S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 312–334 (2006) УДК 510.64
MSC 03B53

О КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ РАСШИРЕНИЙ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

М.В. СТУКАЧЕВА

Abstract. We introduce a canonical formulas for the extensions of minimal logic.

В данной работе исследуются расширения минимальной логики (**Lj**). Известно [1,2], что класс **JHN** всех нетривиальных расширений минимальной логики разбивается на три попарно непересекающихся подкласса **INT** (всех промежуточных логик, то есть расширений интуиционистской логики **Li**), **NEG** (всех негативных логик, то есть расширений негативной логики **Ln**) и **PAR** (всех собственно паранепротиворечивых расширений **Lj**). При этом всякой логике $L \in \mathbf{JHN}$ сопоставляются ее наименьшее расширение L_{int} из класса промежуточных логик и наименьшее расширение L_{neg} из класса негативных логик, причем L_{int} и L_{neg} всегда существуют. Более того, в [2] было установлено, что для любых $L_1 \in \mathbf{INT}$ и $L_2 \in \mathbf{NEG}$ класс

$$Spec(L_1, L_2)=\{L \in \mathbf{JHN} | L_{int} = L_1,\ L_{ned} = L_2\}$$

образует интервал в решетке **JHN**, при этом интервалы вида $Spec$ всегда не пусты, попарно не пересекаются для разных логик L_1, L_2 и

$$\mathbf{JHN}=\bigcup Spec(L_1, L_2).$$

Тот факт, что существует решеточный гомоморфизм решетки **PAR** на прямое произведение **INT** и **NEG** [1,2], мотивирует попытку исследования связей между логиками указанных классов. Однако, всякий интервал вида $Spec(L_1, L_2)$

Stukacheva M.V., On canonical formulas for the extensions of minimal logic.

© 2006 Стукачева М.В.

Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4413.2006.1).

Поступила 25 июня 2006 г., опубликована 25 августа 2006 г.

бесконечен [1], поэтому нередко расположение логики $L \in \mathbf{JHN}$ внутри соответствующего интервала определяется весьма сложными условиями, что затрудняет исследование свойств логики L известными семантическими методами.

В связи с этим, иногда имеет смысл исследовать контрмодели логики и с их помощью характеризовать логику в терминах алгебр или шкал Крипке. Так, хорошо известен метод Янкова, в котором по конечной подпрямонеразложимой гейтинговой алгебре $\mathbf{A}$ строится формула $J(\mathbf{A})$ такая, что
если $L = \mathbf{Li} + \mathbf{J}(\mathbf{A})$, то произвольная гейтингова алгебра $\mathbf{B}$ является моделью логики L, если и только если $\mathbf{A}$ не вложима в гомоморфный образ алгебры $\mathbf{B}$.

Техника канонических формул, предложенная Захарьящевым в [3] для случая расширений модальной логики $\mathbf{S.4}$, позволяет по всякой конечно аксиоматизируемой логике указанного класса построить семейство контрмоделей особого вида и охарактеризовать данную логику с помощью канонических формул, сопоставляемых этим контрмоделям. В работе [4] устанавливается связь между каноническими аксиоматизациями произвольного расширения $\mathbf{S.4}$ и его интуиционистского фрагмента, что дает возможность перенести технику канонических формул на класс промежуточных логик. В связи с тем, что не существует общепринятой трансляции минимальной логики $\mathbf{Lj}$ в модальную $\mathbf{S.4}$, аналогичной известной трансляции интуиционистской логики в модальную, при исследовании логик класса $\mathbf{JHN}$ техника канонических формул, предложенная Захарьящевым, должна быть существенна изменена. В настоящей статье обобщается техника канонических формул, введенная М.Захарьящевым, для случая расширений минимальной логики $\mathbf{Lj}$. Кроме того, в данной работе приводится прямое доказательство аксиоматизируемости произвольного расширения интуиционистской логики $\mathbf{Li}$ относительно соответствующего класса канонических формул.

1. Предварительные замечания.

Мы рассматриваем пропозициональные логики в языке $\langle \wedge, \vee, \supset, \bot \rangle$, считая отрицание сокращением, $\neg\varphi = \varphi \supset \bot$, где $\bot$ – константа "абсурд". Как обычно, логика – это множество формул, замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens. Минимальная логика (или логика Иоганссона) $\mathbf{Lj}$ определяется следующим набором аксиом:

(1) $p \supset (q \supset p)$
(2) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
(3) $(p \wedge q) \supset p$
(4) $(p \wedge q) \supset q$
(5) $(p \supset q) \supset ((p \supset r) \supset (p \supset (q \wedge r)))$
(6) $p \supset (p \vee q)$
(7) $q \supset (p \vee q)$
(8) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$

Заметим, что интуиционистская логика $\mathbf{Li}$ аксиоматизируется относительно $\mathbf{Lj}$ аксиомой $\{\bot \supset p\}$.

Исчерпывающую информацию об алгебраической семантике и семантике Крипке расширений минимальной логики можно найти в следующих монографиях и статьях [1, 2, 4, 5, 6]. Ниже приводятся лишь некоторые необходимые определения и факты.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра в сигнатуре $< \wedge, \vee, \supset, \bot, 1 >$. Будем называть $\mathbf{A}$-*оценкой* произвольное отображение $V : \{p_0, p_1, ...\} \to A$ из множества пропозициональных переменных в основное множество алгебры $\mathbf{A}$. Каждая $\mathbf{A}$-оценка естественным образом распространяется на множество всех пропозициональных формул. Формула φ *истинна* в $\mathbf{A}$ (является тождеством алгебры $\mathbf{A}$), символически $\mathbf{A} \models \varphi$, если $V(\varphi) = 1$ для любой $\mathbf{A}$-оценки V.

j-алгебрами называются импликативные решетки, рассматриваемые в сигнатуре $\langle \wedge, \vee, \supset, \bot, 1\rangle$, где $\bot$ интерпретируется как произвольный элемент решетки. Многообразию j-алгебр соответствует минимальная логика $\mathbf{Lj}$ ([1, 5]).

Далее обратимся к некоторым фактам, касающимся семантики Крипке для расширений минимальной логики [6].

Будем называть *j-шкалой Крипке* (или просто j-шкалой)
тройку $\mu = \langle W, R, Q\rangle$, где W – множество возможных миров, R – отношение достижимости такое, что $\langle W, R\rangle$ – обычная шкала Крипке для интуиционисткой логики, т.е. частично упорядоченное множество, $Q \subseteq W$ – конус относительно R, называемый *конусом ненормальных миров*(подмножество $X \subseteq W$ называется *конусом* относительно отношения R, если из того, что $x \in X$ и xRy следует $y \in X$; в дальнейшем множество всех конусов шкалы μ относительно отношения R будем обозначать как $Up(W)$). Миры, не входящие в Q, называются *нормальными.* Шкала называется *острой*, если она имеет наименьший элемент. Элемент y_0 шкалы $\langle W, R, Q\rangle$ будем называть *непосредственным последователем* элемента x_0, если для всякого элемента $z \in W$ такого, что $z \neq x_0$, x_0Rz и zRy_0, выполняется $z = y_0$. Для каждого подмножества $U \subseteq W$ положим:

$$U \uparrow W \rightleftharpoons \{x \in W \mid (\exists y \in U)(yRx)\},$$
$$U \downarrow W \rightleftharpoons \{x \in W \mid (\exists y \in U)(xRy)\}.$$

(В дальнейшем, в случаях, не вызывающих двусмысленности, вместо
$U \uparrow W$ и $U \downarrow W$ мы будем писать $U \uparrow$ и $U \downarrow$.) Кроме того, для всяких $U \subseteq W$, $V \subseteq W$ положим:

$$U \supset V {=} \{x \in W \mid \forall y \in W (xRy \text{ и } y \in U \Longrightarrow y \in W)\}.$$

Как обычно, *означивание* V j-шкалы μ – это отображение из множества пропозициональных переменных в множество конусов $Up(W)$. *Модель* $\mathcal{M} = \langle \mu, V\rangle$ – это пара, состоящая из шкалы и ее означивания.

Выполнимость константы $\bot$ на произвольной модели $\mathcal{M} = \langle \mu, V\rangle$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{M} \models_x \bot \Leftrightarrow x \in Q.$$

В остальном, отношение *выполнимости* формул на модели $\mathcal{M}$ определяется аналогично выполнимости на обычных моделях Крипке для интуиционистской логики.

Как обычно, говорим, что формула φ *истинна на модели* $\mathcal{M}{=}\langle \mu, V\rangle$, $\mathcal{M} \models \varphi$, если $\forall x \in W$ выполняется $\mathcal{M} \models_x \varphi$. Формула φ *истинна на j-шкале* μ, $\mu \models \varphi$, если она истинна на модели $\langle \mu, V\rangle$ для произвольного означивания V j-шкалы μ. Говорим, что j-шкала μ является моделью для логики $L \in \mathbf{JHN}$, $\mu \models L$, если $\mu \models \varphi$ для всех $\varphi \in L$.

Как было указано ранее, алгебраическими моделями минимальной логики $\mathbf{Lj}$ являются j-алгебры. Модели произвольной логики $L \in \mathbf{JHN}$ образуют подмногообразие многообразия j-алгебр [1].

Модельной структурой будем называть систему $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$, где

- $\mu = \langle W, R, Q\rangle$— j-шкала;
- S— некоторая система подмножеств W такая, что $S \subseteq Up(W)$, $\emptyset \in S$, $Q \in S$, $W \in S$ и S замкнуто относительно $\cap$, $\cup$ и операции $\supset$, определенной выше.

Легко видеть, что алгебра $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}}=\langle S, \cap, \cup, \supset, Q, W\rangle$ является j-алгеброй. Известная Теорема Стоуна о представлении дистрибутивных решеток (теорема I.9.3 из[7]) дает возможность утверждать, что всякая j-алгебра $\mathbf{A}$ изоморфно вложима в алгебру $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}_\mathbf{A}}=\langle S, \wedge, \vee, \to, \emptyset, Q, W\rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}_\mathbf{A}=\langle W, \subseteq, Q, S\rangle$, устроенной следующим образом:
$W=Fp(\mathbf{A}')$— множество всех простых фильтров j-алгебры $\mathbf{A}'$, где
$\mathbf{A}'$— j-алгебра с наименьшим элементом, полученная добавлением к $\mathbf{A}$ нулевого элемента $0 \notin \mathbf{A}$ и доопределения для элемента 0 всех операций известным способом (см. [7]); $\subseteq$— отношение включения,
$S=\{X_a \mid a \in \mathbf{A}'\}$, где $X_a=\{F \in Fp(\mathbf{A}') \mid a \in F\}$, $W=X_1$, $Q=X_\perp$, $\emptyset=X_0$.

Таким образом, алгебра $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}}=\langle S, \cap, \cup, \supset, Q, W\rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$ является j-алгеброй, а каждая j-алгебра изоморфно вложима в алгебру $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}}$ подходящей модельной структуры $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$— произвольная модельная структура.
Модель на модельной структуре $\mathfrak{M}$ определим как $\mathcal{M}=\langle \mathfrak{M}, V\rangle$, где
$V : Prop \longrightarrow S$. Заметим, что означивание V может рассматриваться и как $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}}$–оценка. Определим отношение $\models$ индуктивно следующим образом:

1. $\mathcal{M} \models_a p_i \Longleftrightarrow a \in V(p_i)$,

2. $\mathcal{M} \models_a \varphi \wedge \psi \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models_a \varphi$ и $\mathcal{M} \models_a \psi$,

3. $\mathcal{M} \models_a \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models_a \varphi$ или $\mathcal{M} \models_a \psi$,

4. $\mathcal{M} \models_a \varphi \supset \psi \Longleftrightarrow \forall x \in W(aRx$ и $x \models \varphi \Rightarrow x \models \psi)$,

5. $\mathcal{M} \models_a \perp \Longleftrightarrow a \in Q$.

Очевидно, что модель можно рассматривать и как пару $\langle \mathfrak{M}, \models\rangle$, где отношение $\models$ между элементами W и формулами удовлетворяет условиям 2-5 и

$1'$. $\{a \mid a \models p\} \in S$.

В приведенном ниже Алгоритме выделения нам будет удобнее рассматривать модель как пару $\langle \mathfrak{M}, \models\rangle$.

