S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 355–361 (2006)

УДК 519.172.2

MSC 05C15

ПРЕДПИСАННАЯ (p,q)-РАСКРАСКА РАЗРЕЖЕННЫХ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

О.В. БОРОДИН, А.О. ИВАНОВА, Т.К. НЕУСТРОЕВА

Abstract. For plane graphs of large enough girth we prove an upper bound for the list (p,q)-chromatic number which differs from the best possible one by at most an additive term that does not depend on p.

1. Введение

Раскраска $f : V(G) \to \{1,2,\dots,k\}$ графа $G = (V,E)$ называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины на расстоянии не более 2 окрашены в разные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется 2-*дистанционным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_2(G)$. Задача 2-дистанционной раскраски возникает в приложениях; в частности, она является одной из основных моделей в проблеме распределения радиочастот (ПРР) в сетях мобильного телефонирования.

В самой теории графов известна старая (1977) гипотеза Г. Вегнера [1] о том, что $\chi_2(G) \le \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor + 1$ любого плоского графа G с максимальной степенью $\Delta(G)$ (см. также монографию Т. Р. Йенсена и Б. Тофта [2, п. 2.18]). Наилучшей из известных верхних оценок для произвольных плоских графов является $\chi_2(G) \le \lceil \frac{9}{5}\Delta(G) \rceil + 1$ при $\Delta(G) \ge 47$ ([3]).

Очевидно, что $\chi_2(G) \ge \Delta(G) + 1$ для любого графа G (ввиду того, что в любом графе есть звезда $K_{1,\Delta(G)}$). Возникает вопрос: для каких графов 2-дистанционное хроматическое число равно этой тривиальной нижней оценке? К таким графам относятся, например, все деревья.

В [4, 5, 6] нами показано, что если плоский граф G разрежен, т.е. его обхват (длина минимального цикла) $g(G)$ при фиксированном $\Delta(G)$ достаточно велик,

O.V. Borodin, A.O. Ivanova, T.K. Neustroeva, List (p,q)-coloring of sparse plane graphs.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00694 и 05-01-00816.

Поступила 3 октября 2006 г., опубликована 20 октября 2006 г.

то $\chi_2(G) = \Delta(G) + 1$. Легко видеть, что при $\Delta(G) = 2$ существуют графы с $\chi_2(G) = 4$ и произвольно большим обхватом, например, C_{3k+1}.

В ПРР одной из наиболее естественных является следующая теоретико-графовая модель, *(p, q)-раскраска.* Вершины плоского графа (источники) должны быть раскрашены (получить частоты) так, чтобы цвета вершин (целые числа) на расстоянии 1 различались не менее, чем на p, а на расстоянии 2 — не менее, чем на q. Здесь $p \geq q$, т.к. частоты близко расположенных источников должны различаться сильнее ввиду интерференции волн. Понятно, что $(1, 1)$-раскраска есть в точности 2-дистанционная раскраска.

Для (p, q)-хроматического числа, $\chi_{p,q}(G)$, произвольного плоского графа в [7] доказано, что $\chi_{p,q}(G) \leq 10p + c_1$, где c_1 – величина, не зависящая от p, а для разреженного плоского графа справедлива доказанная в [8]

Теорема 1 *Пусть G — планарный граф обхвата не менее* 31*, тогда* $\chi_{p,q}(G) \leq 2p + (\Delta(G) - 1)(2q - 1)$ *при* $\Delta(G) \geq 5$.

Что касается нижней оценки (p, q)-хроматического числа, то, как доказано в [8], существуют плоские графы G произвольного обхвата со сколь угодно большим $\Delta(G)$, для которых $\chi_{p,q}(G) \geq 2p + c_2$, где c_2 не зависит от p. Таким образом, главный член, $2p$, в теореме 1 не допускает улучшения.

