigcup_j T_j = 0$ и $f(t) = x_j$ при $t \in T_j$. Обозначим такую функцию через $f(.) = \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; .)$. Для произвольных функций $f_j : \mathbb{R} \to U$, $j \in \mathbb{N}$, будем также обозначать через $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; .)$ функцию, совпадающую с $f_j(.)$ на множествах T_j (функции f_j и множества T_j будут нумероваться в дальнейшем также с помощью нескольких индексов). Функция $f : \mathbb{R} \to U$ *измерима*, если для любого $\epsilon > 0$ существует элементарная функция $f_\epsilon : \mathbb{R} \to U$ такая, что $\rho(f(t), f_\epsilon(t)) < \epsilon$ при почти всех (п.в.) $t \in \mathbb{R}$. Совокупность измеримых функций $f : \mathbb{R} \to U$ обозначим через $M(\mathbb{R}, U)$.

Фиксируем точку $x_0 \in U$. Пусть при $p \geq 1$

$$M_p(\mathbb{R}, U) = \{f \in M(\mathbb{R}, U) : \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_\xi^{\xi+1} \rho^p(f(t), x_0)\, dt < +\infty\}\,.$$

На множестве $M_p(\mathbb{R}, U)$ для всех $l > 0$ определяются метрики

$$D^{(\rho)}_{p,\,l}(f, g) = \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_\xi^{\xi+l} \rho^p(f(t), g(t))\, dt\right)^{1/p}, \ \ f, g \in M_p(\mathbb{R}, U)\,.$$

Множество $T \subseteq \mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a > 0$ такое, что $[\xi, \xi + a] \cap T \neq \emptyset$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется $(\epsilon, D^{(\rho)}_{p,\,l})$-*почти периодом* функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, $\epsilon > 0$, если $D^{(\rho)}_{p,\,l}(f(.), f(. + \tau)) < \epsilon$. Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R}, U)$ *п.п. по Вейлю* функций *порядка* p, если для любого $\epsilon > 0$ существует число $l = l(\epsilon, f) > 0$ такое, что множество $(\epsilon, D^{(\rho)}_{p,\,l})$-почти периодов функции f относительно плотно.

На пространстве U определим также метрику $\rho'(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$, $x, y \in U$; (U, ρ') – полное метрическое пространство. Пусть $W(\mathbb{R}, U) \doteq$

$W_1(\mathbb{R},(U,\rho'))$ – пространство *п.п. по Вейлю* функций $f:\mathbb{R}\to U$ порядка 1 со значениями в метрическом пространстве (U,ρ'). Имеем $W_p(\mathbb{R},U)\subseteq W_1(\mathbb{R},U)\subseteq W(\mathbb{R},U)$, $p\geq 1$. Обозначим через $M_p^\sharp(\mathbb{R},U)$ множество функций $f\in M_p(\mathbb{R},U)$, для которых

$$\lim_{\delta\to+0}\lim_{l_0\to+\infty}\sup_{l\geq l_0}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{1}{l}\sup_{T\subseteq[\xi,\xi+l]\,:\,\mathrm{meas}\,T\leq\delta l}\int\limits_T\rho^p(f(t),x_0)\,dt\right)^{1/p}=0\,.$$

Справедливо равенство (см., например, [9])

$$W_p(\mathbb{R},U)=W(\mathbb{R},U)\bigcap M_p^\sharp(\mathbb{R},U)\,,\ p\geq 1\,. \tag{1}$$

Последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, называется f-*возвращающей* для функции $f\in W(\mathbb{R},U)$, если для любого $\epsilon>0$ существуют числа $l=l(\epsilon,f)>0$ и $j_0\in\mathbb{N}$ такие, что все числа τ_j , $j\geq j_0$, являются $(\epsilon,D^{(\rho\,')}_{1,\,l})$-почти периодами функции f. Аналогично определяются f-возвращающие последовательности для функций $f\in W_p(\mathbb{R},U)$ (при замене метрики $D^{(\rho\,')}_{1,\,l}$ на метрику $D^{(\rho)}_{p,\,l}$), при этом f-возвращающие последовательности для функций $f\in W_p(\mathbb{R},U)\subseteq W(\mathbb{R},U)$ не зависят от того, какому именно из рассматриваемых пространств п.п. функций функция f считается принадлежащей.

