S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 346–351 (2006) УДК 512.54

MSC 13A99

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРУПП С СИЛЬНО ВЛОЖЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

С. А. ТАРАСОВ

Abstract. It is proved that a group G with finite involution and strongly embedded subgroup of shape $B = R \times T$ where R is an abelian periodic subgroup, $T = U \leftthreetimes H$ is a Frobenius group with abelian core U containing involution is isomorphic to $R \times L_2(P)$ where P is a locally finite field of characteristic 2.

Введение

В работе продолжено исследование Сучкова и автора бесконечных групп с заданной сильно вложенной подгруппой, периодичность которой не предполагается.

Напомним понятия, которые встречаются в формулировке основного результата настоящей статьи.

Определение 1. *Инволюция в группе называется конечной, если она с каждой своей сопряженой инволюцией порождает конечную подгруппу.*

Определение 2. *Собственная подгруппа B группы G называется сильно вложенной в G, если B содержит инволюцию, а пересечение $B \cap B^g$ при любом $g \in G \setminus B$ инволюций не содержит.*

Определение 3. *Собственная неединичная подгруппа H группы T называется обособленной, если $H \cap H^t = 1$ при любом $t \in T \setminus H$.*

Определение 4. *Группа $T = U \leftthreetimes H$ называется группой Фробениуса с ядром U и дополнительным множителем H, если H — обособленная подгруппа и каждый элемент из T содержится либо в U, либо в подгруппе, сопряженной с H.*

Tarasov S. A., On a class of groups with strongly embedded subgroup.

Поступила 5 сентября 2006 г., опубликована 4 октября 2006 г.

Проективную специальную линейную группу степени 2 над полем P будем обозначать через $L_2(P)$.

Теорема 1. *Пусть G — группа с конечной инволюцией, $B = R \times T$ — ее сильно вложенная подгруппа, где R — абелева периодическая подгруппа, $T = U \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с абелевым ядром U, содержащим инволюцию. Тогда $G = R \times L_2(P)$, где P — локально конечное поле характеристики 2.*

В предположении, что $R = 1$, а U — элементарная абелева 2–подгруппа, эта теорема была доказана Созутовым [2]. Тем самым была положительно решена первая часть вопроса 10.76 Шункова из Коуровской тетради. Случай, когда $R = 1$, U — абелева 2-подгруппа, разобран Мазуровым [1]. При $R = 1$ теорема была доказана Сучковым и автором [4]. Наконец, если G — периодическая группа, то теорема является следствием описания Сучковым [3] периодических групп с абелевыми централизаторами инволюций.

1. Предварительные результаты

Предложение 1.1. [4]. *Пусть G — группа с конечной инволюцией,B — ее сильно вложенная подгруппа, i — некоторая инволюция из B, $U = C_G(i) = C_B(i)$, v — инволюция из $G \setminus B$, $M = B \cap B^v$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *В группе G все инволюции сопряжены, инволюции из B сопряжены в B;*
(2) *Порядок элемента vi нечетен, каждый элемент $g \in G \setminus B$ обладает представлением $g = d\,j$, где $d \in U$, j — инволюция из $G \setminus B$.*
(3) *Каждый смежный класс $Ub, b \in B$, содержит точно один строго вещественный относительно v элемент. В частности, $B = UM$.*

Предположим теперь, что группа G удовлетворяет условию теоремы. Введем обзначения: $V = R \times U$, S — силовская 2–подгруппа из U, i — фиксированная инволюция из S.

Лемма 1.1. *Все инволюции из B содержатся в S. Если k — инволюция из S, то $C_G(k) = V$.*

Доказательство. Второе утверждение леммы вытекает из сильной вложенности подгруппы B и строения группы Фробениуса T. Если $x \in B$, то $i^x \in S$. Отсюда и из предположения 1.1 следует первое утвеждение леммы.

Пусть $Z = Z(G)$ — центр группы G. Так как $R = Z(B)$ — центр подгруппы B то $Z \leq R$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/Z$. Полагаем далее, $\overline{B} = B/Z$, $\overline{R} = R/Z$, $\overline{T} = TZ/Z$, $\overline{U} = UZ/Z$, $\overline{H} = HZ/Z$. Тогда $\overline{B} = \overline{R} \times \overline{T}$ и $\overline{T} = \overline{U} \leftthreetimes \overline{T}$ изоморфна T.