Иногда в ПРР каждый источник имеет свой собственный набор разрешенных частот, т.е. возникает известная в теории графов задача предписанной раскраски. Мы в дальнейшем считаем, что цветами являются любые целые числа. Обозначим предписанное хроматическое число через $\chi^l_{p,q}(G)$. Очевидно, что $\chi^l_{p,q}(G) \geq \chi_{p,q}(G)$ для любого графа G.

При $q = 0$ $\chi^l_{p,q}(G)$ может сколь угодно сильно отличаться от $\chi_{p,q}(G)$:

Предложение 2. *Для любого $n \geq 1$ существует граф G, у которого $\chi_{p,0}(G) = p + 1$, а $\chi^l_{p,0}(G) \geq n(2p - 1)$.*

Что касается предписанных (p, q)-раскрасок при $q \geq 1$, то мы не знаем примеров графов G, для которых бы $\chi^l_{p,q}(G) \neq \chi_{p,q}(G)$. Такие примеры не известны даже для 2-дистанционной раскраски. Отметим, что известная задача тотальной раскраски графа G (т.е. совместной раскраски его вершин и ребер, при которой любые два смежных или инцидентных элемента получают разные цвета) сводится к задаче 2-дистанционной раскраски вспомогательного графа, получаемого из G заменой каждого ребра на цепь длины 2. Можно сказать, что задача тотальной раскраски (как обычной, так и предписанной) близка с одной стороны к задаче 2-дистанционной раскраски, а с другой стороны — реберной. Две известных в теории графов старые гипотезы состоят в том, что предписанные тотальное и реберное хроматические числа любого графа совпадают с их обычными тотальным и реберным хроматическими числами. Мы не рискнем пока что высказать аналогичную гипотезу даже про 2-дистанционную раскраску, но возможно, что она имеет право на существование.

Для произвольных плоских графов в [7] доказана та же оценка: $\chi^l_{p,q}(G) \leq 10p + c_1$, что и для $\chi_{p,q}(G)$. Основной целью настоящей работы является обобщение теоремы 1 на случай предписанной (p, q)-раскраски:

Теорема 3 Пусть G — планарный граф обхвата не менее $5(\lceil \frac{2p-1}{(\Delta(G)-2)(2q-1)} \rceil + 4) + 1$, тогда $\chi^l_{p,q}(G) \leq 2p + (\Delta(G) - 1)(2q - 1)$ при $\Delta(G) \geq 4$.

Отметим, что ограничение на обхват в теореме 3, в отличие от теоремы 1, является растущей функцией от p при фиксированных q и $\Delta(G)$. Следующий факт частично объясняет это обстоятельство.

Предложение 4. *В задаче предписанной (p,q)-раскраски в $2p+(\Delta(G)-1)(2q-1)$ цветов k-цепь не является сводимой конфигурацией при $k \le 2\lceil\frac{p-1}{(\Delta(G)-1)(2q-1)}\rceil+1$, где $\Delta(G)\ge 2$.*

(Здесь и в дальнейшем под *k-цепью* понимается цепь, состоящая из в точности k вершин степени 2.)

Тем самым достаточные условия для предписанной (p,q)-раскрашиваемости оказываются, вообще говоря, более жесткими, чем для обычной (p,q)-раскраски в одно и то же число цветов. Однако, в одном частном случае, при $\lceil\frac{2p-1}{(\Delta(G)-2)(2q-1)}\rceil=1$, ограничение на обхват в теореме 3 получилось менее жестким, чем в теореме 1.