Следует отметить, что истинностное значение формулы φ на элементах модели $\mathcal{M}$ зависит только от истинностных значений ее подформул. Поэтому доказывая тот факт, что формула φ не является общезначимой на модельной структуре $\mathfrak{M}$, мы в некоторый случаях будем определять отношение истинности на множестве $Sub(\varphi) \cup \{\perp\}$ и показывать, что для всех формул ψ из $Sub(\varphi) \cup \{\perp\}$ построенное отношение удовлетворяет семантическим правилам (как это делается, например, в [3]).

Стандартно определяем отношения $\mathcal{M} \models \varphi$ и $\mathfrak{M} \models \varphi$. Логика $L \in \mathbf{JHN}$ *характеризуется (или определяется)* классом модельных структур $\mathcal{K}$, если

$$L = \{\varphi \mid \forall \mathfrak{M} \in \mathcal{K}\ (\mathfrak{M} \models \varphi)\}.$$

Заметим, что модели вида $\mathcal{M}=\langle \mu, Up(W), \models\rangle$— обычные j-модели Крипке.

В соответствии с тем, что всякая непротиворечивая логика $L \in \mathbf{JHN}$ полна относительно класса своих алгебраических моделей, мы можем утверждать, что L полна и относительно класса своих реляционных моделей.

Ниже приведем ряд простых фактов необходимых нам в дальнейшем, доказательства которых полностью аналогичны случаю расширений интуиционистской логики **Li** (см. [3,4]).

Пусть $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$— модельная структура, $H \subseteq W$, $W_1=H\uparrow$ и $R_1=R \restriction W_1$, $Q_1=Q \cap W_1$. Модельную структуру $\mathfrak{M}_1=\langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$, где $S_1=\{G_1 \subseteq W_1 | \exists G \in S (G_1 = G \cap W_1)\}$, назовем *подструктурой* $\mathfrak{M}$, *порожденной множеством* H. Подструктура структуры $\mathfrak{M}$ называется *порожденной*, если она порождена некоторым множеством.

Используя аналог теоремы IV.8.2 из [7], заметим, что отображение $h(G) = G \cap W_1$, определенное для произвольного множества $G \in S$ есть гомоморфизм из $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}}$ на $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}_1}$. Отсюда вытекает известная

Теорема о порождении. Пусть $\mathcal{M}=\langle W, R, Q, S, \models\rangle$— модель, построенная на модельной структуре $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$, а $\mathcal{M}_1=\langle W_1, R_1, Q_1, S_1, \models^1\rangle$— модель, построенная на ее подструктуре $\mathfrak{M}_1$, причем $\models^1=\models\restriction W_1$. Тогда для любой формулы φ и $\forall a \in W_1$ выполняется

$$\mathcal{M} \models_a \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{M}_1 \models^1_a \varphi.$$

Следствие 1.1. *Если* $\mathfrak{M}_1$— *порожденная подструкутура* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M}_1 \not\models^1 \varphi$, *то* $\mathfrak{M} \not\models \varphi$.

Следствие 1.2. *Каждая логика* $L \in \mathbf{JHN}$ *характеризуется такими своими реляционными моделями, в которых шкалы имеют наименьший элемент.*

p-Морфизмом из модельной структуры $\mathfrak{M}_1=\langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$ на модельную структуру $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$ называется всякое отображение f из W_1 на W, удовлетворяющее условиям:

(1) $(\forall a, b \in W_1)(aR_1b \Longrightarrow f(a)Rf(b))$;
(2) $(\forall x, y \in W)(xRy \Longrightarrow (\forall a \in f^{-1}(x))(\exists b \in f^{-1}(y))(aR_1b)$;
(3) $(\forall G \in S)(f^{-1}(G) \in S_1)$;
(4) $f^{-1}(Q) = Q_1$;

В дальнейшем нам будет удобно использовать условие

$$5.\ (\forall a \in W)(W_1 \setminus (f^{-1}(a)\downarrow) \in S_1),$$

которое является более строгим по отношению к условию 3. в случаях, когда шкала $\langle W, R, Q\rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}$ конечна.

Лемма 1.1. *Пусть шкала* $\langle W, R, Q\rangle$ *конечна, отображение* f *из* W_1 *на* W *удовлетворяет условиям 1, 2, 4, 5 и* $G \in S$. *Тогда*

$$f^{-1}(G)=\bigcap_{x\in W\setminus G} W_1\setminus(f^{-1}(x)\downarrow).$$

Доказательство. Пусть $a \in \bigcap_{x\in W\setminus G} W_1\setminus(f^{-1}(x)\downarrow)$, тогда $\forall x \in W\setminus G$ выполняется $a \in W_1\setminus(f^{-1}(x)\downarrow)$. Следовательно $\forall x \in W\setminus G$ имеем $a \in W_1$ и $f(a) \neq x$. Это означает, что $f(a) \notin W\setminus G$, а значит $f(a) \in G$, то есть $a \in f^{-1}(G)$.

Пусть $a \in f^{-1}(G)$, тогда $f(a) \neq x$ для всякого $x \in W \backslash G$, значит $a \notin f^{-1}(x)$ для любого $x \in W \backslash G$. Кроме того, $a \notin f^{-1}(x) \downarrow$, так как иначе, если существует элемент $b \in f^{-1}(x)$ такой, что aR_1b, получаем $f(a)Rf(b)$. Тогда, учитывая, что $f(a) \in G$ и $G = G \uparrow$, имеем $f(b) \in G$, а значит $x \in G$ для $x \in W \backslash G$, противоречие. Таким образом, $a \notin f^{-1}(x) \downarrow$ для любого $x \in W \backslash G$, то есть $a \in \bigcap_{x \in W \backslash G} W_1 \backslash (f^{-1}(x) \downarrow)$. ■

Если f— это p-морфизм из модельной структуры $\mathfrak{M}_1$ на модельную структуру $\mathfrak{M}$, то отображение

$$h(G) \rightleftharpoons f^{-1}(G),\, G \in S$$

является изоморфизмом алгебры $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}}$ в алгебру $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}_1}$. Отсюда вытекает известная

Теорема о p-морфизме. Пусть $\mathcal{M}_1 = \langle W_1, R_1, Q_1, S_1, V_1 \rangle$ и $\mathcal{M} = \langle W, R, Q, S, V \rangle$– две реляционные модели, а f— p-морфизм из модельной структуры $\mathfrak{M}_1$=$\langle W_1, R_1, Q_1, S_1 \rangle$ на модельную структуру $\mathfrak{M}$=$\langle W, R, Q, S \rangle$. Если для всякой переменной p_i, входящей в формулу φ, $V_1(p_i)$=$f^{-1}(V(p_i))$, то

$$\mathcal{M}_1 \models^1_a \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models_{f(a)} \varphi.$$

Следствие 1.3. *Если f —p-морфизм из $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}$, то для любой формулы φ*

$$\mathfrak{M}_1 \models \varphi \Longrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi.$$

p-Морфизмом из шкалы $\langle W_1, R_1, Q_1 \rangle$ на шкалу $\langle W, R, Q \rangle$ будем называть p-морфизм из модельной структуры $\langle W_1, R_1, Q_1, Up(W_1) \rangle$ на структуру $\langle W, R, Q, Up(W) \rangle$.

Лемма 1.2. *Если шкала μ=$\langle W, R, Q \rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}$=$\langle \mu, S \rangle$ конечна и $S = Up(W)$, то условие (3) в определении p-морфизма из модельной структуры $\mathfrak{M}_1$ на модельную структуру $\mathfrak{M}$ эквивалентно условию (5).*

Доказательство. Тот факт, что условие (5) влечет условие (3) был показан ранее в лемме 2.1. Обратная импликация вытекает из следующей цепочки равенств:
$f^{-1}(x) \downarrow$=$f^{-1}(x \downarrow)$, $W_1 \backslash (f^{-1}(x) \downarrow)$=$W_1 \backslash f^{-1}(x \downarrow)$,
$W_1 \backslash f^{-1}(x \downarrow)$=$f^{-1}(W \backslash (x \downarrow))$, и того факта, что $W \backslash (x \downarrow)$=$(W \backslash (x \downarrow)) \uparrow$. ■

Данная лемма мотивирует следующее определение.

Пусть $\mathfrak{M}_1$=$\langle W_1, R_1, Q_1, S_1 \rangle$— модельная структура, μ=$\langle W, R, Q \rangle$— конечная j-шкала модельной структуры $\mathfrak{M}$=$\langle \mu, Up(W) \rangle$.
Частичным p-морфизмом из $\mathfrak{M}_1$ на μ будем называть всякое частичное отображение f из W_1 на W, удовлетворяющее условиям:

1′. $(\forall a, b \in f^{-1}(W))(aR_1b \Longrightarrow f(a)Rf(b))$;

2. $(\forall x, y \in W)(xRy \Longrightarrow (\forall a \in f^{-1}(x))(\exists b \in f^{-1}(y))(aR_1b))$;

5. $(\forall x \in W)(W_1 \backslash f^{-1}(x) \downarrow \in S_1)$;

6. $f^{-1}(Q) \subseteq Q_1$.

2. Алгоритм выделения.

Пусть $\mathcal{M}=\langle W,R,Q,S,\models\rangle$— некоторая модель, построенная на модельной структуре $\mathfrak{M}=\langle W,R,Q,S\rangle$. Зафиксируем формулу φ_0.

Каждый элемент $a\in W$ задает разбиение множества $Sub(\varphi_0)\cup\{\perp\}$ на два подмножества:

$$\prod\nolimits_a^1 \rightleftharpoons \{\psi\in Sub(\varphi_0)\cup\{\perp\}\mid a\models\psi\};$$

$$\prod\nolimits_a^0 \rightleftharpoons \{\psi\in Sub(\varphi_0)\cup\{\perp\}\mid a\not\models\psi\}.$$

Обозначим $\prod_a=(\prod_a^1,\prod_a^0)$.

Произвольное разбиение $\prod=(\prod^1,\prod^0)$ множества $Sub(\varphi_0)\cup\{\perp\}$ назовем *регулярным разбиением*, если

- $\varphi_1\wedge\varphi_2\in\prod^1\iff\varphi_1\in\prod^1$ и $\varphi_2\in\prod^1$,
- $\varphi_1\vee\varphi_2\in\prod^1\iff\varphi_1\in\prod^1$ или $\varphi_2\in\prod^1$,
- $\varphi_1\supset\varphi_2\in\prod^1\Longrightarrow(\varphi_1\in\prod^1\Longrightarrow\varphi_2\in\prod^1)$.

Обозначим через $\mathcal{R}_{\varphi_0}$ множество всех регулярных разбиений множества $Sub(\varphi_0)\cup\{\perp\}$.

Пусть U– произвольное непустое подмножество W.

Множество $U\subseteq W$ называется *цикличным множеством*, если для всяких элементов $a,b\in U$ выполняется $\prod_a=\prod_b$.

Замечание. Легко видеть, что если U есть цикличное множество, $V\subseteq U$ и $V\neq\emptyset$, то $(V\uparrow)\cap U$—цикличное множество.

Следствие. Если U— цикличное множество, то $U\subseteq Q$ или $U\subseteq W\backslash Q$.

Пусть $\mathcal{M}=\langle\mathfrak{M},\models\rangle$– контрмодель формулы φ_0. Применим к $\mathcal{M}$ следующий **алгоритм выделения**, аналогичный предложенному в [3] для моделей модальных логик. На каждом шаге данного алгоритма мы будем отбрасывать некоторые элементы и строить множество $U^n\subseteq W$, состоящее из цикличных классов специального вида.

Шаг 0. Пусть $W^0\rightleftharpoons W$, $R^0\rightleftharpoons R$, $Q^0\rightleftharpoons Q$, $U^0\rightleftharpoons\emptyset$.

Шаг n ($\mathbf{n\geq 1}$).