Лемма 1.2. *Группа $\overline{G}$ и ее подгруппа $\overline{B}$ удовлетворяют условию теоремы. При этом $\overline{G}$ имеет тривиальный центр.*

Доказательство. Заметим сначала,что если t — конечная инволюция в G, то конечной будет и инволюция $\overline{t} = tZ$ в $\overline{G}$. Покажем, что подгрупа $\overline{B}$ сильно вложена в группу $\overline{G}$. Действительно, так как $B \neq G$, то $\overline{B} \neq \overline{G}$. Подгруппа $\overline{B}$ содержит инволюцию $\overline{i} = iZ$. Предположим, что пересечение $\overline{B} \cap \overline{B}^{\overline{g}}$ содержит инволюцию $\overline{l} = lZ$ для некоторого элемента $\overline{g} \in \overline{G} \setminus \overline{B}$. Тогда l имеет четный порядок, а смежный класс lZ содержит инволюцию, которая принадлежит и пересечению $B \cap B^g$. Полученное противоречие доказывает сильную вложенность подгруппы $\overline{B}$ в группе $\overline{G}$.

Пусть, наконец, $\overline{Z}_1 = Z(\overline{G})$ — центр $\overline{G}$. Ввиду сильной вложенности подгруппы $\overline{B} = \overline{R} \times \overline{T}$ в группе $\overline{G}$ выполняется включение $\overline{Z}_1 \leq Z(\overline{B}) = \overline{R}$. Если Z_1 — полный прообраз $\overline{Z}_1$ в G , то $Z_1 \leq R = Z(B)$. Поскольку $Z_1^v = Z_1$ для любой инволюции $v \in G$, то в силу предложения 1.1 (3) v перестановочна с каждым элементом из Z_1, а так как по предложению 1.1 (2) группа G порождается подгруппой B и множеством всех инволюций, то Z_1 содержится в Z. Таким образом, $Z_1 = Z$ и $\overline{Z}_1 = \overline{1}$. Лемма доказана.

Преположим, что $G = \langle B, w \rangle$, где w — инволюция из $G \setminus B$, и $Z(G) = 1$.

Лемма 1.3. $G = \langle V, w \rangle$.

Доказательство. Обозначим $G_1 = \langle V, w \rangle, D = N_{G_1}(V)$. Из сильной вложенности подгруппы B в группе G вытекает равенство $B = N_G(V)$. Поэтому $D \leq B$, и для доказательства леммы достаточно установить обратное включение.

Покажем сначала, что подгруппа D сильно вложена в G_1. Действительно, так как $w \notin D$, то D — собственная подгруппа группы G_1 , а поскольку $V < D$, то в D есть инволюция. Предположим, что пересечение $D \cap D^g$, где $g \in G_1 \setminus D$, содержит инволюцию j. Тогда $j \in S$ (лемма 1.1) и $j = t^g$, где $t \in S$. Сопрягая подгруппу $C_G(t) = V$ элементом g, получим подгруппу $C_G(j) = V$, то есть $V^g = V$, $g \in N_{G_1}(V) = D$, что противоречит выбору элемента g. Итак, D — сильно вложенная в G_1 подгруппа.

Пусть теперь $x \in B$. В силу предложения 1.1 (1) $i^x = i^d$ для некоторого элемента $d \in D$. Следовательно, $xd^{-1} \in C_G(i) = V$, т.е. $x \in Vd \subset D$ и $B \leq D$. Как отмечалось выше, это доказывает лемму.

Лемма 1.4. *Если инволюция $v \in C_G(w)$, то $G = \langle B, w \rangle = \langle U, v \rangle$.*

Доказательство. Обозначим $\langle B, v \rangle = G_1$. Для доказательства равенства $G = G_1$ достаточно установить включение $w \in G_1$ и применить лемму 1.3. Очевидно, подгруппа B сильно вложена в G_1. Пусть $V_1 = C_{G_1}(v)$, $V_2 = C_G(v)$. В силу предложения 1.1 в G_1 найдется такой элемент x, что $v^x = i$. Тогда $V_1^x = C_{G_1}(i) = V = C_G(i) = V_2^x$. Отсюда $V_1 = V_2$ и $w \in G_1$. Итак, лемма верна.

Лемма 1.5. $V \cap V^w = 1$.

Доказательство. Очевидно, что подгруппа $Q = V \cap V^w$ является допустимой относительно инволюции w, а так как по предложению 1.1 (3) w не инвертирует неединичный элемент из абелевой подгруппы Q , то $Q < C_G(w)$. Отсюда и из леммы 1.3 выводим, что Q — подгруппа центра группы G. В силу нашего предположения $Q = 1$, и лемма доказана.

Лемма 1.6. $V \cap B^w = 1$.

Доказательство. Обозначим через M пересечение $B \cap B^w$, которое, очевидно, допустимо относительно инволюции w. Положим далее $L = V \cap B^w = V \cap M$. Так как $V \lhd B$, то $L \lhd M$ и $L^w \lhd M^w = M$. Ввиду коммутативности подгруппы V и леммы 1.4 выводим, что $\langle L, L^w \rangle = L \times L^w$ — абелева подгруппа и $L^w \cap V = 1$.

