S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 284–290 (2006) УДК 512.623.4
MSC 12J10

ТОЛЕРАНТНЫЕ КОЛЬЦА НОРМИРОВАНИЯ

Ю.Л ЕРШОВ

Abstract. The recent book "Valued Fields" by A. J. Engler and A. Prestel contains the first monographic exposition of new important results (mostly due to J. Koenigsman) on Henselian valued fields. By introducing a new notion of tolerant valuation rings, we offer a new look at the proofs of these results.

Недавно появившаяся книга [2] содержит первое монографическое изложение новых важных результатов (в первую очередь Й. Кёнигсмана) о гензелевых нормированиях. В настоящей статье предлагается слегка иной подход к получению этих результатов.

Все необходимые определения и используемые свойства нормирования можно найти в главе 1 книги [1]. Пусть K — поле, через $Hen(K)$ обозначим семейство всех гензелевых колец нормирования поля K. Кольцо нормирования $R \in Hen(K)$ назовем *толерантным*, если для любого $R' \in Hen(K)$ имеет место $R' \leqslant R$ или $R \leqslant R'$. Семейство всех толерантных колец нормирования поля обозначим через $T(K)$; $T(K) \subseteq Hen(K)$.

Сразу из определения следует

Замечание 1. *Семейство $T(K)$ линейно упорядочено по включению.*

Замечание 2. *Если поле K сепарабельно замкнуто, то $T(K) = \varnothing$.*

Действительно, если K абсолютно алгебраично, т.е. является сепарабельным (=алгебраическим) замыканием конечного поля, то K вообще не имеет (собственных) колец нормирования и $Hen\,K = \varnothing$. В противном случае любое кольцо нормирования поля K является гензелевым и для любого кольца нормирования R поля K найдется кольцо нормирования R' поля K, не сравнимое с R по включению.

Ershov, Yu. L., On tolerant valuation rings.

Поступила 10 марта 2006 г., опубликована 20 июля 2006 г.

Предложение 1. *Гензелево кольцо нормирования R поля K является толерантным тогда и только тогда, когда для любого кольца $(K \geqslant)R' > R$ поле вычетов $F_{R'}$ кольца R' ($F_{R'} = K$, если $R' = K$) не является сепарабельно замкнутым.*

Пусть R толерантно ($R \in T(K)$), $(K \geqslant)R' > R$ и поле вычетов $F_{R'}$ сепарабельно замкнуто. Тогда $R' \neq K$ (замечание 2) и R' — (собственное) кольцо нормирования поля K. Тогда имеет место разложение $R = \bar{R} \circ R'$ (см. стр. 10 в [1]), где $\bar{R}$ — собственное нормирование поля $F_{R'}$. Так как $F_{R'}$ сепарабельно замкнуто, то (замечание 2) существует кольцо нормирования $\bar{R}_0$ поля $F_{R'}$ не сравнимое с $\bar{R}$ по включению. Кольцо $R_0 \rightleftharpoons \bar{R}_0 \circ R'$ является гензелевым (как композиция гензелевых колец нормирования, предложение 1.3.9 в [1]) и R_0 не сравнимо с R по включению. Тогда $R \notin T(K)$; противоречие.

Пусть $R \in Hen(K)$ и для любого $(K \geqslant)R' > R$ поле вычетов $F_{R'}$ не является сепарабельно замкнутым. Предположим, что $R \notin T(K)$ и пусть $R'' \in Hen(K)$ таково, что $R'' \nleqslant R$ и $R \nleqslant R''$. Тогда для $R' \rightleftharpoons RR'' > R, R''$ имеют место разложения $R = \bar{R} \circ R'$, $R'' = \bar{R}'' \circ R'$ и $\bar{R}, \bar{R}''$ независимые гензелевы кольца нормирования поля вычетов $F_{R'}$ кольца R'. Тогда по теореме Шмидта (следствие 2.6.2. в [1]) поле $F_{R'}$ сепарабельно замкнуто; противоречие. □

Следствие. *Пусть R — толерантное кольцо нормирования поля K; $R < R' < K$; $R = \bar{R} \circ R'$ — разложение кольца R. Тогда $\bar{R}$ — толерантное кольцо нормирования поля $F_{R'}$.* □

Через K^s будем обозначать сепарабельное замыкание поля K.