Для функции $f\in W(\mathbb{R},U)$ через $\mathrm{Mod}\,f$ обозначается модуль (группа по сложению) таких чисел $\lambda\in\mathbb{R}$, что $e^{\,i\lambda\tau_j}\to 1$ при $j\to+\infty$ (где $i^2=-1$) для любой f-возвращающей последовательности τ_j . Если $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, и $e^{\,i\lambda\tau_j}\to 1$ при $j\to+\infty$ для всех $\lambda\in\mathrm{Mod}\,f$, где $f\in W(\mathbb{R},U)$, то последовательность τ_j является f-возвращающей. Если $U=(H,\|.\|)$ – банахово пространство и $f\in W_1(\mathbb{R},H)$, то $\mathrm{Mod}\,f$ совпадает с модулем частот функции f.

Если $\Lambda_j\subseteq\mathbb{R}$ – произвольные модули, то через $\sum_j\Lambda_j$ (или $\Lambda_1+\dots+\Lambda_n$ для конечного числа модулей Λ_j , $j=1,\dots,n$) обозначается сумма модулей, определяемая как наименьший модуль в $\mathbb{R}$, содержащий все множества Λ_j .

Обозначим через $(\mathrm{cl}_bU,\mathrm{dist})$ метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных множеств $A\subseteq U$ с метрикой Хаусдорфа

$$\mathrm{dist}(A,B)=\mathrm{dist}_\rho(A,B)=\max\bigl\{\sup_{x\in A}\rho(x,B),\ \sup_{x\in B}\rho(x,A)\bigr\}\,,\ A,B\in\mathrm{cl}_bU\,,$$

где $\rho(x,F)=\inf_{y\in F}\rho(x,y)$ – расстояние от точки $x\in U$ до непустого множества $F\subseteq U$. Пусть $\mathrm{cl}\,U$ – совокупность непустых замкнутых множеств $A\subseteq U$ и $\mathrm{dist}_{\rho'}$ – метрика Хаусдорфа на $\mathrm{cl}\,U$, соответствующая метрике ρ'. Имеем $\mathrm{cl}\,U=\mathrm{cl}_b(U,\rho')$. Метрические пространства $(\mathrm{cl}_bU,\mathrm{dist})$ и $(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho'})$ являются полными. Так как $\mathrm{dist}\,'(A,B)\doteq\min\{1,\mathrm{dist}\,(A,B)\}=\mathrm{dist}_{\rho\,'}(A,B)$ для всех $A,B\in\mathrm{cl}_bU$, то вложение $(\mathrm{cl}_bU,\mathrm{dist}\,')\subseteq(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho\,'})$ изометрично. Пространства $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}_bU)$ и $W_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_bU)$, $p\geq 1$, *п.п. по Вейлю многозначных отображений* $\mathbb{R}\ni t\to F(t)\in\mathrm{cl}_bU$ определяются как соответствующие пространства п.п. по Вейлю функций со значениями в метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_bU,\mathrm{dist})$. Положим $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)\doteq W_1(\mathbb{R},(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho\,'}))$. Справедливы вложения $W_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_bU)\subseteq W_1(\mathbb{R},\mathrm{cl}_bU)\subseteq W(\mathbb{R},\mathrm{cl}_bU)\subseteq W(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)$.

Пусть (U,ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{B}(U)$ – σ-алгебра борелевских подмножеств метрического пространства (U,ρ), $(\mathcal{M}(U),d)$ – полное сепарабельное метрическое пространство вероятностных борелевских мер, определенных на σ-алгебре $\mathcal{B}(U)$, с метрикой Леви – Прохорова $d(\mu_1,\mu_2)\doteq$

$\inf\{\epsilon > 0 : \mu_1[A] \le \mu_2[A^\epsilon] + \epsilon$ для всех непустых множеств $A \in \mathcal{B}(U)\}$, $\mu_1[.], \mu_2[.] \in \mathcal{M}(U)$, где $A^\epsilon = \{x \in U : \rho(x, A) < \epsilon\}$.

Пусть $(C_b(U), \|.\|_{C_b(U)})$ – банахово пространство ограниченных непрерывных функций $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|\mathcal{F}\|_{C_b(U)} = \sup_{x \in U} |\mathcal{F}(x)|\,,\ \mathcal{F} \in C_b(U)\,;$$

$C_b^+(U)$ – множество неотрицательных функций из $C_b(U)$. Каждой мере $\mu[.] \in \mathcal{M}(U)$ ставится в соответствие линейный (вероятностный) функционал $\mu(.)$ на банаховом пространстве $C_b(U)$:

$$\mu(\mathcal{F}) = \int\limits_U \mathcal{F}(x)\,\mu[dx]\,,\ \mathcal{F} \in C_b(U)\,.$$

Если $\mu \in \mathcal{M}(U)$, $G \in C_b^+(U)$ и $\mu(G) > 0$, то существует мера $\mu^G \in \mathcal{M}(U)$ такая, что $\mu^G(\mathcal{F}) = (\mu(G))^{-1}\mu(G\mathcal{F})$ для всех $\mathcal{F} \in C_b(U)$. Через $\operatorname{supp}\mu$ и $\operatorname{supp}\mathcal{F}$ обозначаются носители меры $\mu \in \mathcal{M}(U)$ и функции $\mathcal{F} \in C_b(U)$. Для $\mu \in \mathcal{M}(U)$, $x \in U$ и $\epsilon \in (0,1)$ положим $r_\epsilon(x,\mu) = \inf\{r > 0 : \mu[U_r(x)] > \epsilon\}$, где $U_r(x) = \{y \in U : \rho(x,y) < r\}$. Пусть $\delta_x[.]$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in U$.