Предположим, что $L \neq 1$. Из строения группы $B = R \times T$ и определения группы Фробениуса выводим, что $L \leq R = Z(B)$. В силу периодичности подгруппы R найдется элемент $u \in L$ такой, что $|u| = p$ — простое число. Образуем прямое произведение $F = \langle u \rangle \times \langle u^w \rangle$. Поскольку $u^w \notin V$, то $j^{u^w} \neq j$ для любой инволюции $j \in S$. Этим же свойством обладает и элемент $x = uu^w$, действие которого сопряжениями на S совпадает с действием на S элемента u^w $(u \in C_G(S))$. Пусть $iw = y$. Тогда $|y| = 2k - 1$ по предложению 1.1 (2), и для инволюции $t = iy^k$ имеем $w^t = y^{-k}iiyiy^k = y^{1-k}iy^k = iy^{2k-1} = i$. Следовательно, $x^t = u_1 \in C_G(w^t) = C_G(i) = V$ и u_1 индуцирует регулярный автоморфизм на подгруппе S^t , содержащей элемент w. Поэтому, если $w^{u_1} = w_1$, то $u_1^w = u_1 u_1^{-1} w u_1 w = u_1 w_1 w = u_1 w_2$, где $w_2 = w_1 w$ — инволюция.

Покажем теперь, что $[u_1, F] = 1$. Так как $F = \langle u \rangle \times \langle x \rangle$, а элементы u, u_1 подгруппы V перестановочны, то достаточно установить, что $[u_1, x] = 1$. Действительно, предположим, что $u_1^x \notin \langle u_1 \rangle$. Поскольку $w^{u_1} = w_1$, $w^{x^{-1}u_1 x} = w^{u_1 x} = w_1^x = w_1$, то мы имеем $1 \neq u_1^x u_1^{-1} \in C_G(w) \cap V$. Но согласно лемме 1.4 элементы этого пересечения содержатся в центре группы G, который по нашему предположению тривиален. Полученное противоречие означает, что $u_1^x \in < u_1 >$. Учитывая, что $|x| = |u_1| = p$ – простое число, отсюда выводим, что $u_1^x = u_1$, то есть $[u_1, x] = 1$. Итак, $[u_1, F] = 1$.

Далее, т.к. $F^w = F$, то $[u_1^w, F] = 1$. По доказанннному выше $u_1^w = u_1 w_2$, где w_2 — инволюция из $C_G(w)$. Но тогда, в частности, $[w_2, u] = 1$ и в силу леммы 1.4 $[w, u] = 1$. Противоречие. Итак, $L = 1$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Продолжаем пока считать, что $G = \langle B, w \rangle$, w — инволюция из $G \backslash B$ и группа G имеет тривиальный центр.

Лемма 2.1. *Подгруппа $V = B \cap B^w$ абелева и инвертируется инволюцией w.*

Доказательство. Пусть $x \in M$. Согласно предложению 1.1 (3) смежный класс Vx содержит единственный строго вещественный относительно инволюции w элемент $h = yx$, где $y \in V$. Очевидно, что $h \in M$, а значит, $y \in M \cap V = 1$ (лемма 1.5). Итак, $h = x$, т.е. w инвертирует каждый элемент из подгруппы M. Очевидно, что тогда M — абелева подгруппа. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *$A = S \leftthreetimes M$ — локально конечная группа Фробениуса с локально циклическим неинвариантным множителем M, действующим транзитивно на множестве всех инволюций из S.*

Доказательство. Заметим прежде всего , что подгруппа M периодическая. Это легко вытекает из леммы 2.1 и конечности инволюции w (условие теоремы, предложение 1.1 (1)). Теперь из коммутативности подгрупп S и M следует, что A — локально конечная группа. Если $s^x = s$ для $1 \neq s \in S$, $x \in M$, то x централизует некоторую инволюцию из S , а поэтому $x \in V$. Теперь по лемме 1.6 $x = 1$. Таким образом, A — группа Фробениуса с ядром S и дополнительным множителем M. Поэтому подгруппа M локально циклическая. Далее, на основании леммы 1.5 и предложения 1.1 (3) $B = V \leftthreetimes M$. Ввиду предложения 1.1 (1) и коммутативности V отсюда непосредственно вытекает транзитивность действия M на множестве инволюций из V, которые содержатся в S. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть k - инволюция из $G \setminus B$. Тогда $B \cap B^k = Z \times M_1$, где $Z < V$, $[k, Z] = 1$ и k инвертирует M_1.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle B, k\rangle$. Очевидно, что B сильно вложена в G_1. Аналогично рассуждениям при доказательстве леммы 1.4 устанавливаем равенство $G_1 = \langle V, k\rangle$. Обозначим через Z центр группы G_1. Очевидно, $Z < R$. Для фактор-группы $\overline{G_1} = G_1/Z = \langle V/Z, kZ\rangle$ выполняется лемма 1.2. В частности, $\overline{G_1}$ имеет тривиальный центр. Поэтому для $\overline{G_1}$ справедливы леммы 1.5, 2.1, 2.2 и если $\overline{B} = B/Z, \overline{k} = kZ$, то $\overline{B} \cap \overline{B^k} = \overline{D}$ — локально циклическая $2'$–группа, инвертируемая инволюцией $\overline{k}$. Пусть теперь D — полный прообраз $\overline{D}$ в группе G_1. Поскольку D является расширением центра Z с помощью локально циклической группы $\overline{D}$, то подгруппа D абелева. Очевидно, что подгруппа D допустима относительно инволюции k, а потому $D = Z_1 \times M_1$, $Z_1 = C_D(k)$, $M_1 = \{t|t \in D, t^k = t^{-1}\}$. Ясно, что $Z \leq Z_1$, а если существует элемент $x \in Z_1 \setminus Z$, то $\overline{k}$ одновременно инвертирует и централизует неединичный элемент $\overline{x} = xZ$ нечетного порядка, что невозможно. Значит, $Z_1 = Z$ и лемма доказана.