- Если $V^{n-1}\rightleftharpoons W^{n-1}\setminus U^{n-1}=\emptyset$, то алгоритм завершает работу и $W^*\rightleftharpoons W^{n-1}$, $R^*\rightleftharpoons R^{n-1}$, $Q^*\rightleftharpoons Q^{n-1}$.
- Если $V^{n-1}\neq\emptyset$, то пусть $G_1^n,...,G_{l_n}^n$— все различные максимальные классы элементов множества V^{n-1}, удовлетворяющее условиям:

  (∗) $G_i^n=G_i^n\uparrow V^{n-1}$;

  (∗∗) классы G_i^n цикличны и не пусты;

  (∗∗∗) если $m<n$ и $G_i^n\cap(G_j^m\downarrow W^{n-1})\neq\emptyset$, то $G_i^n\subseteq G_j^m\downarrow W^{n-1}$.

Далее, $U^n \rightleftharpoons U^{n-1} \cup G_1^n \cup ... \cup G_{l_n}^n$. Шкала W^n получается из W^{n-1} отбрасыванием всех тех элементов $b \notin U^n$, для которых найдутся такие $a \in U^n$, что $\prod_b = \prod_a$ и $bR^{n-1}a$. Отношение $R^n \rightleftharpoons R^{n-1} \upharpoonright W^n$, множество $Q^n \rightleftharpoons Q \cap W^n$.

Предложение 2.1. *На каждом шаге $n > 0$ (кроме последнего) существует конечное число классов $G_1^n, ..., G_{l_n}^n$, причем для всякого $c \in V^{n-1}$ найдется номер i такой, что $c \in G_i^n \downarrow W^{n-1}$.*

Доказательство. Индукция по номеру шага n.
Пусть $K_n \rightleftharpoons \{G_i^m \mid m < n, 1 \leq i \leq l_m\}$, $n > 1$ и $K_1 \rightleftharpoons \emptyset$. По каждым двум параметрам $\prod \in \mathcal{R}_{\varphi_0}$ и $E_0 \subseteq K_n$ определим класс $G(\prod, E_0)$ всех таких элементов $a \in V^{n-1}$, для которых

(1) множество $g_a \rightleftharpoons (a \uparrow W^{n-1}) \setminus U^{n-1}$ циклично относительно разбиения $\prod$ и
(2) какой бы элемент $b \in g_a$ мы ни взяли, $b \in G_i^m \downarrow W^{n-1}$ ($m < n$, $1 \leq i \leq l_m$) тогда и только тогда, когда $G_i^m \in E_0$.

Покажем, что все не пустые классы $G(\prod, E_0)$ суть нужные нам классы $G_1^n, ..., G_{l_n}^n$.

Пусть $G = G(\prod, E_0)$. Проверим, что G удовлетворяет условиям, перечисленным в алгоритме выше:

(1). Понятно, что $G \subseteq (G \uparrow W^{n-1}) \setminus U^{n-1}$, так как G содержит элементы из множества $V^{n-1} = W^{n-1} \setminus U^{n-1}$. Обратно, пусть
$x_0 \in (G \uparrow W^{n-1}) \setminus U^{n-1}$. Тогда существует элемент $y \in G$ такой, что $yR^{n-1}x_0$. Покажем, что $x_0 \in G$. Понятно, что множество $g_y = (y \uparrow W^{n-1}) \setminus U^{n-1}$ циклично относительно разбиения $\prod$. Кроме того, $g_{x_0} = x_0 \uparrow \cap g_y$. Так как $x_0 \uparrow \subseteq g_y$, то $g_{x_0} = (x_0 \uparrow W^{n-1}) \setminus U^{n-1}$ цикличное множество относительно разбиения $\prod$. С другой стороны, $\forall z \in g_{x_0}$ имеем $z \in g_y$, следовательно

$$z \in G_i^m \downarrow W^{n-1} \ (m < n, 1 \leq i \leq l_m) \Longleftrightarrow G_i^m \in E_0.$$

Таким образом, $x_0 \in G$ и мы показали, что $G = (G \uparrow W^{n-1}) \setminus U^{n-1}$.

Тот факт, что G— цикличный класс относительно разбиения $\prod$, очевиден по построению G.

Далее, пусть $m < n$ и $G \cap (G_i^m \downarrow W^{n-1}) \neq \emptyset$, тогда существует элемент $x_0 \in G$ такой, что $x_0 \in G_i^m \downarrow W^{n-1}$ и $x_0 \in g_{x_0}$. А значит по условию построения G получаем, что $G_i^m \in E_0$; следовательно для всякого элемента $x \in g_{x_0}$ получаем, что $x \in G_i^m$. С другой стороны, в классе G лежат все такие $x \in V^{n-1}$, что если $G_i^m \in E_0$, то для любого элемента $y \in g_x$ имеем $y \in G_i^m \downarrow W^{n-1}$. Так как $G_i^m \in E_0$ и для всякого элемента $a \in G$ имеем $a \in g_a$, то $G \subseteq G_i^m \downarrow W^{n-1}$. Таким образом, класс G удовлетворяет третьему условию описанного нами алгоритма выделения.

Покажем, что не все классы $G(\prod, E_0)$ пусты. Для $a \in V^{n-1}$ положим

$$E_0^a \rightleftharpoons \{G_j^m \mid m < n, a \in G_j^m \downarrow W^{n-1}\}.$$

Пусть $a_1 \in V^{n-1}$. Если $a_1 \in G(\prod_{a_1}, E_0^{a_1})$, то $G(\prod_{a_1}, E_0^{a_1}) \neq \emptyset$. В противном случае, существует элемент $a_2 \in g_{a_1}$ такой, что либо

(1) $\prod_{a_1} \neq \prod_{a_2}$, то есть множество g_{a_1} не циклично;

либо

(2) $G_i^m \in E_0^1$ и $a_2 \notin G_i^m \downarrow W^{n-1}$ (так как $a_2 \in g_{a_1}$, то из $G_j^t \in E_0^{a_2}$ следует $G_j^t \in E_0^{a_1}$), поэтому $E_0^{a_2} \subset E_0^{a_1}$.

Рассуждая аналогично применительно к a_2 и далее, получаем в силу конечности множеств $\mathcal{R}_{\varphi_0}$ и K_n, что обязательно найдется элемент a_k такой, что $G(\prod_{a_k}, E_0^{a_k}) \neq \emptyset$ и $a_1 \in G(\prod_{a_k}, E_0^{a_k}) \downarrow W^{n-1}$. ■

Следствие 2.1. *Алгоритм выделения завершает работу не более чем через* $|\mathcal{R}_{\varphi_0}|$ *шагов.*

Доказательство. Пусть противное, существует $n > |\mathcal{R}_{\varphi_0}|$ такой, что $a_n R^n a_{n-1} R^n ... R^n a_1$, где $a_i \in G_{j_i}^i$, $i = 1, ..., n$. Но это невозможно, так как a_i соответствуют различные разбиения $\prod_{a_i}$. ■

Алгоритм, приведенный выше, выделяет из шкалы $\mu{=}\langle W, R, Q\rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}{=}\langle \mu, S\rangle$ шкалу $\mu^*{=}\langle W^*, R^*, Q^*\rangle$. Заметим, что множество Q^* шкалы μ^* есть конус относительно R^*. Рассмотрим модельную структуру $\mathfrak{M}^*{=}\langle W^*, R^*, Q^*, Up(W^*)\rangle$ и определим модель $\mathcal{M}^*{=}\langle \mathfrak{M}^*, \models^*\rangle$, в которой $\models^* \rightleftharpoons \models \upharpoonright W^*$.

Проверим, что отношение $\models^*$ удовлетворяет семантическим правилам. Пусть $x \in W^*$, тогда

- $x \not\models^* \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longrightarrow x \not\models \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longrightarrow \exists y \in W(xRy$ и $y \models \varphi_1$ и $y \not\models \varphi_2 \Longrightarrow$ (так как $\exists y' \in W^*(yRy'$ и $\prod_y = \prod_{y'}) \Longrightarrow \exists y' \in W^*(xRy'$ и $y' \models \varphi_1$ и $y' \not\models \varphi_2) \Longrightarrow \exists y' \in W^*(xR^*y'$ и $y' \models^* \varphi_1$ и $y' \not\models^* \varphi_2$;
  Обратно, пусть $x \models^* \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longrightarrow x \models \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longrightarrow \forall y \in W(xRy$ и $y \models \varphi_1$ влечет $y \models \varphi_2 \Longrightarrow \forall y \in W^*(xR^*y$ и $y \models^* \varphi_1$влечет $y \models^* \varphi_2)$.
- $x \not\models^* \perp \Longrightarrow x \not\models \perp \Longrightarrow x \notin Q \Longrightarrow x \notin Q^*$ (по определению Q^*);
  Обратно, пусть $x \notin Q^*$, тогда так как $Q^*{=}Q \cap W^*$ имеем, что $x \notin Q$, следовательно $x \not\models \perp \Longrightarrow \exists y \in W^*$ $(xRy$ и $\prod_x{=}\prod_y) \Longrightarrow (y \not\models \perp$ и $xR^*y)$ $\Longrightarrow x \not\models^* \perp$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Модель $\mathcal{M}^*$ является контрмоделью φ_0, так как существует $x \in W^*$ такой, что $x \not\models^* \varphi_0$. Действительно, так как $\mathcal{M} \not\models \varphi_0$, то существует элемент $y \in W$ такой, что $y \not\models \varphi_0$. Следовательно существует элемент $x \in W^*$, что yR^*x и $\prod_x = \prod_y$, а значит существует элемент $x \in W^*$ такой, что $x \not\models^* \varphi_0$. ■

Классы G_i^m, построенные при работе алгоритма выделения, задают разбиение множества W^*. Указанное разбиение индуцирует на W^* отношение эквивалентности $\equiv$:

$$x \equiv y, \text{ если и только если } x \in G_i^m \text{ и } y \in G_i^m.$$

Пусть $W^+ \rightleftharpoons W^*/\equiv$, $a^+ \rightleftharpoons a/\equiv$, $a^+R^+b^+ \Leftrightarrow a^+ \subseteq b^+ \downarrow W^*$, $Q^+ \rightleftharpoons Q^*/\equiv$, $a^+ \models^+ \varphi \Leftrightarrow a \models^* \varphi$ для произвольной формулы φ из множества $Sub(\varphi_0) \cup \{\perp\}$.

Непосредственно из определения Q^+ легко видеть, что Q^+ есть конус относительно R^+.

Предложение 2.2. $\mathcal{M}{=}\langle W^+, R^+, Q^+, Up(W^+), \models^+\rangle$ *— контрмодель формулы* φ_0.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\models^+$ удовлетворяет семантическим правилам, то есть $\mathcal{M}^+$ есть модель на модельной структуре $\mathfrak{M}^+$.

Пусть f_+— каноническое отображение множества W^* на W^+. Покажем, что f_+— это p-морфизм из W^* на W^+.

Пусть $a, b \in W^*$, aR^*b и $a \in G_i^m$, $b \in G_j^n$. Тогда возможны следующие случаи: либо $m > n$, либо $m = n$ и $i = j$. Действительно, предположим, что $m < n$. Тогда $b \in V^{m-1}$ и следовательно, по определению G_i^m, так как aR^*b и G_i^m=$(G_i^m \uparrow W^{m-1})\backslash U^{m-1}$ имеем $b \in G_i^m$. Но это невозможно, так как алгоритм выделения образует попарно не пересекающиеся классы. Из тех же соображений получаем, что $i = j$ в случае $n = m$.

Итак, в обоих случаях получаем, что $G_i^m \cap G_j^n \downarrow W^* \neq \emptyset$, а значит $G_i^m \subseteq G_j^n \downarrow W^*$. Тогда, так как $\forall c \in G_j^n$ имеем $c \equiv b$, то $c \in b^+$, а это означает, что $G_j^n \subseteq b^+ \downarrow W^*$. Следовательно $a^+ \subseteq b^+ \downarrow W^*$ и значит $a^+R^+b^+$.

Далее, пусть $a^+R^+b^+$, тогда $a^+ \subseteq b^+ \downarrow W^*$, тогда для любого $c \in f_+^{-1}(a^+)$ существует $d \in f_+^{-1}(b^+)$ такой, что cR^*d, а это означает, что отображение f_+ удовлетворяет второму условию определения p-морфизма. Также, очевидно, имеет место условие

$$(\forall a^+ \in W^+)(W^*\backslash(f_+^{-1}(a^+) \downarrow) \in Up(W^*)),$$

так как $W^*\backslash(f_+^{-1}(a^+) \downarrow) = (W^*\backslash(f_+^{-1}(a^+) \downarrow)) \uparrow$.