2. Доказательство предложения 2

Рассмотрим полный двудольный граф $G=G(U,W)=K_{n,(n(2p-1))^n}$. Зададим предписание $L(v)$ на каждой вершине графа G следующим образом. На i-й вершине из U положим $L(v_i)=\{(i-1)(n+1)(2p-1)+p,(i-1)(n+1)(2p-1)+p+1,\dots,(i(n+1)-1)(2p-1)+p-1\}$. Отметим, что любые два цвета из предписаний разных вершин из U отличаются не менее чем на $2p$. С другой стороны, вершин в W ровно столько, сколько существует способов выбора по одному цвету из предписания каждой вершины из U. Для цвета α положим $T(\alpha)=\{\alpha-p+1,\alpha-p+2,\dots,\alpha+p-1\}$. Ясно, что если $\alpha_i\in L(v_i)$, $\alpha_j\in L(v_j)$, где $i\ne j$, то $T(\alpha_i)\cap T(\alpha_j)=\emptyset$. Каждому способу выбрать по представителю, α_i, из предписания $L(v_i)$, где $v_i\in U$, мы сопоставим вершину $w\in W$, на которой зададим предписание $L(w)$ равным $\bigcup_{1\le i\le n}T(\alpha_i)$. Из сказанного выше следует, что $|L(w)|=n|T(\alpha_i)|=n(2p-1)$.

Из построенного предписания графа G невозможно выделить раскраску, поскольку как бы мы ни раскрасили вершины $v_1,v_2,\dots,v_n$ из U в цвета $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, соответственно, найдется вершина w из W такая, что любой цвет β из $L(w)$ конфликтует с одной из вершин из U, а именно с той v_i, для которой $\beta\in T(\alpha_i)$.

3. Доказательство теоремы 3

Пусть G — наименьший по числу ребер граф со свойствами: $\Delta(G)\le\Delta$, где $\Delta\ge 5$, $g(G)\ge 5(\lceil\frac{2p-1}{(\Delta-2)(2q-1)}\rceil+4)+1$ и $\chi^l_{p,q}(G)>2p+(\Delta-1)(2q-1)$. Покажем, что тогда G имеет либо висячую вершину, либо k-цепь, где $k\ge\lceil\frac{2p-1}{(\Delta-2)(2q-1)}\rceil+4$ и под *k-цепью* понимается цепь, состоящая из в точности k вершин степени 2.

Допустим противное, т. е. в G нет $(\ge\lceil\frac{2p-1}{(\Delta-2)(2q-1)}\rceil+4)$-цепей и минимальная степень графа не меньше 2. Стягивая каждую k-цепь графа G в ребро, мы получаем планарный граф G^* с минимальной степенью не менее 3. Тогда в G^* есть грань ранга ≤ 5. Следовательно, в графе G должна быть грань ранга не более $5(\lceil\frac{2p-1}{(\Delta-2)(2q-1)}\rceil+4)$, что противоречит условию $g\ge 5(\lceil\frac{2p-1}{(\Delta-2)(2q-1)}\rceil+4)+1$.

Предположим сначала, что в G есть висячая вершина v. Тогда в силу минимальности G граф, полученный в результате удаления ребра, инцидентного v, имеет предписанную (p,q)-раскраску вершин в $2p+(\Delta-$

$1)(2q-1)$ цветов. Обесцветим v и продолжим данную раскраску на G. На цвет вершины v имеется $2p-1$ ограничений от смежной вершины и $2q-1$ ограничений от каждой вершины на расстоянии 2. Поэтому всегда найдется хотя бы один свободный цвет, в который можно окрасить v.

Пусть теперь в G есть k-цепь $P = uv_0v_1 \dots v_{k-2}v_{k-1}w$, где $d(v_i) = 2$, $0 \le i \le k-1$ и $k \ge \lceil \frac{2p-1}{(\Delta-2)(2q-1)} \rceil + 4$. Удалим из графа вершины v_i, $1 \le i \le k-2$, раскрасим полученный граф в $2p+(\Delta-1)(2q-1) = 2p+c$ цветов и перенесем раскраску на G. Пусть u окрашена в β, а v_0 — в α.

Заметим, что если удалить из цепи P любое ребро v_iv_{i+1}, то можно последовательно раскрасить как *левую часть*, $P_L = v_1 \dots v_i$, цепи P, так и ее *правую часть*, $P_R = v_k \dots v_{i+1}$, просто потому что число цветов, разрешенных для очередной вершины, больше чем общее число запретов от двух ее ближайших соседей ($2p-1$ и $2q-1$). Но, разумеется, возникает проблема стыковки при восстановлении ребра v_iv_{i+1}.