Пространство $W_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ *п.п. по Вейлю мерозначных функций* $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}(U)$ определяется как пространство п.п. по Вейлю функций порядка 1 со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(U), d)$.

Теорема 1 ([15]). *Пусть (U,ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство. Тогда мерозначная функция $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}(U)$ принадлежит пространству $W_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ в том и только в том случае, когда $\mu(\mathcal{F};.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ для всех функций $\mathcal{F} \in C_b(U)$. При этом*

$$\operatorname{Mod}\mu[.;.] = \sum_{\mathcal{F} \in C_b(U)} \operatorname{Mod}\mu(\mathcal{F};.)\,.$$

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 2. *Пусть (U,ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $g \in W(\mathbb{R},U)$, $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$. Тогда для любого $\epsilon \in (0,1)$ существует функция $f_\epsilon \in W(\mathbb{R},U)$ такая, что $\operatorname{Mod} f_\epsilon(.) \subseteq \operatorname{Mod} g(.) + \operatorname{Mod}\mu[.;.]$, $f_\epsilon(t) \in \operatorname{supp}\mu[.;t]$ почти всюду (п.в.) и $\rho(f_\epsilon(t), g(t)) \le \epsilon + r_\epsilon(g(t), \mu[.;t])$ п.в.*

Аналогичное утверждение для п.п. по Степанову функций $g(.)$ и $\mu[.;.]$ приведено в [7]. Теорема 2 дополняет теорему 3, доказанную в [9].

Теорема 3. *Пусть (U,ρ) – полное метрическое пространство, $g \in W(\mathbb{R},U)$, $F \in W(\mathbb{R}, \operatorname{cl} U)$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(t) > 0$ при $t > 0$, существует функция $f \in W(\mathbb{R},U)$ такая, что $\operatorname{Mod} f \subseteq \operatorname{Mod} g + \operatorname{Mod} F$, $f(t) \in F(t)$ п.в. и $\rho(f(t),g(t)) \le \rho(g(t),F(t)) + \eta(\rho(g(t),F(t)))$ п.в.*

Если в условиях теоремы 3 $F \in W_p(\mathbb{R}, \operatorname{cl}_b U)$ для некоторого $p \ge 1$, то из (1) следует, что также $f \in W_p(\mathbb{R},U)$ [9].

Замечание. Пусть $U = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}$. Существует мерозначная функция $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(\mathbb{R}))$ такая, что $\operatorname{supp}\mu[.;.] \notin W(\mathbb{R}, \operatorname{cl}\mathbb{R})$. Действительно, положим $\mu[.;t] = \delta_0[.]$, если $|t| \le 1$, и $\mu[.;t] = 2^{-k}\delta_{s(k)}[.] + (1-2^{-k})\delta_0[.]$, если $2^{k-1} < |t| \le 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, где $s(k) = 1$ при $k \in 2\mathbb{N}-1$ и

$s(k) = -1$ при $k \in 2\mathbb{N}$. Легко проверить, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $l > 0$, что $D^{(d)}_{1,l}(\mu[.;.], \mu[.;.+\tau]) < \epsilon$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}))$. С другой стороны, $D^{(\mathrm{dist}')}_{1,l}(\operatorname{supp}\mu[.;.], \operatorname{supp}\mu[.;.+\tau]) = 1$ для всех $l > 0$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash(-l, l)$. Поэтому $\operatorname{supp}\mu[.;.] \notin W(\mathbb{R}, \operatorname{cl}\mathbb{R})$.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $W(\mathbb{R})$ – совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$ таких, что $\chi_T \in W_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Если $T \in W(\mathbb{R})$, то положим $\operatorname{Mod} T = \operatorname{Mod}\chi_T$. Справедлива следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $T_1, T_2 \in W(\mathbb{R})$. *Тогда* $T_1 \bigcap T_2 \in W(\mathbb{R})$, $T_1 \bigcup T_2 \in W(\mathbb{R})$ *и* $T_1\backslash T_2 \in W(\mathbb{R})$. *При этом модули* $\operatorname{Mod} T_1 \bigcap T_2$, $\operatorname{Mod} T_1 \bigcup T_2$ *и* $\operatorname{Mod} T_1\backslash T_2$ *содержатся в* $\operatorname{Mod} T_1 + \operatorname{Mod} T_2$.