Пусть a — произвольный элемент из Q^*, тогда по определению Q^+ имеем, что $a^+ \in Q^+$. Верно и обратное, если a^+ — произвольный элемент из Q^+, то $f_+^{-1}(a^+) \subseteq Q^*$. Таким образом, получаем, что $f_+^{-1}(Q^+) = Q^*$.

По теореме о p-морфизме $\mathcal{M}^+$ является контрмоделью формулы φ_0. ■

Понятно, что число элементов шкалы $\langle W^+, R^+, Q^+\rangle$ не превосходит константы N, зависящей только от формулы φ_0.

Отображение $f_+(a) = a^+$, где $a \in W^*$, $a^+ \in W^+$ можно рассматривать как частичное отображение из W на W^+. Мы покажем, что f^+ есть частичный p-морфизм из модельной структуры $\mathfrak{M} = \langle W, R, Q, S\rangle$ на шкалу $\langle W^+, R^+, Q^+\rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}^+ = \langle W^+, R^+, Q^+, Up(W^+)\rangle$. Для этого достаточно проверить выполнение условия

$$(\forall x \in W^+)(W\backslash(f_+^{-1}(x) \downarrow) \in S),$$

то есть $W\backslash(G_i^m \downarrow) \in S$ при всех допустимых значениях параметров m и i.

Введем следующие обозначения:

$\Delta_n \rightleftharpoons \{G_i^n \mid 1 \leq i \leq l_n\}$;

$\alpha(G_i^n) \rightleftharpoons \{G_j^k \mid k < n$ и $G_i^n \subseteq G_j^k \downarrow\}$;

$\overline{\alpha}(G_i^n) \rightleftharpoons \{G_j^k \mid k < n$ и $G_i^n \cap G_j^k \downarrow = \emptyset\}$;

$\Pi(G) \rightleftharpoons \{\prod_a \mid a \in G\}$;

$\beta(G) \rightleftharpoons \Pi(W) \setminus \Pi(G \uparrow)$;

$\prod_{G_i^m}$— разбиение, задаваемое элементами из класса G_i^m;

$G/\prod \rightleftharpoons \{a \in G \mid \prod_a = \prod\}$.

Важно отметить, что $G_i^m = G_i^m / \prod_{G_i^m}$.

Лемма 2.1. *$W \setminus (W/\prod\downarrow) \in S$.*

Доказательство. Данный факт, очевидно, имеет место в силу того, что

$$W \setminus (W/\prod\downarrow) = \{a \in W \mid a \models \bigwedge\prod^1 \supset \bigvee\prod^0\} \in S,$$

где $\bigwedge\prod^1$ есть конъюнкция всех формул из $\prod^1$, а $\bigvee\prod^0$ есть дизъюнкция всех формул из $\prod^0$. ■

Предложение 2.3. *Имеет место $W \setminus (G_i^m\downarrow) \in S$.*

Доказательство проведем индукцией по номеру шага m. Пусть $\prod = \prod_{G_i^m}$. Определим на множестве Δ_m отношение частичного порядка $\leq_m$:

$$G_1 \leq_m G_2 \iff$$
$$\alpha(G_1) \subset \alpha(G_2), \text{ либо } \alpha(G_1) = \alpha(G_2) \text{ и } \Pi(G_1) = \Pi(G_2).$$

Важно отметить, что $\Pi(G_1){=}\prod_{G_1}$, $\Pi(G_2){=}\prod_{G_2}$ и

$$G_1{=}_m G_2 \iff \alpha(G_1){=}\alpha(G_2) \text{ и } \Pi(G_1){=}\Pi(G_2).$$

Определение отношения $\leq_m$ и последнее замечание дают возможность утверждать, что это отношение является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

Пусть данное предложение справедливо для всех классов $G <_m G_i^m$. Рассмотрим множество

$$H \rightleftharpoons (W \setminus \textstyle\bigcup_{G<_m G_i^m}(G\downarrow)) \cap (\bigcap_{G\in\alpha(G_i^m)}(G\downarrow)) \cap$$

$$\cap\, (W \setminus \textstyle\bigcup_{G\in\overline{\alpha}(G_i^m)}(G\downarrow)) \cap (W \setminus \bigcup_{\prod'\in\beta(G_i^m)}((W/\prod')\downarrow)) \cap (W/\prod).$$

Очевидно, что $G_i^m \subseteq H$. Покажем, что $H = G_i^m$.

Пусть $x \in H$. Рассмотрим все возможные случаи расположения x относительно классов из Δ_m:

(1) $x \in V^{m-1}$;
(2) $x \in U^{m-1}$, то есть расположен в каком-то классе G_j^k, $k < m$;
(3) $x \in W \setminus W^{m-1}$, то есть данный элемент был отброшен на одном из предыдущих шагов.

Если $x \in U^{m-1}$, то $x \in G_0$ для некоторого $G_0 \subseteq U^{m-1}$. С другой стороны $x \in H$, поэтому $x \in W \setminus \bigcup_{G\in\overline{\alpha}(G_i^m)}(G\downarrow)$. Тогда $x \in G_0 \in \alpha(G_i^m)$. Так как $\prod_x{=}\prod$, то $\prod_{G_0}{=}\prod$. Однако, в силу алгоритма выделения, мы на одном из предыдущих шагов должны были отбросить из W все такие элементы $b \notin U^{m-1}$, что существует $a \in U^{m-1}$, $\prod_b{=}\prod_a$ и bRa, то есть должны были отбросить все элементы из G_i^m.

Если $x \in W \setminus W^{m-1}$, то существует класс $G \in \alpha(G_i^m)$, в котором существует элемент a такой, что $\prod_x{=}\prod_a$ и xRa. Тогда $\prod_a{=}\prod{=}\prod_G$. А это означает, что мы должны были отбросить все элементы из G_i^m на каком-то предыдущем шаге.

Таким образом, $x \in V^{m-1}$. По предложению 2.1 существует класс $G_0 \in \Delta_m$ такой, что $x \in G_0\downarrow$. Так как $x \in H$, то $x \in W \setminus \bigcup_{G<_m G_i^m}(G\downarrow)$, поэтому $G_0 \not<_m G_i^m$.

Предположим, что $G_0 \not\leq_m G_i^m$. Тогда либо $\alpha(G_0) \not\subseteq \alpha(G_i^m)$, либо $\alpha(G_0) = \alpha(G_i^m)$ и $\prod_{G_0} \neq \prod$. Если $\alpha(G_0) \not\subseteq \alpha(G_i^m)$, то существует класс $G_j^k \in \alpha(G_0)$ такой, что $G_j^k \notin \alpha(G_i^m)$, следовательно $G_j^k \in \overline{\alpha}(G_i^m)$, а значит так как $x \in G_0 \downarrow$ и $G_0 \subseteq G_j^k \downarrow$ получаем, что $x \in G_j^k \downarrow$ для некоторого $G_j^k \in \overline{\alpha}(G_i^m)$. Однако это противоречит тому, что $x \in H$.

Пусть $\alpha(G_0) = \alpha(G_i^m)$ и $\prod_{G_0} \neq \prod$. Если $\prod_{G_0} \in \Pi(G_i^m \uparrow)$, то следуя алгоритму, мы должны были отбросить все элементы из G_i^m на более раннем шаге. Поэтому $\prod_{G_0} \notin \Pi(G_i^m \uparrow)$, а значит $\prod_{G_0} \in \beta(G_i^m)$ и
$x \in (W/\prod_{G_0}) \downarrow$. Но это противоречит условию, так как $x \in H$.

Таким образом, $G_0 \leq_m G_i^m$ и, учитывая, что $G_0 \not<_m G_i^m$, получаем $G_0 = G_i^m$. Поэтому $x \in G_i^m \downarrow$. Покажем, что $x \in G_i^m$.

Рассмотрим множество $h = G_i^m \cup ((x \uparrow W^{m-1}) \setminus U^{m-1})$. Очевидно, что

- $G_i^m \cup ((x \uparrow W^{m-1}) \setminus U^{m-1})=$
  $=((G_i^m \cup ((x \uparrow W^{m-1}) \setminus U^{m-1})) \uparrow W^{m-1}) \setminus U^{m-1}$;
- если $k < m$ и $h \cap (G_j^k \downarrow W^{m-1}) \neq \emptyset$, то $h \subseteq G_j^k \downarrow W^{m-1}$;
- $\forall b \in (x \uparrow W^{m-1}) \setminus U^{m-1}$ имеем $\prod_b = \prod$
  (так как $\forall b \in (x \uparrow W^{m-1}) \setminus U^{m-1}$ и $\forall G \in \Delta_m$ выполняется:
  $b \in G \downarrow \Longleftrightarrow G = G_i^m$).

Таким образом, множество h циклично относительно $\prod$, а так как множество G_i^m— максимальное с указанными условиями, то $h = G_i^m$.

Итак, мы показали, что $H = G_i^m$. Тогда

$$W \setminus (G_i^m \downarrow)= (W \setminus (W \setminus \bigcup_{G <_m G_i^m}(G \downarrow) \downarrow)\cup (W \setminus \bigcap_{G\in\alpha(G_i^m)}(G \downarrow))\cup$$

$$\cup(W \setminus (W \setminus \bigcup_{G\in\overline{\alpha}(G_i^m)}(G \downarrow)) \downarrow) \cup (W \setminus ((W/\prod) \downarrow))\cup$$

$$\cup(W \setminus (W \setminus \bigcup_{\prod' \in\beta(G_i^m)}((W/\prod') \downarrow)) \downarrow).$$

Далее заметим, что для любого $U \subseteq W$ выполняется:

$$U \supset \emptyset = W \setminus (U \downarrow),$$

в частности

$$W \setminus (W \setminus U \downarrow) \downarrow = (W \setminus U \downarrow) \supset \emptyset.$$

Согласно индукционным предположениям получаем, что
$W \setminus (G_i^m \downarrow) \in S$. ■

Итак, по всякой контрмодели $\mathcal{M}=\langle W, R, Q, S, \models\rangle$ формулы $\varphi_0 \notin \mathbf{Lj}$ можно построить конечную контрмодель
$\mathcal{M}^+=\langle W^+, R^+, Q^+, Up(W^+), \models^+\rangle$ формулы φ_0 со следующими свойствами:

(I). $|W^+| \leq N$;

(II). отображение $f_+ : W \longrightarrow W^+$ есть частичный p-морфизм из модельной структуры $\mathfrak{M} = \langle W, R, Q, S\rangle$ на шкалу $\mu^+ = \langle W^+, R^+, Q^+\rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}^+ = \langle W^+, R^+, Q^+, Up(W^+)\rangle$;

(III). $(\forall a \in f_+^{-1}(W^+)\uparrow)(\exists b \in f_+^{-1}(W^+))(aRb$ и $\prod_a = \prod_b)$;

(IV). $(\forall a \in f_+^{-1}(W^+))(\prod_a = \prod_{f_+(a)})$.

Пусть Σ_{φ_0} – множество всех контрмоделей $\langle W, R, Q, Up(W), \models\rangle$ формулы φ_0, у которых шкала имеет наименьший элемент и $|W| \leq N$.

Если $\mathcal{M} = \langle W, R, Q, S, \models\rangle$ – произвольная контрмодель φ_0, то в модели $\mathcal{M}^+ = \langle W^+, R^+, Q^+, Up(W^+), \models^+\rangle$ шкала μ^+ не обязана обладать наименьшим элементом. Выберем тогда элемент $x_0 \in W^+$ такой, что $x_0 \not\models^+ \varphi_0$ и построим на порожденной элементом x_0 подструктуре $\mathfrak{M}_1 = \langle W_1, R_1, Q_1, Up(W_1)\rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}^+ = \langle W^+, R^+, Q^+, Up(W^+)\rangle$ модель $\mathcal{M}_1 = \langle \mathfrak{M}_1, \models_1\rangle$, где $\forall \varphi \in Sub(\varphi_0) \cup \{\perp\}$ выполняется

$$(\forall x \in W_1)(x \models_1 \varphi \Longleftrightarrow x \models^+ \varphi),$$

$\mathcal{M}_1$— контрмодель для φ_0, шкала которой имеет наименьший элемент x_0 и $| W_1 |\leq N$.