Сначала мы будем красить цепь слева направо, $v_1, v_2, \dots$, подбирая *место стыковки*, (v_s, v_{s+1}), и создавая для нее благоприятные предпосылки. Затем будем красить цепь справа налево до v_{s+1} и произведем стыковку.

Шаг 1. Раскраска цепи P слева направо.

Назовем *тенью* T_α цвета α множество из $2p-1$ цветов, отличающихся от α менее чем на p.

Заметим, что на вершину v_1 действует $2p-1$ запретов от v_0 (составляющих T_α), а также $2q-1$ запретов от вершины u, поэтому на v_1 остается $\ge (\Delta-2)(2q-1)+1 = c^*+1 > 2$ цветов; здесь мы полагаем $c^* = (\Delta-2)(2q-1)$. Наибольший и наименьший из оставшихся на v_1 цветов обозначим через t_1 и b_1, соответственно. Ясно, что $r_1 = t_1 - b_1 \ge c^*$.

Предположим, вершины $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}$ уже окрашены, а на v_i есть два цвета, t_i (верхний) и b_i (нижний), где $t_i > b_i$, не противоречащие цветам предшествующих двух вершин. Назовем *разбросом*, r_i, разность $t_i - b_i$.

Редуцированным предписанием $L^*(v_{i+1})$ вершины v_{i+1} назовем множество цветов из $L(v_{i+1})$, не запрещаемых вершиной v_{i-1}.

Замечание 5. *Если $L^*(v_{i+1})$ лежит по обе стороны от T_{t_i} или от T_{b_i}, например первого, то в $L^*(v_{i+1})$ есть два цвета, t_{i+1} и b_{i+1} с разбросом не меньше $2p-1$. Тогда мы красим v_i в t_i и объявляем местом стыковки ребро $v_{i+1}v_{i+2}$ (полагая $s = i+1$). Здесь обратим внимание читателя на то, что тени, отбрасываемые цветами t_{i+1} и b_{i+1} на вершину v_{i+2} не пересекаются (если бы пересекались, то разброс на v_{i+1} был бы $< 2(p-1) < 2p-1$), поэтому при любом цвете на v_{i+2}, полученном при раскраске цепи P справа налево и не противоречащем цвету вершины v_i, можно раскрасить v_{i+1} в один из цветов t_{i+1} и b_{i+1}.*

Редуцированное предписание $L^*(v_{i+1})$ имеет *тип 1*, если $L^*(v_{i+1}) \not\subseteq T_{t_i} \cup T_{b_i}$, и *тип 2*, если $L^*(v_{i+1}) \subseteq T_{t_i} \cup T_{b_i}$. Ключевую роль в доказательстве теоремы 2 играет следующее

Утверждение 6. *Если $L^*(v_{i+1})$ имеет тип 1, то из него можно выделить два цвета, t_{i+1} и b_{i+1}, такие, что $r_{i+1} \ge r_i + c - 2q + 1$.*

Доказательство. Без ограничения общности, можно считать, что в $L^*(v_{i+1})$ существует цвет z, лежащий выше T_{t_i}. Ввиду сделанного замечания $T_{b_i} \setminus T_{t_i} \cap L^*(v_{i+1}) = \emptyset$ и вообще ниже T_{b_i} нет цветов из $L^*(v_{i+1})$, иначе место стыковки уже определено, и можно перейти к шагу 2. Заметим, что $|T_{t_i} \cap T_{b_i}| = 2p - r_i - 1$, откуда следует, что выше T_{b_i} в $L^*(v_{i+1})$ имеется не менее $2p+c-(2q-1)-(2p-r_i-1)=r_i+c-(2q-1)+1=r_i+c^*+1$ цветов. Мы красим v_i в цвет b_i, а из $L^*(v_{i+1})\setminus T_{b_i}$ берем крайние цвета в качестве t_{i+1} и b_{i+1}; тогда очевидно, что $r_{i+1}\geq r_i+c^*$. $\square$

Если при раскраске цепи слева направо встречаются редуцированные предписания только типа 1, то после раскраски очередной вершины мы либо увеличиваем разброс на c^*, либо сразу находим место стыковки согласно замечанию. В этом случае мы будем считать, что место стыковки найдено (и можно переходить к шагу 2), если разброс t_i и b_i достигает $2p-1$, поскольку тогда тени этих цветов не пересекаются, и будем называть это *первым вариантом* завершения шага 1.