Для произвольного модуля $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ обозначим через $\mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ непересекающихся множеств $T_j \in W(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \Lambda$, $\operatorname{meas}\mathbb{R}\backslash\bigcup_j T_j = 0$ и

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{l\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{1}{l}\operatorname{meas}[\xi, \xi+l]\setminus\bigcup_{j=1}^{N} T_j = 0\,.$$

Лемма 2 ([9])**.** *Пусть* $f_j \in W(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, *и* $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\mathbb{R})$. *Тогда* $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; .) \in W(\mathbb{R}, U)$ *и* $\operatorname{Mod}\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; .) \subseteq \sum_j \operatorname{Mod} f_j(.) + \sum_j \operatorname{Mod} T_j$.

Теорема 4 ([9])**.** *Пусть* $f \in W(\mathbb{R}, U)$. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *существуют множества* $T_j \in W(\mathbb{R})$ *и точки* $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, *такие, что* $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\operatorname{Mod} f)$ *и* $\rho(f(t), x_j) < \epsilon$ *для всех* $t \in T_j$.

Лемма 3. *Пусть* $f \in W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Тогда для любых* $a \in \mathbb{R}$ *и* $\epsilon > 0$ *найдется множество* $T \in W(\mathbb{R})$ *такое, что* $\operatorname{Mod} T \subseteq \operatorname{Mod} f$, $f(t) > a$ *при всех* $t \in T$ *и* $f(t) < a + \epsilon$ *при п.в.* $t \in \mathbb{R}\backslash T$.

Лемма 3 доказана в [9]. Она также является следствием следующего утверждения: если $f \in W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то для всех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, не принадлежащих некоторому не более чем счетному множеству, имеем $\{t \in \mathbb{R} : f(t) \geq \lambda\} \in W(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\{t \in \mathbb{R} : f(t) \geq \lambda\} \subseteq \operatorname{Mod} f$ [16]. Лемма 3 используется при доказательстве теоремы 4.

Лемма 4. *Пусть* $f_j \in W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, N$, *и* $\sum_{j=1}^{N} f_j(t) \geq \epsilon > 0$ *при п.в.* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любого* $\epsilon' > 0$ *существуют непересекающиеся множества* $T_j \in W(\mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, N$, *такие, что* $\operatorname{meas}\mathbb{R}\backslash\bigcup_{j=1}^{N} T_j = 0$, $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \sum_{k=1}^{N}\operatorname{Mod} f_k$ *и* $f_j(t) > \frac{\epsilon}{N} - \epsilon'$ *при всех* $t \in T_j$, $j = 1, \ldots, N$.

Доказательство. В силу леммы 3 существуют множества $T'_j \in W(\mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, N$, такие, что $\operatorname{Mod} T'_j \subseteq \operatorname{Mod} f_j$, $f_j(t) > \frac{\epsilon}{N} - \epsilon'$ при всех $t \in T'_j$ и $f_j(t) < \frac{\epsilon}{N}$ при п.в. $t \in \mathbb{R}\backslash T'_j$. Тогда $\operatorname{meas}\mathbb{R}\backslash\bigcup_{k=1}^{N} T'_k = 0$. Осталось положить $T_1 = T'_1$, $T_j = T'_j\backslash\bigcup_{k=1}^{j-1} T'_k$ при $j = 2, \ldots, N$ и воспользоваться леммой 1. $\square$

Пусть (U, ρ) и (V, ρ_V) – метрические пространства, $C(U, V)$ – метрическое пространство непрерывных функций $\mathcal{F} : U \to V$ с метрикой

$$D_{C(U,V)}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \sup_{x\in U}\min\{1, \rho_V(\mathcal{F}_1(x), \mathcal{F}_2(x))\}\,,\ \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C(U, V)\,.$$

Через $\mathcal{F}(.|_Y)$ обозначается ограничение функции $\mathcal{F} \in C(U,V)$ на непустое множество $Y \subseteq U$.