Лемма 2.4. $R = 1$.

Доказательство. Пусть, напротив, $1 \neq r \in R$. Обозначим через h любой неединичный элемент подгруппы M. Так как $R = Z(B)$, то r и h перестановочны, а поскольку $h^w = h^{-1}$, то перестановочны и элементы $g = r^w$ и h. В силу леммы 1.5 $r \notin M = B \cap B^w$. Поэтому $g = r^w \notin B$ и по предложению 1.1 (2) $g = uk$, где $u \in V$, k — инволюция из $G \setminus B$. Далее, на основании леммы 2.3 имеем $A = B \cap B^g = B \cap B^k = Z \times M_1$, где $Z < V, [k, Z] = 1$ и k инвертирует M_1. Очевидно, $h \in A$ и поэтому $h = zh_1$, $z \in Z$, $h_1 \in M_1$. Следовательно, $zh_1 = h = h^g = (zh_1)^{uk} = zh_1^{uk}$, $h_1^u = h_1^k = h^{-1}$. Отсюда $[u, h_1^{-1}] = u^{-1}h_1 uh^{-1} = h^{-2} \in M_1 \cap V$. Но инволюция k инвертирует элементы из пересечения $M_1 \cap V$. Поэтому в силу предложения 1.1 (3) $M_1 \cap V = 1$ и $h_1 = 1$ (подгруппа A не содержит инволюций). Таким образом, $h = z \in Z < V$, что протиречит лемме 1.5. Значит, $R = 1$, и лемма доказана.

Пусть теперь G — произвольная группа, которая удовлетворяет условию теоремы.

Лемма 2.5. *G - периодическая группа.*

Доказательство. Пусть g — любой элемент из разности $G \setminus B$. По предложению 1.1 (2) $g = uw$, где $u \in V$, а w — инволюция из $G \setminus B$. Поэтому $G_1 = \langle B, g\rangle = \langle B, w\rangle$. Факторизуя G_1 по $Z = Z(G_1) \leq R$, мы на основании лемм 1.2, 2.4 заключаем, что $Z = R$. В силу основного результата из [4] (см. комментарии к теореме) $G_1 \setminus R$ изоморфна группе $L_2(Q)$, где Q - локально конечное поле характеристики 2. В частности, G_1 — периодическая группа. Значит, любой элемент B и $G \setminus B$ имеет конечный порядок. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *$G = R \times L_2(P)$, где P — локально конечное поле характеристики 2.*

Доказательство. Согласно лемме 2.5 группа G периодическая. Поскольку в G централизатор каждой инволюции абелев (в группе G все инволюции сопряжены, $C_G(i) = V = R \times U$ — абелева подгруппа), то лемма вытекает из описания периодических групп с абелевыми централизаторами инволюций [3].

Лемма 2.6 завершает доказательство теоремы.

Список литературы

[1] Мазуров В.Д. *О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций*//Алгебра и логика.-2000.-т.39.-№1.-С.74-86.

[2] Созутов А.И. *О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой*// Алгебра и логика.-2000.-т.39.-№5.-С.602-617.

[3] Сучков Н.М. *О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций*//Математический сборник.-2002.-№2.-С.153-160.

[4] Сучков Н.М., Тарасов С.А. *О группах с заданной сильно вложенной подгруппой*//Вестник КрасГУ. Физико - математические науки.-2005.-Вып.4-С.169-172.

Тарасов С.А.
Красноярский государственный аграрный университет,
пр. Мира 90,
630090, Красноярск, Россия
E-mail address: tt@torins.ru