Пусть f_1 – сужение f_+ на $f_+^{-1}(W_1)$, а именно

$$f_1(a) = \begin{cases} f_+(a), \text{если} f_+(a) \in W_1; \\ \text{не определено, в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что f_1 – частичный p-морфизм из $\mathfrak{M} = \langle W, R, Q, S\rangle$ на $\langle W_1, R_1, Q_1\rangle$, а по определению отображения f_1 выполняется

$$(\forall a \in f_1^{-1}(W_1))(\textstyle\prod_a = \prod_{f_1(a)}).$$

Кроме того выполняется условие

$$(\forall a \in f_1^{-1}(W_1)\uparrow)(\exists b \in f_1^{-1}(W_1))(aR_1b \text{ и } \textstyle\prod_a = \prod_b).$$

Действительно, если $c \in f_1^{-1}(W_1)$ и cRa, то по свойству (III) существует элемент $b \in f_+^{-1}(W^+)$ такой, что aRb и $\prod_a = \prod_b$. Тогда $f_+(c)R^+f_+(b)$, следовательно $f_+(b) \in W_1$.

Таким образом, не ограничивая общности, мы можем считать, что по всякой контрмодели $\mathcal{M} = \langle W, R, Q, S, \models\rangle$ формулы φ_0 можно построить контрмодель $\mathcal{M}^+ \in \Sigma_{\varphi_0}$, удовлетворяющую свойствам (I)–(IV).

3. Опровержимость на модельной структуре.

Далее рассмотрим **обратную задачу**: по контрмоделям из множества $\sum_{\varphi_0}$ восстановить произвольные контрмодели φ_0.

Пусть $\mathcal{M} = \langle W, R, Q, S, \models\rangle$ – некоторая контрмодель формулы φ_0.

Набор $\overline{a} = \{a_1, ..., a_n\}$ элементов шкалы $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ называем *открытым набором модели* $\mathcal{M}$, если $n = 0$ или существует такое разбиение $\prod \in \mathcal{R}_{\varphi_0}$, что

$$\varphi \in \textstyle\prod^1 \Longleftrightarrow \varphi \in \bigcap_{i=1}^n \prod_{a_i}^1$$

для любой формулы φ из множества $Sub(\varphi_0) \cup \{\perp\}$.

В случае, когда такого разбиения нет, набор $\overline{a}$ называем *закрытым.*

Замечание. Пусть $\overline{a}$ – некоторый набор элементов шкалы $\mu = \langle W, R, Q\rangle$, а $\overline{b}$ – набор минимальных элементов набора $\overline{a}$ (относительно

порядка R). Так как $(\forall a \in \overline{a})(\exists b \in \overline{b})(bRa)$, имеем
$(\forall a \in \overline{a})(\exists b \in \overline{b})(b \models \varphi \Rightarrow a \models \varphi)$. Поэтому, легко видеть, что набор $\overline{a}$ открыт в $\mathcal{M}$ открыт тогда и только тогда, когда открыт набор $\overline{b}$.

Одноэлементный набор всегда открыт.

Далее рассмотрим $\mathcal{M} = \langle W, R, Q, S \models\rangle$ – некоторую контрмодель формулы φ_0, модель $\mathcal{M}^+ {=} \langle W^+, R^+, Q^+, Up(W^+), \models^+\rangle$ и частичный p–морфизм f_+, построенные ранее. Имеет место следующее

Предложение 3.1. *Пусть $a \in f_+^{-1}(W^+) \uparrow W$. Тогда*

(1) *набор $f(a\uparrow)$ открыт в $\mathcal{M}^+$;*
(2) *если $a \notin Q$, то $a \in f_+^{-1}(W^+ \setminus Q^+) \downarrow W$.*

Доказательство. Пусть $a \in f_+^{-1}(W^+) \uparrow W$, φ – произвольная формула из множества $Sub(\varphi_0) \cup \{\bot\}$. Рассмотрим регулярное разбиение $\prod_a$. Если $\varphi \in \prod_a^1$, то $\forall x \in a\uparrow$ имеем $\varphi \in \prod_x^1$. Так как $\forall b \in f_+^{-1}(W^+)$ $\prod_b {=} \prod_{f_+(b)}$, то $\forall y \in f_+(a\uparrow)$ получаем $\varphi \in \prod_y^1$, то есть

$$\varphi \in \textstyle\prod_a^1 \Longrightarrow \varphi \in \prod_y^1 \ \forall y \in f_+(a\uparrow).$$

Обратно, пусть $\varphi \notin \prod_a^1$, тогда по указанному ранее условию существует $b \in f_+^{-1}(W^+)$ такой, что aRb и $\prod_a = \prod_b$. Следовательно $f_+(b) \in f_+(a\uparrow)$ и $\varphi \notin \prod_{f_+(b)}^1$, а значит $\varphi \notin \bigcap_{x \in f_+(a\uparrow)} \prod_x^1$.

Доказательство второго утверждения легко следует из того, что
$\forall a \in f_+^{-1}(W^+\uparrow)(\exists b \in f_+^{-1}(W^+))(aRb$ и $\prod_a = \prod_b)$. ■

Модельную структуру $\mathfrak{M}_1 {=} \langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$ называем *допустимой для конечной контрмодели* $\mathcal{M} {=} \langle W, R, Q, Up(W), \models\rangle$ формулы φ_0, если существует частичный p-морфизм f из $\mathfrak{M}_1$ на $\langle W, R, Q\rangle$, удовлетворяющий следующим условиям

$(*)$. $\forall a \in f^{-1}(W)\uparrow$:

если набор $f(a\uparrow)$ не пуст, то набор $f(a\uparrow)$ открыт в $\mathcal{M}$;

$(**)$. $a \in f^{-1}(W)\uparrow \setminus Q_1 \Longrightarrow a \in f^{-1}(W \setminus Q)\downarrow$.

Теорема 3.1. *Формула φ_0 опровержима на модельной структуре $\mathfrak{M}_1$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_1$ допустима для некоторой контрмодели $\mathcal{M} \in \sum_{\varphi_0}$.*

Доказательство. Необходимость. Действительно, если $\mathfrak{M}_1 \not\models \varphi_0$, то строим с помощью алгоритма выделения шкалу μ_1^+, соответствующую модели $\mathcal{M}_1^+ \in \sum_{\varphi_0}$. Далее воспользуемся предложением 2.5 и свойствами $\mathcal{M}_1^+$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{M} {=} \langle W, R, Q, Up(W), \models\rangle$ – контрмодель φ_0 из множества $\sum_{\varphi_0}$, а $\mathfrak{M}_1 {=} \langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$ допустима для $\mathcal{M}$, то есть существует частичный p-морфизм $f : \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \langle W, R, Q\rangle$, удовлетворяющий условиям $(*)$ и $(**)$ предыдущего определения.

Рассмотрим подструктуру $\mathfrak{M}_2 {=} \langle W_2, R_2, Q_2, S_2\rangle$ модельной структуры $\mathfrak{M}_1$, порожденную множеством $f^{-1}(W)$. Покажем, что $\mathfrak{M}_2 \not\models \varphi_0$. Тогда по теореме о порождении получим, что $\mathfrak{M}_1 \not\models \varphi_0$.

Зададим на шкале $\langle W_2, R_2, Q_2\rangle$ отношение $\models_2$ для произвольной формулы φ из множества $Sub(\varphi_0)\cup\{\perp\}$ следующим образом:

- если $a \in f^{-1}(W)$, то пусть
$$a \models_2 \varphi \Longleftrightarrow f(a) \models \varphi;$$
- пусть $a \notin f^{-1}(W)$, тогда $a \in f^{-1}(W)\uparrow$, так как $\mathfrak{M}_2$ порождена $f^{-1}(W)$. Возможны следующие случаи:

  $\sharp$ набор $f(a\uparrow)$ пуст.
  В этом случае $a \in Q_1$, так как иначе $a \in f^{-1}(W)\uparrow \backslash Q_1$, а значит $a \in f^{-1}(W\backslash Q)\downarrow$ и набор $f(a\uparrow)$ не пуст, противоречие.
  Положим
  $$a \models_2 \varphi \text{ для всякой формулы } \varphi \in Sub(\varphi_0)\cup\{\perp\};$$
  $\sharp$ набор $f(a\uparrow)$ не пуст. Тогда по $(*)$ набор $f(a\uparrow)$ открыт.
  Пусть разбиение $\prod \in \mathcal{R}_{\varphi_0}$, причем $\varphi \in \prod^1 \Longleftrightarrow \varphi \in \bigcap_{i=1}^n \prod^1_{a_i}$, $a_i \in f(a\uparrow)$ для любой формулы $\varphi \in Sub(\varphi_0)\cup\{\perp\}$. В этом случае положим
  $$b \models_2 \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \prod\nolimits^1 \text{ для всех } b \notin f^{-1}(W) \text{ таких,что } f(b\uparrow){=}f(a\uparrow).$$
  Понятно, что в этом случае $b \models_2 \perp \Longleftrightarrow a \in Q_1$.

Далее мы покажем, что отношение $\models_2$ удовлетворяет семантическим правилам.

• Пусть $\underline{a \in f^{-1}(W)}$. Тогда

1. $a \models_2 \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longleftrightarrow \forall a'(aR_2a'$ и $a' \models_2 \varphi_1 \Longrightarrow a' \models_2 \varphi_2)$.

Действительно, так как $a \models_2 \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longleftrightarrow f(a) \models \varphi_1 \supset \varphi_2$ имеем: если $a \not\models_2 \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longrightarrow f(a) \not\models \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longrightarrow \exists x \in W(f(a)Rx, \models \varphi_1, x \not\models \varphi_2) \Longrightarrow$ (по определению частичного p-морфизма) $\exists b \in f^{-1}(x)(aR_2b, b \models \varphi_1, b \not\models \varphi_2)$. Обратно, пусть $a \models_2 \varphi_1 \supset \varphi_2$. Рассмотрим произвольный элемент b такой, что aR_2b:
a). если $b \in f^{-1}(W)$, то $(b \models_2 \varphi_1 \Longrightarrow b \models_2 \varphi_2)$; иначе $f(a) \not\models \varphi_1 \supset \varphi_2$;
b). если $b \notin f^{-1}(W)$ и $f(b\uparrow) = \emptyset$, то $(b \models_2 \varphi_1 \Longrightarrow b \models_2 \varphi_2)$ по определению отношения $\models_2$;
c). если $b \notin f^{-1}(W)$ и $f(b\uparrow) \neq \emptyset$, то $(b \models_2 \varphi_1 \Longrightarrow b \models_2 \varphi_2)$; иначе, если $b \models_2 \varphi_1$ и $b \not\models_2 \varphi_2$, то $\forall x_i \in f(b\uparrow)$ имеем $\varphi_1 \in \prod^1_{x_i}$ и $\exists x_j \in f(b\uparrow)$ такой, что $\varphi_2 \notin \prod^1_{x_j}$, а значит $x_j \not\models \varphi_1 \supset \varphi_2$, следовательно, $f(a) \not\models \varphi_1 \supset \varphi_2$.

2. $a \models_2 \perp \Longleftrightarrow a \in Q_2$.

Пусть $a \models_2 \perp$, тогда $f(a) \models \perp$. Следовательно $a \in Q_2$, так как $f^{-1}(Q) \subseteq Q_2$. Обратно, пусть $a \in Q_2$, тогда $f(a) \in Q$, а значит $f(a) \models \perp$ и $a \models_2 \perp$.

• Пусть $\underline{a \notin f^{-1}(W)}$. Тогда

1. $a \models_2 \varphi_1 \supset \varphi_2 \Longleftrightarrow \forall a'(aR_2a'$ и $a' \models_2 \varphi_1 \Longrightarrow a' \models_2 \varphi_2)$.