Лемма 5 ([10, 13])**.** *Пусть (U,ρ) и (V,ρ_V) – полные метрические пространства, $f \in W(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{F}(.,t) \in C(U,V)$, $t \in \mathbb{R}$. Предположим, что для некоторого $r>0$ при всех $x \in U$ функции $\mathbb{R} \ni t \to \mathcal{F}(.|_{U_r(x)},t) \in C(U_r(x),V)$ принадлежат пространствам $W_1(\mathbb{R},(C(U_r(x),V),D_{C(U_r(x),V)}))$. Тогда $\mathcal{F}(f(.),.) \in W(\mathbb{R},V)$ и $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.),.) \subseteq \operatorname{Mod} f(.) + \sum_{x\in U}\operatorname{Mod}\mathcal{F}(.|_{U_r(x)},.)$.*

Лемма 6. *Пусть (U,ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство и функция $\mathbb{R} \ni t \to \mathcal{F}(.,t) \in (C_b(U),\|.\|_{C_b(U)})$ принадлежит пространству $W(\mathbb{R},C_b(U))$. Тогда для любой мерозначной функции $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ функция $\mathbb{R} \ni t \to \mu(\mathcal{F}(.,t);t)$ принадлежит пространству $W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\mu(\mathcal{F}(.,.);.) \subseteq \operatorname{Mod}\mathcal{F}(.,.) + \operatorname{Mod}\mu[.;.]$.*

Доказательство. Поставим в соответствие функциям $\mathcal{F}(.,t) \in C_b(U)$ функции $\mathcal{M}(U) \ni \mu' \to \widetilde{\mathcal{F}}(\mu',t) \doteq \mu'(\mathcal{F}(.,t))$, $t \in \mathbb{R}$. Имеем $\widetilde{\mathcal{F}}(.,t) \in C_b(\mathcal{M}(U))$. Так как $\|\widetilde{\mathcal{F}}(.,t)\|_{C_b(\mathcal{M}(U))} = \|\mathcal{F}(.,t)\|_{C_b(U)}$ п.в., то $\widetilde{\mathcal{F}}(.,.) \in W(\mathbb{R},C_b(\mathcal{M}(U)))$ и $\operatorname{Mod}\widetilde{\mathcal{F}}(.,.) = \operatorname{Mod}\mathcal{F}(.,.)$. С другой стороны, метрическое пространство $(\mathcal{M}(U),d)$ полное и $\mu(\mathcal{F}(.,t);t) = \widetilde{\mathcal{F}}(\mu[.;t],t)$, $t \in \mathbb{R}$, поэтому лемма 6 является следствием леммы 5. □

Лемма 7. *Пусть (U,ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$, $G(.,.) \in W_1(\mathbb{R},C_b(U))$, $G(.,t) \in C_b^+(U)$ и $\mu(G(.,t);t) \geq \epsilon > 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Тогда функция $\mathbb{R} \ni t \to \mu^{G(.,t)}[.;t]$ принадлежит пространству $W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и $\operatorname{Mod}\mu^{G(.,.)}[.;.] \subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.] + \operatorname{Mod}G(.,.)$.*

Доказательство. В силу леммы 6 $\mu(G(.,.);.) \in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\mu(G(.,.);.) \subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.] + \operatorname{Mod}G(.,.)$. Так как $\mu(G(.,t);t) \geq \epsilon > 0$ п.в., то с помощью леммы 5 получаем, что $(\mu(G(.,.);.))^{-1} \in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}(\mu(G(.,.);.))^{-1} \subseteq \operatorname{Mod}\mu(G(.,.);.) \subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.] + \operatorname{Mod}G(.,.)$. С другой стороны, для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(U)$ имеем $\mathcal{F}(.)G(.,.) \in W(\mathbb{R},C_b(U))$ и $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(.)G(.,.) \subseteq \operatorname{Mod}G(.,.)$. Поэтому функция $\mathbb{R} \ni t \to \mu^{G(.,t)}(\mathcal{F};t) \doteq (\mu(G(.,t);t))^{-1}\mu(\mathcal{F}(.)G(.,t);t)$ принадлежит пространству $W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\mu^{G(.,.)}(\mathcal{F};.) \subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.] + \operatorname{Mod}G(.,.)$ (см. следствие 14 в [9]). Теперь осталось воспользоваться теоремой 1 и равенством (1). □

3. Доказательство теоремы 2

Обозначим $\operatorname{diam} Y = \sup_{x,y\in Y}\rho(x,y)$, $\emptyset \neq Y \subseteq U$.