Пусть в процессе раскраски цепи слева направо впервые возникло $L^*(v_{i+1})$ типа 2. Тогда мы поступаем иначе: выделяем из него два цвета, t_{i+1} и b_{i+1}, наибольший и наименьший. Заметим, что $t_{i+1}\notin T_{b_i}$ и $b_{i+1}\notin T_{t_i}$, поскольку $L^*(v_{i+1})\subseteq T_{t_i}\cup T_{b_i}$, а $|L^*(v_{i+1})|$ больше мощности каждой из теней. Другими словами, цвет t_{i+1} для v_{i+1} не противоречит выбору цвета b_i для v_i и наоборот, цвет b_{i+1} для v_{i+1} не противоречит выбору цвета t_i для v_i. Отметим, что $t_{i+1}-b_{i+1}\geq 2p-1$, поэтому тени цветов t_{i+1} и b_{i+1} на вершине v_{i+2} не пересекаются. Мы будем говорить, что тем самым шаг 1 завершился по *второму варианту*, и снова полагаем $s=i+1$.

В каждом из вариантов шаг 1 завершается при $s\leq\lceil\frac{2p-1}{c^*}\rceil$.

Шаг 2. Раскраска цепи P справа налево. Красим вершины $v_k,\dots,v_{s+3}$ произвольным образом, пользуясь тем, что цветов больше, чем общее число запретов $((2p-1)+(2q-1))$. Рассмотрим вершину v_{s+2}. Исключим из $L(v_{s+2})$ тени цветов вершин v_{s+3}, v_{s+4} и тени обоих вариантов цветов вершины v_s. Поскольку $\Delta\geq 4$ хотя бы один цвет останется для v_{s+2}. Далее красим вершину v_{s+1} аналогичным образом, избегая конфликтов с вершинами v_{s+2}, v_{s+3} и v_{s-1}. Заметим, что заботу об отсутствии конфликта между v_{s+1} и v_s берет на себя v_s: мы красим v_s в тот из цветов t_s, b_s, тень которого не накрывает цвет вершины v_{s+1}. Остается выбрать цвет для вершины v_{s-1} при стыковке второго типа. Это зависит только от цвета, выбранного для v_s, а именно, если на v_s был выбран t_s, то v_{s-1} красим в b_{s-1}, и наоборот если на v_s был выбран b_s, то v_{s-1} красим в t_{s-1}.

Поскольку, как отмечалось выше, шаг 1 закончится при $s\leq\lceil\frac{2p-1}{c^*}\rceil$, а для осуществления шага 2 требуется не более двух вершин, v_{s+1}, v_{s+2}, то при $k\geq\lceil\frac{2p-1}{c^*}\rceil+4$ наша k-цепь P раскрашиваема согласно заданному предписанию.

Теорема 3 доказана.

4. Доказательство предложения 4

Пусть c и k – натуральные числа, где $c\geq 1$, а $k=\lfloor\frac{p-1}{c}\rfloor$ (заметим, что $ck\leq p-1$). Пусть далее $P=v_0,v_1,\dots,v_{2k+1}$ — цепь, в которой цвета вершин v_0 и v_{2k+1} равны α. Зададим предписания мощности $2p+c$ на остальных вершинах цепи P так, чтобы P не допускала даже $(p,0)$-раскраски (а значит и никакой (p,q)-раскраски). Другими словами, на вершинах P нельзя будет выбрать по одному из предписанных цветов так, чтобы цвета двух соседних отличались не меньше, чем на p.