Пусть $a \models_2 \varphi_1 \supset \varphi_2$, следовательно $\varphi_1 \supset \varphi_2 \in \prod^1$, где $\prod \in \mathcal{R}_{\varphi_0}$ и $\varphi \in \prod^1 \Leftrightarrow \varphi \in \bigcap_{i=1}^n \prod^1_{a_i}$ для всякого $a_i \in f(a\uparrow)$ и произвольной формулы $\varphi \in$

$Sub(\varphi_0) \cup \{\bot\}$. В этом случае, получаем, что
$\varphi_1 \in \prod^1 \Longrightarrow \varphi_2 \in \prod^1$. Тогда для любого $a_i \in f(a\uparrow)$ имеем
$a_i \models \varphi_1 \Longrightarrow a_i \models \varphi_2$, то есть $f^{-1}(a_i \models_2 \varphi_1) \Longrightarrow f^{-1}(a_i) \models_2 \varphi_2$. С другой стороны, для любого элемента $a' \in a\uparrow$ такого, что
$f(a'\uparrow) = \emptyset$ выполняется $a' \models_2 \varphi$ для произвольной формулы
$\varphi \in Sub(\varphi_0) \cup \{\bot\}$. Таким образом, $\forall a'(aR_2a'$ и $a' \models_2 \varphi_1$ влечет $a' \models_2 \varphi_2)$.

Обратно, пусть $a \not\models_2 \varphi_1 \supset \varphi_2$, тогда $\varphi_1 \supset \varphi_2 \notin \prod^1$. Следовательно $\varphi_1 \supset \varphi_2 \notin \prod^1_{a_i}$ для некоторого $a_i \in f(a\uparrow)$. Тогда $f^{-1}(a_i) \not\models_2 \varphi_1 \supset \varphi_2$. По пункту 1. настоящего доказательства получаем, что существует элемент a' такой, что $f^{-1}(a_i)R_2a'$ и $a' \models_2 \varphi_1$ и $a' \not\models_2 \varphi_2$, а значит $\exists a'(aR_2a'$ и $a' \models_2 \varphi_1$ и $a' \not\models_2 \varphi_2)$.

Все остальные случаи рассматриваются аналогично.

Кроме того, существует $a \in W_2$ такой, что $a \nvDash_2 \varphi_0$. Действительно, так как $\mathcal{M} \nvDash \varphi_0$, то существует $x_0 \in W$ такой, что $x_0 \nvDash \varphi_0$. Пусть $a \in f^{-1}(x_0)$, тогда $a \in W_2$ и кроме того, $a \nvDash_2 \varphi_0$.

Далее покажем, что $\{a \in W_2 \mid a \models_2 p_i\} \in S_2$ для всякой атомарной формулы из $Sub(\varphi_0) \cup \{\bot\}$.

По определению имеем, что $S_2 = \{G_2 \subseteq W_2 \mid (\exists G \in S_1)(G_2 = G \cap W_2)\}$, следовательно $W_2 \in S_2$. Кроме того, $Q_2 = Q_1 \cap W_2$, а значит и $Q_2 \in S_2$.

Далее, пусть $\{x_1, ..., x_r\}$ – все те элементы из W, для которых $x_j \not\models p$, где p – некоторая атомарная формула из $Sub(\varphi_0) \cup \{\bot\}$, $1 \leq j \leq r$. Тогда $f^{-1}(x_j) \not\models_2 p$ и $\forall a \in f^{-1}(x_j)\downarrow$ имеем $a \not\models_2 p$.

Пусть $a \in f^{-1}(W)\uparrow$ и $a \not\models_2 p$. Тогда

- Если $f(a\uparrow) \neq \emptyset$, то по условию $(*)$ набор $f(a\uparrow)$ открыт. Значит существует регулярное разбиение $\prod$ такое, что
$$\varphi \in \prod^1 \Longleftrightarrow \varphi \in \bigcap_{x \in f(a\uparrow)} \prod^1_x.$$
По определению отношения $\models_2$ имеем
$$a \not\models_2 p \Longleftrightarrow \exists x \in f(a\uparrow) \text{ такой, что } p \notin \prod^1_x.$$
Значит $a \in f^{-1}(x_j)\downarrow$ для некоторого j.
- Если $f(a\uparrow) = \emptyset$, то по определению отношения $\models_2$ имеем $a \models_2 p$ для всякого $p \in Sub(\varphi_0) \cup \{\bot\}$.

Следовательно, если $a \not\models_2 p$, то $a \in \bigcup_{j=1}^r (f^{-1}(x_j)\downarrow)$.

Пусть далее, $a \in f^{-1}(W)\uparrow$ и $a \models_2 p$. Тогда

- Если $f(a\uparrow) \neq \emptyset$, то $f(a\uparrow)$ – открытый набор. Следовательно, $a \notin f^{-1}(x_j)\downarrow$ для всякого $1 \leq j \leq r$.
- Если $f(a\uparrow) = \emptyset$, то очевидно, что $a \notin f^{-1}(x_j)\downarrow$ для всякого j.

Таким образом, $\forall a \in W_2$ $a \models_2 p \Longleftrightarrow a \notin \bigcup_{j=1}^r (f^{-1}(x_j)\downarrow)$.

Так как

$$W_2 \backslash \bigcup_{j=1}^r (f^{-1}(x_j)\downarrow) = \bigcap_{j=1}^r (W_2 \backslash f^{-1}(x_j)\downarrow),$$

$$W_2 \backslash f^{-1}(x_j)\downarrow = (W_1 \backslash f^{-1}(x_j)\downarrow) \cap W_2,$$

а по определению частичного p-морфизма
$(\forall x \in W)(W_1\backslash(f^{-1}(x_j)) \downarrow \in S_1)$, имеем $W_2\backslash(f^{-1}(x_j) \downarrow) \in S_2$ для любого j. Следовательно, $\{a \in W_2 \mid a \models_2 p\} \in S_2$.

Теорема 2.1 доказана полностью. ■

4. Канонические формулы.

Далее рассмотрим конечную j-шкалу общего вида $\mu = \langle W, R, Q\rangle$, в которой $e_0, ..., e_n$ – все ее различные элементы, причем e_0 – наименьший, $e_0, ..., e_m \notin Q$, $0 \leq m \leq n$, $e_{m+1}, ..., e_n \in Q$.

Дизъюнктивной областью шкалы $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ (в дальнейшем *d-областью*) будем называть всякую пару $(\overline{x}, \overline{y}) = \delta$ не пустых наборов элементов из W, удовлетворяющих условиям:

(1) в каждом из наборов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ элементы попарно не сравнимы, $|\overline{x}| \geq 2$;
(2) $(\forall x \in \overline{x})(\forall y \in \overline{y})(\neg xRy)$;
(3) $(\forall z \in W)(z \in \bigcap_{x\in\overline{x}} x \downarrow \Longrightarrow z \in \bigcup_{y\in\overline{y}} y \downarrow)$.

Пусть $\mathcal{D}$ – некоторое (возможно пустое) множество дизъюнктивных областей шкалы $\langle W, R, Q\rangle$. Через $\mathcal{D}_1$ обозначим множество d-областей, в которых $\overline{y} \cap (W\backslash Q) \neq \emptyset$, а через $\mathcal{D}_2$ множество тех d-областей, в которых $\overline{y} \subseteq Q$. Очевидно, что $\mathcal{D}{=}\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Построим по $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ и $\mathcal{D}$ **формулу**

$$J(\mu, \mathcal{D}) \rightleftharpoons (\bigwedge_{e_iRe_j} A_{ij}) \wedge (\bigwedge_{\delta\in\mathcal{D}} B_\delta) \wedge C \supset p_0,$$

где

$$C = \bigwedge_{i=1}^{m} (\wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \bot) \supset \bot;$$

$$\Gamma_j = \{p_k \mid \neg e_jRe_k\};$$

и

- если $\delta = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_1$, то

$$B_\delta{=}\bigwedge_{e_i\in\overline{y}, e_i\notin Q}(\wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \bot) \wedge \bigwedge_{e_i\in\overline{y}, e_i\in Q}(\wedge\Gamma_i \wedge \bot \supset p_i) \supset \bigvee_{e_j\in\overline{x}} p_j,$$

  (при этом, если $\overline{y} \cap Q{=}\emptyset$, то второй конъюнктивный член отсутствует);
- если $\delta = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_2$, то

$$B_\delta{=}\bigwedge_{e_i\in\overline{y}}(\wedge\Gamma_i \wedge \bot \supset p_i) \supset \bigvee_{e_j\in\overline{x}} p_j;$$

а формула A_{ij} определяется следующим образом:

- если $e_i \notin Q$, $e_j \notin Q$, то $A_{ij}{\rightleftharpoons}(\wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \bot) \supset p_i$;
- если $e_i \notin Q$, $e_j \in Q$, то $A_{ij}{\rightleftharpoons}(\wedge\Gamma_j \wedge \bot \supset p_j) \supset p_i$;
- если $e_i \in Q$, $e_j \in Q$, то $A_{ij}{\rightleftharpoons}(\wedge\Gamma_j \supset p_j) \supset p_i$.

Построенная формула в случае $Q=\emptyset$ полностью совпадает с формулой, построенной в [4] для промежуточных логик.

В случае, когда j-шкала $\mu{=}\langle W,R,Q\rangle$ является ненормальной ($W=Q, e_0,...,e_n$ – все ее различные элементы, причем e_0 – наименьший), формула $J(\mu,\mathcal{D})$ принимает следующий вид:

$$J_{W=Q}(\mu,\mathcal{D}) \rightleftharpoons (\bigwedge_{e_iRe_j} A_{ij}) \wedge (\bigwedge_{\delta\in\mathcal{D}_2} B_\delta) \wedge \bot \supset p_0,$$

где

$$A_{ij}{\rightleftharpoons}(\wedge\Gamma_j \supset p_j) \supset p_i,$$

и если $\delta=(\overline{x},\overline{y})\in\mathcal{D}_2$, то

$$B_\delta{=}\bigwedge_{e_i\in\overline{y}}(\wedge\Gamma_i\wedge\bot\supset p_i)\supset\bigvee_{e_j\in\overline{x}}p_j.$$

Следует отметить, что все дальнейшие результаты получены для общего вида формулы $J(\mu,\mathcal{D})$, при этом в остальных случаях результаты и их доказательства полностью аналогичны.

Пусть $\mathfrak{M}_1{=}\langle W_1,R_1,Q_1,S_1\rangle$ – модельная структура, а $\mu{=}\langle W,R,Q\rangle$ – конечная j-шкала. Модельная структура $\mathfrak{M}_1$ называется *допустимой для формулы* $J(\mu,\mathcal{D})$, если существует частичный p-морфизм
$f\colon\mathfrak{M}_1\longrightarrow\langle W,R,Q\rangle$, удовлетворяющий условиям:

(A): если $(\overline{x},\overline{y})\in\mathcal{D}$ и $c\in f^{-1}(W)\uparrow$, то
$c\in\bigcap_{x\in\overline{x}}(f^{-1}(x)\downarrow)\Longrightarrow c\in\bigcup_{y\in\overline{y}}(f^{-1}(y)\downarrow)$;
(B): $c\in f^{-1}(W)\uparrow\backslash Q_1\Longrightarrow c\in f^{-1}(W\backslash Q)\downarrow$.

Теорема 4.1. $\mathfrak{M}_1\nvDash J(\mu,\mathcal{D})$ *тогда и только тогда, когда модельная структура* $\mathfrak{M}_1$ *допустима для формулы* $J(\mu,\mathcal{D})$.

Доказательство. Пусть f – частичный p-морфизм из $\mathfrak{M}_1$ на μ, удовлетворяющий условиям (A) и (B). Для каждого $a\in\mathfrak{M}_1$ положим:

$$a\models p_i\iff a\notin(f^{-1}(e_i)\downarrow),\ i=0,...,n.$$

Рассмотрим элемент $a_0\in f^{-1}(e_0)$ и покажем, что на a_0 истинны все конъюнктивные члены посылки формулы $J(\mu,\mathcal{D})$.