Теорема 5. *Пусть (U,ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует мерозначная функция $\mu'[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ такая, что $\operatorname{Mod}\mu'[.;.] \subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.]$, $\operatorname{supp}\mu'[.;t] \subseteq \operatorname{supp}\mu[.;t]$ и $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\mu'[.;t] \leq \delta$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\epsilon \in (0,\frac{\delta}{2})$ и $\epsilon \leq \frac{1}{4}$. В силу теоремы 4 существуют множества $T_j \in W(\mathbb{R})$ и меры $\mu_j \in \mathcal{M}(U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\operatorname{Mod}\mu[.;.])$ и $d(\mu[.;t],\mu_j[.]) < \epsilon$ для всех $t \in T_j$. Так как пространство (U,ρ) предполагается сепарабельным, то μ_j – радоновские меры и, следовательно, можно выбрать компактные множества $K_j \subseteq U$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\mu_j[K_j] \geq \frac{1}{2}$. Тогда для всех $t \in T_j$ справедлива оценка $\mu[K_j^{\epsilon};t] >$

$\mu_j[K_j]-\epsilon\geq\frac{1}{4}$. Для каждого $j\in\mathbb{N}$ найдется конечное число ненулевых функций $\varphi_{jk}\in C_b^+(U)$, $k=1,\dots,N(j)$, таких, что diam supp $\varphi_{jk}\leq\delta$, $0\leq\sum_{k=1}^{N(j)}\varphi_{jk}(x)\leq 1$ для всех $x\in U$ и $\sum_{k=1}^{N(j)}\varphi_{jk}(x)=1$ для всех $x\in K_j^\epsilon$. Определим функции

$$\mathbb{R}\ni t\to f_{jk}(t)=\begin{cases}\mu(\varphi_{jk};t)\,, & \text{если } t\in T_j\,,\\ 1\,, & \text{если } t\in\mathbb{R}\backslash T_j\,.\end{cases}$$

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что $f_{jk}\in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}f_{jk}\subseteq\operatorname{Mod}\mu(\varphi_{jk};.)+\operatorname{Mod}T_j\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$. При этом $\sum_{k=1}^{N(j)}f_{jk}(t)=\mu\big(\sum_{k=1}^{N(j)}\varphi_{jk};t\big)\geq\mu[K_j^\epsilon;t]>\frac{1}{4}$ при всех $t\in T_j$ (и $\sum_{k=1}^{N(j)}f_{jk}(t)=N(j)>\frac{1}{4}$ при всех $t\in\mathbb{R}\backslash T_j$). В силу леммы 4 для любого $j\in\mathbb{N}$ существуют непересекающиеся множества $T'_{jk}\in W(\mathbb{R})$, $k=1,\dots,N(j)$, такие, что $\operatorname{Mod}T'_{jk}\subseteq\sum_{l=1}^{N(j)}\operatorname{Mod}f_{jl}\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$, $\operatorname{meas}\mathbb{R}\backslash\bigcup_{k=1}^{N(j)}T'_{jk}=0$ и $f_{jk}(t)>(5N(j))^{-1}$ при всех $t\in T'_{jk}$. Обозначим $T_{jk}=T_j\bigcap T'_{jk}$. Имеем (см. лемму 1) $T_{jk}\in W(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod}T_{jk}\subseteq\operatorname{Mod}T_j+\operatorname{Mod}T'_{jk}\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$. Определим мерозначные функции

$$\mathbb{R}\ni t\to\mu_{jk}[.;t]=\begin{cases}\mu[.;t]\,, & \text{если } t\in T_{jk}\,,\\ \delta_{x_{jk}}[.]\,, & \text{если } t\in\mathbb{R}\backslash T_{jk}\,,\end{cases}$$

где $x_{jk}\in U$ – любые точки, для которых $\varphi_{jk}(x_{jk})>0$. Из (1) и леммы 2 следует, что $\mu_{jk}[.;.]\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и $\operatorname{Mod}\mu_{jk}[.;.]\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]+\operatorname{Mod}T_{jk}\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$. Так как $\mu_{jk}(\varphi_{jk};t)=f_{jk}(t)>(5N(j))^{-1}$ для всех $t\in T_{jk}$ (и $\mu_{jk}(\varphi_{jk};t)=\varphi_{jk}(x_{jk})$ для всех $t\in\mathbb{R}\backslash T_{jk}$), то из леммы 7 получаем, что $\mu_{jk}^{\varphi_{jk}(.)}[.;.]\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и $\operatorname{Mod}\mu_{jk}^{\varphi_{jk}(.)}[.;.]\subseteq\operatorname{Mod}\mu_{jk}[.;.]\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$. Определим теперь мерозначную функцию $\mathbb{R}\ni t\to\mu'[.;t]=\mathbb{F}(\{\mu_{jk}^{\varphi_{jk}(.)}[.;.]\},\{T_{jk}\};t)$. Так как $\{T_{jk}\}_{j\in\mathbb{N},\,k=1,\dots,N(j)}\in\mathfrak{M}^{(W)}(\operatorname{Mod}\mu[.;.])$, то в силу (1) и леммы 2 имеем $\mu'[.;.]\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и $\operatorname{Mod}\mu'[.;.]\subseteq\sum_{j,k}\operatorname{Mod}\mu_{jk}[.;.]+\sum_{j,k}\operatorname{Mod}T_{jk}\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$. При этом из определения мерозначной функции $\mu'[.;.]$ вытекает, что $\operatorname{supp}\mu'[.;t]\subseteq\operatorname{supp}\mu[.;t]$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. С другой стороны, $\operatorname{supp}\mu'[.;t]=\operatorname{supp}\mu_{jk}^{\varphi_{jk}(.)}[.;t]\subseteq\operatorname{supp}\varphi_{jk}(.)$ при всех $t\in T_{jk}$. Следовательно, diam $\operatorname{supp}\mu'[.;t]\leq\delta$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. □