Положим $L(v_1)=T_\alpha\cup\{\alpha+p,\dots,\alpha+p+c\}$, где, напоминаем, тень, T_α, цвета α состоит из $2p-1$ цветов, отличающихся от α менее чем на p. Заметим, что

v_1 может быть окрашена лишь в один из цветов $\alpha+p,\dots,\alpha+p+c$ поскольку v_0 окрашена в α.

Аналогично, для каждого i, где $2 \le i \le k$, положим $L(v_i)$ равным тени наибольшего из цветов в $L(v_{i-1})$ с добавлением выше этой тени следующих $c+1$ натуральных чисел. Тогда при любой раскраске v_{i-1} вершина v_i может быть раскрашена лишь в один из $ic+1$ наибольших цветов в $L(v_i)$. Здесь число оставшихся допустимыми для v_i цветов увеличилось на c поскольку v_{i-1} могла быть покрашена в наименьший цвет из $L(v_{i-1})$.

При $k+1 \le i \le 2k$ мы полагаем $L(v_i) = L(v_{2k+1-i})$. Нетрудно видеть, что при любой раскраске вершин $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ для v_k остаются допустимыми цвета, лежащие в интервале длины ck (возможно далеко не все эти цвета, если цвета предыдущих вершин выбирались не оптимально). Из симметричности построения следует, что цвета, допустимые на v_{k+1}, лежат в том же интервале (длины меньше p). Невозможность раскраски цикла P теперь непосредственно следует из того, что любые цвета, оставшиеся допустимыми для v_k и v_{k+1} после окраски остальных вершин цикла, отличаются менее чем на p. Для завершения доказательства остается положить $c = (\Delta(G)-1)(2q-1)$.

Авторы благодарят А.Н. Глебова за внимательное прочтение рукописи и ряд полезных замечаний.

Список литературы

[1] *Wegner G.* Graphs with given diameter and a coloring problem, Technical Report. University of Dortmund, 1977.

[2] *Jensen T. R., Toft B.* Graph coloring problems. New York. John–Wiley & Sons, 1995.

[3] *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван ден Хойвел Я.* Минимальные степени и хроматические числа квадратов плоских графов, Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, №4. С. 9–33.

[4] *О.В. Бородин, А.О. Иванова, Т.К. Неустроева*, 2-дистанционная раскраска разреженных плоских графов, Сибирские Электронные Математические Известия. 2004. Т. 1. С. 76–90 (http://semr.math.nsc.ru/).

[5] *О.В. Бородин, А.Н. Глебов, А.О.Иванова, Т.К. Неустроева, В.А. Ташкинов*, Достаточные условия 2-дистанционной $\Delta+1$-раскрашиваемости плоских графов, Сибирские Электронные Математические Известия. 2004. Т. 1. С. 129–141 (http://semr.math.nsc.ru/).

[6] *О.В. Бородин, А.О. Иванова, Т.К. Неустроева*, Достаточные условия 2-дистанционной $\Delta+1$-раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6, Дискретный анализ и исследование операций, июль–сентябрь. 2005. Серия 1. Т.12, № 3. С. 32–47.

[7] *О.В. Бородин, Брусма Х., А.Н. Глебов, Ван ден Хойвел*, Минимальные степени и хроматические числаквадратов плоских графов, Дискретный анализ и исследование операций, Серия 1. 2001. Т.8, № 4. С. 9–33.

[8] *О.В. Бородин, А.О. Иванова, Т.К. Неустроева*, (p,q)-раскраска разреженных плоских графов. (принята к печати)

Олег Вениаминович Бородин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `brdnoleg@math.nsc.ru`

Иванова Анна Олеговна
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского 48,
677000, Якутск, Россия
E-mail address: `shmgnanna@mail.ru`

Неустроева Татьяна Кимовна
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского 48,
677000, Якутск, Россия
E-mail address: podn2001@mail.ru