• Пусть $\delta{=}(\overline{x},\overline{y})\in\mathcal{D}_1$ и $a_0\nvDash B_\delta$. Тогда

$$a_0\nvDash\bigwedge_{e_i\in\overline{y},e_i\notin Q}(\wedge\Gamma_i\supset p_i\vee\bot)\wedge\bigwedge_{e_i\in\overline{y},e_i\in Q}(\wedge\Gamma_i\wedge\bot\supset p_i)\supset\bigvee_{e_j\in\overline{x}}p_j,$$

и существует элемент $b\in a_0\uparrow$ такой, что
$b\models\bigwedge_{e_i\in\overline{y},e_i\notin Q}(\wedge\Gamma_i\supset p_i\vee\bot)$, $b\models\bigwedge_{e_i\in\overline{y},e_i\in Q}(\wedge\Gamma_i\wedge\bot\supset p_i)$ и $b\nvDash\bigvee_{e_j\in\overline{x}}p_j$. Следовательно $b\nvDash p_j$ для всякого $e_j\in\overline{x}$, а значит имеем, что
$b\in\bigcap_{x\in\overline{x}}(f^{-1}(x)\downarrow)$. Тогда $b\in\bigcup_{y\in\overline{y}}(f^{-1}(y)\downarrow)$ и существует элемент $e_i\in\overline{y}$ такой, что $b\in f^{-1}(e_i)\downarrow$.
Пусть $c\in f^{-1}(e_i)$ и $b\in c\downarrow$. Тогда $c\nvDash p_i$, при этом, если $e_i\notin Q$, то $c\nvDash\bot$ и $c\models\wedge\Gamma_i\supset p_i\vee\bot$, а если $e_i\in Q$, то $c\models\bot$ и $c\models\wedge\Gamma_i\wedge\bot\supset p_i$. В каждом из этих случаев получаем, что $c\nvDash\wedge\Gamma_i$. Следовательно, существует $p_j\in\Gamma_i$ такой, что $c\nvDash p_j$. А это означает, что существует e_j такой, что $\neg e_iRe_j$ и $c\in f^{-1}(e_j)\downarrow$. По определению частичного p-морфизма: $c\in f^{-1}(e_i)$,
$c\in f^{-1}(e_j)\downarrow$ значит существует $a\in f^{-1}(e_j)$ такой, что cR_1a. Тогда $f(c)Rf(a)$, а значит e_iRe_j. Противоречие.

• Случай $\delta{=}(\overline{x},\overline{y}) \in \mathcal{D}_2$ и $a_0 \not\models B_\delta$ рассматривается аналогично.

• Пусть $a_0 \not\models \bigwedge_{e_i R e_j} A_{ij}$, тогда $a_0 \not\models A_{ij}$ для некоторых e_i и e_j, таких что $e_i R e_j$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1). $e_i \notin Q$, $e_j \notin Q$, $A_{ij} \rightleftharpoons (\wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \perp) \supset p_i$, $a_0 \not\models A_{ij}$.
Тогда существует элемент $b \in a_0 \uparrow$ такой, что $b \models \wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \perp$ и $b \not\models p_i$. Это означает, что $b \in f^{-1}(e_i) \downarrow$.

Пусть $c \in f^{-1}(e_i)$ и $b \in c \downarrow$. Тогда $c \not\models p_i$, $c \models \wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \perp$ и $c \not\models \perp$. Так как $e_i R e_j$ имеем $c \in f^{-1}(e_j) \downarrow$.

Пусть $d \in f^{-1}(e_j)$ и $c \in d \downarrow$. Тогда $d \models \wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \perp$, $d \not\models p_j$ и $d \not\models \perp$. Следовательно, $d \not\models \wedge\Gamma_j$. Тогда существует элемент e_t такой, что $\neg e_j R e_t$ и $d \in f^{-1}(e_t) \downarrow$.

Имеем $d \in f^{-1}(e_j)$ и $d \in f^{-1}(e_t) \downarrow$. Следовательно найдется элемент $a' \in f^{-1}(e_t)$ такой, что dR_1a'. В свою очередь $f(d)Rf(a')$, а значит $e_j R e_t$, противоречие.

2). $e_i \notin Q$, $e_j \in Q$, $A_{ij} \rightleftharpoons (\wedge\Gamma_j \wedge \perp \supset p_j) \supset p_i$.
Так как $a_0 \not\models A_{ij}$, то существует элемент $b \in a_{0\uparrow}$ такой, что
$b \models \wedge\Gamma_j \wedge \perp \supset p_j$ и $b \not\models p_i$. Тогда $b \in f^{-1}(e_i) \downarrow$.

Пусть $c \in f^{-1}(e_i)$ и $b \in c \downarrow$. Тогда $c \not\models \perp$ и $c \models \wedge\Gamma_j \wedge \perp \supset p_j$. Так как $e_i R e_j$, то $c \in f^{-1}(e_j) \downarrow$.

Пусть $d \in f^{-1}(e_j)$ и $c \in d \downarrow$. Тогда $d \models \perp$, $d \not\models p_j$ и $d \models \wedge\Gamma_j \wedge \perp \supset p_j$. Следовательно $d \not\models \wedge\Gamma_j$. Тогда существует элемент e_t такой, что $\neg(e_j R e_t)$ и такой, что $d \in f^{-1}(e_t) \downarrow$.

Имеем $d \in f^{-1}(e_j)$ и $d \in f^{-1}(e_t) \downarrow$. Следовательно найдется элемент $a' \in f^{-1}(e_t)$ такой, что dR_1a'. Но тогда $f(d)Rf(a')$, а значит $e_j R e_t$, противоречие.

3). Случай $e_i \in Q$, $e_j \in Q$ рассматривается аналогично.

Таким образом, мы показали, что $a_0 \models \bigwedge_{e_i R e_j} A_{ij}$.

• Далее, предположим, что $a_0 \not\models C$. Следовательно, существует элемент $b \in a_0 \uparrow$ такой, что $b \models \bigwedge_{i=1}^{m}(\wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \perp)$ и $b \not\models \perp$. Тогда $b \models \wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \perp$ для всякого i. Тот факт, что $b \notin Q_1$ и $b \in a_0 \uparrow$ дает возможность утверждать, что $b \in f^{-1}(W) \uparrow \setminus Q_1$. По условию (B) имеем $b \in f^{-1}(W \setminus Q) \downarrow$. Следовательно, существует элемент $e_j \in W \setminus Q$ такой, что $b \in f^{-1}(e_j) \downarrow$. Тогда $b \not\models p_j$.

Пусть $c \in f^{-1}(e_j)$ и $b \in c \downarrow$. Тогда $c \not\models p_j$ и $c \models \bigwedge_{i=1}^{m}(\wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \perp)$. Следовательно, $c \models \bigwedge\Gamma_j \supset p_j \vee \perp$. Так как $c \not\models p_j$, $c \not\models \perp$ имеем $c \not\models \wedge\Gamma_j$. Это означает, что существует элемент e_t такой, что $\neg e_j R e_t$ и $c \in f^{-1}(e_t) \downarrow$.

Так как $c \in f^{-1}(e_j)$, $c \in f^{-1}(e_t) \downarrow$, то по определению частичного p-морфизма существует $a' \in f^{-1}(e_t)$ такой, что cR_1a'. Следовательно $f(c)Rf(a')$, а значит $e_j R e_t$. Противоречие.

Все конъюнктивные члены посылки формулы $J(\mu, \mathcal{D})$ истинны на a_0. С другой стороны, $a_0 \not\models p_0$. Таким образом, $a_0 \not\models J(\mu, \mathcal{D})$.

Обратно, пусть $\langle \mathfrak{M}_1, \models \rangle$ – контрмодель формулы $J(\mu, \mathcal{D})$, построенная на модельной структуре $\mathfrak{M}_1$.

Для всякого элемента $a \in W_1$ положим

$$f(a) = \begin{cases} e_i \ (i = 0, ..., m), \ \text{если } a \not\models p_i, \ a \not\models \bot, \ a \models p_k \ \forall p_k \in \Gamma_i \\ \ \text{и } a \models \Upsilon, \ \text{где } \Upsilon - \text{посылка формулы } J(\mu, \mathcal{D}); \\ \\ e_i \ (i = m+1, ..., n), \ \text{если } a \not\models p_i, \ a \models \bot, \ a \models p_k \ \forall p_k \in \Gamma_i \\ \ \text{и } a \models \Upsilon, \ \text{где } \Upsilon - \text{посылка формулы } J(\mu, \mathcal{D}); \\ \\ \text{не определено, иначе.} \end{cases}$$

Отображение f определено однозначно, так как при $i \neq j$ имеем либо $p_i \in \Gamma_j$, либо $p_j \in \Gamma_i$. Покажем, что f – частичный p-морфизм из $\mathfrak{M}_1$ на $\langle W, R, Q \rangle$, удовлетворяющий условиям (**A**) и (**B**).

Отображение f есть отображение ″на″, так как

• существует элемент $a_0 \in W_1$ такой, что $a_0 \models \Upsilon$ и $a_0 \not\models p_0$. Следовательно $a_0 \models (\wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \bot) \supset p_0$ для всякого $j \in \{1, ..., m\}$, так как $e_0 \notin Q$ и для любого элемента e_i выполняется $e_0 R e_i$. Таким образом, $a_0 \not\models \wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \bot$ для всякого $j \in \{1, ..., m\}$. Поэтому $a_0 \not\models \bot$, $a_0 \models \Upsilon$, $a_0 \not\models p_0$ и $a_0 \models p \ \forall p \in \Gamma_0$ (так как $\Gamma_0 = \emptyset$). Таким образом, $f(a_0) = e_0$;

• из того, что $a_0 \models A_{0j}$ для любого $j \in \{1, ..., m\}$ следует, что для любого j из указанного интервала существует a_j такой, что $a_0 R_1 a_j$,
$a_j \models \wedge\Gamma_j$, $a_j \not\models p_j$ и $a_j \not\models \bot$. Таким образом, для всякого $j \in \{1, ..., m\}$ существует a_j такой, что $f(a_j) = e_j$;

• аналогично получаем, что для всякого $j \in \{m+1, ..., n\}$ существует такой элемент $a_j \in W_1$, что $f(a_j) = e_j$, так как $a_0 \models A_{0j}$ для всякого $j \in \{m+1, ..., n\}$.

Пусть $f(a)$=e_i и $e_i R e_j$.
Рассмотрим все возможные случаи.

1). $e_i \notin Q$, $e_j \notin Q$.

Тогда $a \not\models p_i$, $a \not\models \bot$, $a \models A_{ij}$, где $A_{ij} = (\wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \bot) \supset p_i$. Следовательно существует элемент $b \in a \uparrow$ такой, что $b \models \wedge\Gamma_j$ и $b \not\models p_j \vee \bot$. Значит $b \not\models p_j$, $b \not\models \bot$ и $b \models \Upsilon$. Следовательно $f(b) = e_j$;

2). $e_i \notin Q$, $e_j \in Q$.

Тогда $a \not\models p_i$, $a \not\models \bot$, $a \models A_{ij}$, где $A_{ij} = (\wedge\Gamma_j \wedge \bot \supset p_j) \supset p_i$. Следовательно найдется элемент $b \in a \uparrow$ такой, что $b \models \wedge\Gamma_j \wedge \bot$ и $b \not\models p_j$. Значит $b \models \wedge\Gamma_j$, $b \not\models p_j$, $b \models \bot$ и $b \models \Upsilon$. Следовательно $f(b) = e_j$;

3). $e_i \in Q$, $e_j \in Q$.

Тогда $a \not\models p_i$, $a \models \bot$, $a \models A_{ij}$, где $A_{ij} = (\wedge\Gamma_j \supset p_j) \supset p_i$. Следовательно найдется элемент $b \in a \uparrow$ такой, что $b \models \wedge\Gamma_j$ и $b \not\models p_j$, при этом $b \models \bot$ и $b \models \Upsilon$. Следовательно $f(b) = e_j$.

Далее, пусть $f(a)$=e_i, $f(b) = e_j$ и $a R_1 b$. Тогда $b \not\models p_j$, а значит и $a \not\models p_j$. Следовательно, $p_j \notin \Gamma_i$ так как $\forall p_k \in \Gamma_i$ имеем $a \models p_k$. А по определению множества Γ_i имеем $e_i R e_j$.

Таким образом, построенное отображение f удовлетворяет условиям $1'$ и 2 в определении частичного p-морфизма. Кроме того, для всякого $i \in \{0, ..., m\}$ имеем $f^{-1}(e_i) \downarrow = \{a \in W_1 \mid a \not\models \Upsilon \wedge (\wedge\Gamma_i) \supset p_i \vee \bot\}$, для всякого $i \in \{m+1, ..., n\}$ выполняется $f^{-1}(e_i) \downarrow = \{a \in W_1 \mid a \not\models \Upsilon \wedge (\wedge\Gamma_i) \wedge \bot \supset p_i\}$, а значит $W_1 \backslash (f^{-1}(e_i) \downarrow) \in S_1$ и f удовлетворяет условию 5 в определении частичного p-морфизма. Непосредственно из определения отображения f получаем, что f удовлетворяет условию 6 рассматриваемого определения.