Теорема 6. *Пусть* (U,ρ) *– полное сепарабельное метрическое пространство,* $\mu[.;.]\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$. *Тогда существует функция* $f(.)\in W(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\operatorname{Mod}f(.)\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$ *и* $f(t)\in\operatorname{supp}\mu[.;.t]$ *при п.в.* $t\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Положим $\mu_0[.;.]=\mu[.;.]$. Из теоремы 5 вытекает существование мерозначных функций $\mu_j[.;.]\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$, $j\in\mathbb{N}$, таких, что $\operatorname{Mod}\mu_j[.;.]\subseteq\operatorname{Mod}\mu_{j-1}[.;.]\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$, $\operatorname{supp}\mu_j[.;t]\subseteq\operatorname{supp}\mu_{j-1}[.;t]\subseteq\operatorname{supp}\mu[.;t]$ и diam $\operatorname{supp}\mu_j[.;t]\leq j^{-1}$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. Отсюда получаем, что при п.в. $t\in\mathbb{R}$ существует единственная точка $f(t)\in\bigcap_j\operatorname{supp}\mu_j[.;t]\subseteq\operatorname{supp}\mu[.;t]$. При этом мерозначная функция $\mathbb{R}\ni t\to\delta_{f(t)}[.]\in(\mathcal{M}(U),d)$ измерима и $d(\delta_{f(t)}[.],\mu_j[.;t])\leq$ diam $\operatorname{supp}\mu_j[.;t]\leq j^{-1}$ п.в., следовательно, $\delta_{f(.)}[.]\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и $\operatorname{Mod}\delta_{f(.)}[.]\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$ ([9], лемма 10). С другой стороны, $d(\delta_{x_1}[.],\delta_{x_2}[.])=\rho'(x_1,x_2)$ для всех $x_1,x_2\in U$. Поэтому $f\in W(\mathbb{R},U)$ и $\operatorname{Mod}f(.)=\operatorname{Mod}\delta_{f(.)}[.]\subseteq\operatorname{Mod}\mu[.;.]$. □

Доказательство теоремы 2. Определим функцию

$$G_\epsilon(\xi) = \begin{cases} 1\,, & \text{если } \xi \leq 0\,, \\ 1 - \epsilon^{-1}\xi\,, & \text{если } 0 < \xi \leq \epsilon\,, \\ 0\,, & \text{если } \xi > \epsilon\,. \end{cases}$$

Для $x \in U$ и $\mu' \in \mathcal{M}(U)$ положим $R_\epsilon(x, \mu') = \inf\{r > 0 : \mu'(G_\epsilon(\rho(.,x) - r)) > \epsilon\}$. Справедливы неравенства $0 \leq R_\epsilon(x,\mu') \leq r_\epsilon(x,\mu')$. На $U \times \mathcal{M}(U)$ определим метрику $\widetilde{D}((x_1,\mu'_1),(x_2,\mu'_2)) = \rho(x_1,x_2) + d(\mu_1,\mu_2)$, $(x_j,\mu'_j) \in U \times \mathcal{M}(U)$, $j = 1,2$. Функция $(U \times \mathcal{M}(U), \widetilde{D}) \ni (x,\mu') \to R_\epsilon(x,\mu')$ непрерывна, поэтому также непрерывна функция $(U \times \mathcal{M}(U), \widetilde{D}) \ni (x,\mu') \to \mathcal{F}_\epsilon(x,\mu';.) \doteq G_\epsilon(\rho(.,x) - R_\epsilon(x,\mu')) \in C_b^+(U) \subset (C_b(U), \|.\|_{C_b(U)})$. Пусть $g(.) \in W(\mathbb{R}, U)$ и $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$. Тогда $(g(.), \mu[.;.]) \in W(\mathbb{R}, U \times \mathcal{M}(U))$ и $\operatorname{Mod}(g(.),\mu[.;.]) \subseteq \operatorname{Mod} g(.) + \operatorname{Mod}\mu[.;.]$, поэтому из леммы 5 следует, что функция $\mathbb{R} \ni t \to \mathcal{F}_\epsilon(g(t),\mu[.;t];.) \in C_b^+(U)$ принадлежит пространству $W(\mathbb{R}, C_b(U))$ и $\operatorname{Mod}\mathcal{F}_\epsilon(g(.),\mu[.;.];.) \subseteq \operatorname{Mod} g(.) + \operatorname{Mod}\mu[.;.]$. Из определения функции $R_\epsilon(.,.)$ получаем, что $\mu(\mathcal{F}_\epsilon(g(t),\mu[.;t];.);t) \geq \epsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Обозначим $\widetilde{\mu}[.;t] \doteq \mu^{\mathcal{F}_\epsilon(g(t),\mu[.;t];.)}[.;t]$, $t \in \mathbb{R}$. В силу леммы 7 $\widetilde{\mu}[.;.] \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и $\operatorname{Mod}\widetilde{\mu}[.;.] \subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.] + \operatorname{Mod}\mathcal{F}_\epsilon(g(.),\mu[.;.];.) \subseteq \operatorname{Mod} g(.) + \operatorname{Mod}\mu[.;.]$. Из теоремы 6 следует существование функции $f_\epsilon \in W(\mathbb{R}, U)$ такой, что $\operatorname{Mod} f_\epsilon(.) \subseteq \operatorname{Mod}\widetilde{\mu}[.;.] \subseteq \operatorname{Mod} g(.) + \operatorname{Mod}\mu[.;.]$ и $f_\epsilon(t) \in \operatorname{supp}\widetilde{\mu}[.;t]$ п.в. Следовательно, $f_\epsilon(t) \in \operatorname{supp}\mu[.;t]$ п.в. и $f_\epsilon(t) \in \operatorname{supp}\mathcal{F}_\epsilon(g(t),\mu[.;t];.)$ п.в. Последнее означает, что $\rho(f_\epsilon(t), g(t)) \leq \epsilon + R_\epsilon(g(t),\mu[.;t]) \leq \epsilon + r_\epsilon(g(t),\mu[.;t])$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Список литературы

[1] J. Andres, *Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions*, in: J. Andres, L. Górniewicz, P. Nistri (Eds.), Differential Inclusions and Optimal Control, in: Lecture Notes in Nonlinear Anal., vol. 2 (1998), 35–50.

[2] J. Andres, A.M. Bersani, K. Leśniak, *On some almost-periodicity problems in various metrics*, Acta Appl. Math. **65** (2001) 35–57.

[3] Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, В.Я. Лин, О.О. Локуциевский, *О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем*, в кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, Наукова думка, Киев, 1977.

[4] Л.И. Данилов, *Почти периодические сечения многозначных отображений*, Известия отдела математики и информатики УдГУ, Вып. 1, Ижевск, 1993, 16–78.

[5] А.М. Долбилов, И.Я. Шнейберг, *Почти периодические многозначные отображения и их сечения*, Сибирский математический журнал, **32** (1991), 172–175.

[6] A. Fryszkowski, *Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps*, Studia Math. **76** (2) (1983), 163–174.

[7] Л.И. Данилов, *Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений*, Матем. сборник., **188** (1997), 3–24.

[8] Л.И. Данилов, *О почти периодических многозначных отображениях*, Матем. заметки, **68** (2000), 82–90.

[9] L.I. Danilov, *On Weyl almost periodic selections of multivalued maps*, J. Math. Anal. Appl., **316** (2006), 110-127.

[10] Л.И. Данилов, *О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений*, ФТИ УрО РАН, Ижевск, 2004. Деп. в ВИНИТИ 09.06.2004, No. 981-В2004.

[11] L.I. Danilov, *On Besicovitch almost periodic selections of multivalued maps*, E-print arXiv: math.CA/0503293, 2005.

[12] Б.М. Левитан, *Почти-периодические функции*, ГИТТЛ, Москва, 1953.

[13] L.I. Danilov, *On equi-Weyl almost periodic selections of multivalued maps*, E-print arXiv: math.CA/0310010, 2003.

[14] Н.Н. Вахания, В.И.Тариеладзе, С.А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, Москва, 1985.

[15] Л.И. Данилов, *О почти периодических по Вейлю мерозначных функциях*, Известия Института математики и информатики УдГУ, Вып. 1 (31), Ижевск, 2005, 79–98.

[16] Л.И. Данилов, *О равномерной аппроксимации почти периодических по Вейлю и почти периодических по Безиковичу функций*, Известия Института математики и информатики УдГУ, Вып. 1 (35), Ижевск, 2006, 33–48.

Леонид Иванович Данилов
Физико-технический институт УрО РАН,
ул. Кирова 132,
426000, Ижевск, Россия
E-mail address: danilov@otf.pti.udm.ru