Далее, пусть $a \in f^{-1}(W) \uparrow \backslash Q_1$. Тогда $a \not\models \bot$ и $a \models C$, где $C = \bigwedge_{i=1}^{m} (\wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \bot) \supset \bot$. Это означает, что $a \not\models \wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \bot$ для некоторого e_i, $1 \leq i \leq m$. Следовательно, существует элемент $b \in a \uparrow$ такой, что $b \models \wedge\Gamma_i$, $b \not\models p_i$ и $b \not\models \bot$. Кроме того, $b \models \Upsilon$. Таким образом, $f(b) = e_i \notin Q$, значит $a \in f^{-1}(e_i) \downarrow$, то есть $a \in f^{-1}(W \backslash Q) \downarrow$, и мы показали, что отображение f удовлетворяет условию (**B**).

Пусть $\delta = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_1$, $a \in f^{-1}(W) \uparrow$ и $a \in \bigcap_{x \in \overline{x}} (f^{-1}(x) \downarrow)$.

Тогда $a \models B_{\delta_1}$, $a \not\models p_j$ $\forall e_j \in \overline{x}$. Следовательно либо $a \not\models \wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \bot$ для некоторого $e_i \in \overline{y} \backslash Q$, либо $a \not\models \wedge\Gamma_i \wedge \bot \supset p_i$ для некоторого $e_i \in \overline{y} \cap Q$. Тогда найдется $b \in a \uparrow$, что либо $b \models \wedge\Gamma_i$ и $b \not\models p_i \vee \bot$, либо $b \models \wedge\Gamma_i \wedge \bot$ и $b \not\models p_i$. При этом в каждом из рассматриваемых случаев $b \models \Upsilon$. Это означает, что $f(b) = e_i$ и $a \in \bigcup_{y \in \overline{y}} (f^{-1}(y) \downarrow)$.

Пусть $\delta = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_2$, $a \in f^{-1}(W) \uparrow$ и $a \in \bigcap_{x \in \overline{x}} (f^{-1}(x) \downarrow)$.

Тогда $a \models B_{\delta_2}$, $a \not\models p_j$ $\forall e_j \in \overline{x}$. Тогда существует элемент $e_i \in \overline{y}$ такой, что $a \not\models \wedge\Gamma_i \wedge \bot \supset p_i$. Следовательно найдется $b \in a \uparrow$, что $b \models \wedge\Gamma_i \wedge \bot$ и $b \not\models p_i$, при этом $b \models \Upsilon$. Это означает, что $f(b) = e_i$ и $a \in \bigcup_{y \in \overline{y}} (f^{-1}(y) \downarrow)$.

Таким образом, мы показали, что отображение f удовлетворяет условию (**A**).

Теорема доказана полностью. ■

Теорема 4.2. *По каждой формуле φ можно построить канонические формулы $J(\mu_1, \mathcal{D}^1)$, ..., $J(\mu_n, \mathcal{D}^n)$ $(n \geq 0)$ такие, что*

$$\mathbf{Lj}{+}\varphi{=}\mathbf{Lj}{+}J(\mu_1, \mathcal{D}^1) + ... + J(\mu_n, \mathcal{D}^n).$$

Доказательство. Если $\varphi \in \mathbf{Lj}$, то $n = 0$.

Пусть $\varphi \notin Lj$. Тогда множество контрмоделей Σ_φ не пусто.

Рассмотрим некоторую контрмодель $\mathcal{M}{=}\langle W, R, Q, Up(W), \models\rangle$ из Σ_φ и пусть $\overline{x}$ – закрытый набор $\mathcal{M}$, состоящий из попарно несравнимых элементов; заметим, что если в $\overline{x}$ есть сравнимые элементы, то мы возьмем все минимальные элементы (относительно R) этого набора.

Понятно, что $|\overline{x}| \geq 2$. Кроме того, множество $\overline{z}$ всех элементов $z \in W$ таких, что $\overline{x} \cup \{z\}$ есть открытый набор $\mathcal{M}$, не пусто, поскольку в него входит наименьший элемент шкалы $\langle W, R, Q\rangle$. Пусть $\overline{y}$ – набор максимальных (относительно R) элементов $\overline{z}$. Элементы $\overline{y}$ попарно не сравнимы, кроме того, если xRy для некоторых $x \in \overline{x}$ и $y \in \overline{y}$, то $\overline{x}$ открыт. И если uRx для любого $x \in \overline{x}$, то uRy для некоторого $y \in \overline{y}$, так как в этом случае $u \in \overline{z}$.

Таким образом, мы получаем одну из d-областей $(\overline{x}, \overline{y})$ множества $\mathcal{D}$ – дизъюнктивных областей шкалы $\mu = \langle W, R, Q\rangle$, причем:

- если $\overline{y} \cap (W \backslash Q) \neq \emptyset$, то $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_1$;
- если $\overline{y} \in Q$, то $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_2$.

Построим по модели $\mathcal{M} = \langle \mu, Up(W), \models\rangle \in \Sigma_\varphi$ формулу $J(\mu, \mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ есть множество всех d-областей, образованных указанным выше способом.

Лемма 4.1. *Если* $\mathfrak{M}_1 \not\models J(\mu, \mathcal{D})$, *то* $\mathfrak{M}_1 \not\models \varphi$.

Доказательство. Пусть модельная структура $\mathfrak{M}_1 = \langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$ допустима для $J(\mu, \mathcal{D})$, то есть имеется частичный p-морфизм f из $\mathfrak{M}_1$ на $\mu = \langle W, R, Q\rangle$, удовлетворяющий условиям (A) и (B). Покажем, что $\mathfrak{M}_1$ допустима для модели $\mathcal{M}$. Условие $(**)$ очевидно имеет место.

Пусть $a \in f^{-1}(W)\uparrow$. Покажем, что $f(a\uparrow)$ открыт в $\mathcal{M}$.
Предположим, что набор $f(a\uparrow)$ закрыт. Тогда закрыт набор $\overline{x}$ всех минимальных элементов (относительно R) набора $f(a\uparrow)$. Тогда имеется d-область $\delta = (\overline{x}, \overline{y})$ и $a \in \bigcap_{x \in \overline{x}} f^{-1}(x)\downarrow$. Следовательно, $a \in \bigcup_{y \in \overline{y}} f^{-1}(y)\downarrow$. Тогда при некотором $y \in \overline{y}$ имеем $y \in f(a\uparrow)$. Но тогда существует элемент $x \in \overline{x}$ такой, что xRy, что противоречит определению d-области.

Таким образом, $f(a\uparrow)$ открыт в $\mathcal{M}$. ■

Лемма 4.2. *Пусть* $\mathcal{M} = \langle W, R, Q, S, \models\rangle$ *– контрмодель формулы* φ *на модельной структуре* $\mathfrak{M} = \langle W, R, Q, S\rangle$ *и* $J(\mu^+, \mathcal{D}^+)$ *– каноническая формула, построенная на модели* $\mathcal{M}^+ = \langle W^+, R^+, Q^+, Up(W^+), \models^+\rangle$.
Тогда $\mathfrak{M} \not\models J(\mu^+, \mathcal{D}^+)$.

Доказательство. Проверим, что частичный p-морфизм f_+ из $\mathfrak{M}$ на $\mu^+ = \langle W^+, R^+, Q^+\rangle$ удовлетворяет условиям допустимости для формулы $J(\mu^+, \mathcal{D}^+)$. То есть покажем, что

(A): если $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}^+$ и $c \in f_+^{-1}(W^+)\uparrow$, то
$c \in \bigcap_{x \in \overline{x}}(f_+^{-1}(x)\downarrow) \Longrightarrow c \in \bigcup_{y \in \overline{y}}(f_+^{-1}(y)\downarrow)$;
(B): $c \in f_+^{-1}(W^+)\uparrow \backslash Q \Longrightarrow c \in f_+^{-1}(W^+ \backslash Q^+)\downarrow$.

Проверим (B).
Пусть $c \in f_+^{-1}(W^+)\uparrow) \backslash Q$, тогда (так как $(\forall a \in f_+^{-1}(W^+)\uparrow)(\exists b \in f_+^{-1}(W^+))$ $(aRb$ и $\prod_a = \prod_b)$ существует элемент $d \in f_+^{-1}(W^+)$ такой, что cRd и $\prod_c = \prod_d$. Пусть $f_+(d) = e$, тогда $c \in f_+^{-1}(e)\downarrow$, а значит $c \in f_+^{-1}(W^+ \backslash Q^+)\downarrow$. Таким образом, условие (B) выполнено.

Проверим условие (A).
Пусть $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}^+$, $a \in f_+^{-1}(W^+)\uparrow$ и $a \in \bigcap_{x \in \overline{x}}(f_+^{-1}(x)\downarrow)$. Используя свойства (III) и (IV) модели $\mathcal{M}^+$, получаем, что существует элемент $b \in f_+^{-1}(W^+)$ такой, что aRb и $\prod_a = \prod_b$. Понятно, что $\prod_a \in \mathcal{P}_{\varphi_0}$.

Пусть $f_+(b) = e$. Рассмотрим набор $\overline{x} \cup \{e\}$ и покажем, что этот набор открыт в $\mathcal{M}^+$.

Рассмотрим разбиение $\prod_a$. Имеем $\forall \psi \in Sub(\varphi_0)\{\perp\}$:

$$\psi \in \prod\nolimits_a^1 \Longrightarrow$$

$$\psi \in \prod_e^1 \text{ и } \psi \in \bigcap_{x\in\overline{x}} \prod_x^1, \text{ так как } a \in \bigcap_{x\in\overline{x}} (f_+^{-1}(x)\downarrow) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \psi \in \prod_e^1 \cap \bigcap_{x\in\overline{x}} \prod_x^1.$$

Обратно,

$$\psi \in \prod_e^1 \cap \bigcap_{x\in\overline{x}} \prod_x^1 \Longrightarrow \psi \in \prod_e^1 = \prod_a^1.$$

Таким образом, $\psi \in \prod_a^1 \Longleftrightarrow \psi \in \prod_e^1 \cap \bigcap_{x\in\overline{x}} \prod_x^1$. Значит $\overline{x} \cup \{e\}$ – открытый набор $\mathcal{M}^+$. Следовательно, eRy для некоторого $y \in \overline{y}$, поэтому $a \in \bigcup_{y\in\overline{y}} (f_+^{-1}(y)\downarrow)$. ■

Далее вернемся к доказательству теоремы. Построим по моделям из Σ_φ канонические формулы $J(\mu_1, \mathcal{D}^1)$, ..., $J(\mu_n, \mathcal{D}^n)$. По лемме 4.1 всякая модель логики $\mathbf{Lj}$+φ является моделью логики
$\mathbf{Lj}+J(\mu_1, \mathcal{D}^1) + ... + J(\mu_n, \mathcal{D}^n)$, а по лемме 4.2 справедливо обратное. Таким образом, $\mathbf{Lj}+\varphi=\mathbf{Lj}+J(\mu_1, \mathcal{D}^1) + ... + J(\mu_n, \mathcal{D}^n)$. ■

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С.П. Одинцову за постановку задачи и внимательное отношение к данной работе.

Список литературы

[1] S. Odintsov, *On the structure of paraconsistent extensions of Johansson's logic.* Journal of Applied Logic **3** (2005), 43-65
[2] S. Odintsov, *Representation of j-algebras and Segerberg's logics.* Logique at Analyse, **165-166** (1999), 81-106.
[3] M. Zakharyashchev, *Syntax and semantics of modal logics containing S4.* Algebra and Logic **27** (1988), 659-689 (in Russian).
[4] M. Zakharyashchev, *Syntax and semantics of intermediate logics.* Algebra and Logic **28** (1989), 402-429 (in Russian).
[5] H. Rasiowa, *An algebraic approach to non-classical logics.* Amsterdam, North-Holland (1974).
[6] K. Segerberg, *Propositional Logics Related to Heyting's and Johansson's.* Theoria, **34** (1968), 26-61.
[7] Е. Расева, Р. Сикорский, *Математика метаматематики.* Москва, Наука (1974).

Марина Викторовна Стукачева
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: shinkore@math.nsc.ru