Предложение 2. *Если $K^s \neq K$ (т.е. K не является сепарабельно замкнутым) и $Hen(K) \neq \varnothing$, то и $T(K) \neq \varnothing$.*

Если существует кольцо $R \in Hen(K)$ такое, что $F_R^s \neq F_R$, то по предложению 1 $R \in T(K)$. Предположим, что для любого $R \in Hen(K)$ поле вычетов F_R сепарабельно замкнуто. Пусть $R_0, R_1 \in Hen(K)$, $R \rightleftharpoons R_0R_1$; тогда R — собственное кольцо нормирования поля K ($R \in Hen(K)$), так как в противном случае $K = R_0R_1$; R_0 и R_1 — независимые гензелевы кольца нормирования и по теореме Шмидта K должно быть сепарабельно замкнутым. Пусть $R_* \rightleftharpoons \bigcup Hen(K)$ и покажем, что $R_* \neq K$. Если поле K имеет характеристику 0, а все поля вычетов F_R, $R \in Hen(K)$ не нулевые характеристики ($\chi(F_R) \neq 0$), то все эти характеристики должны совпадать. Если $R \in Hen(K)$, $p \rightleftharpoons \chi(F_R)$, то $p^{-1} \notin R$ для всех $R \in Hen(K)$ и, следовательно, $p^{-1} \notin R_*$ и $R_* \neq K$. Рассмотрим случай, когда существует кольцо $R \in Hen(K)$ такое, что $\chi(F_R) = \chi(K)$.

Справедлива (известная)

Лемма 1. *Пусть $R \in Hen(K)$, F — подполе K такое, что $F \leqslant R$. Тогда существует поле F_0, $F \leqslant F_0 \leqslant K$, $F_0 \leqslant R$ и поле вычетов F_R чисто несепарабельно над F_0 (F_0 имеет естественное вложение в F_R).*

Набросок доказательства. Имеем $F \leqslant F_R$; пусть $X \subset F_R$ — базис трансцендентности F_R над F. Пусть $Y \subset R$ — такое подмножество, что Y взаимно однозначно отображается на X. Если F_0 — сепарабельное замыкание в K поля $F(Y)$, то лемма Гензеля показывает, что F_0 — искомое поле. □

Рассмотрим семейство пар $S = \{\langle R, F\rangle \mid R \in Hen(K) \bigcup \{K\}$, $F \leqslant R$ — сепарабельно замкнутое подполе такое, что F_R чисто несепарабельно над $F\}$.

Отношение включения на парах из S является индуктивным порядком. Тогда по лемме Цорна существует максимальный элемент $\langle R_0, F_0\rangle$. Заметим, что $R_0 \neq K$, так как $K^s \neq K$. Наконец, заметим, что $R_0 = R_*$. Действительно, если $R_0 \neq R_*$, то существует $R_1 \in Hen(K)$ $R_0 < R_1$. По лемме 1 существует поле $F_1 \geqslant F_0$ такое, что $F_1 \leqslant R_1$ и F_{R_1} чисто несепарабельное над F_1. Но F_{R_1} по предположению сепарабельно замкнуто, следовательно, и F_1 сепарабельно замкнуто, тогда $\langle R_1, F_1\rangle \in S$, $\langle R_0, F_0\rangle < \langle R_1, F_1\rangle$; противоречие.

Итак, в рассматриваемом случае R_* — наибольшее гензелево кольцо нормирования поля K. Тогда по предложению 1 $R_* \in T(K)$. $\square$

Если $T(K) \neq \varnothing$, то полагаем $R_c^K \rightleftharpoons \cap\, T(K)$ (R_c^K — каноническое нормирование из [2]).

Лемма 2. *$R_c^K \in T(K)$.*

Кольцо R_c^K как пересечение цепи гензелевых колец нормирования поля K само является гензелевым кольцом нормирования поля K, т.е. $R_c^K \in Hen(K)$.

Пусть кольцо $R \in Hen(K)$ такое, что $R \nleqslant R_c^K$. Так как $R \nleqslant R_c^K = \cap T(K)$, то существует кольцо $R' \in T(K)$ такое, что $R \nleqslant R'$; но тогда $R' \leqslant R$ (R' толерантно!) и $R_c^K \leqslant R' \leqslant R$. Отсюда $R_c^K \in T(K)$. $\square$

Следствие. *$T(K) = H(K)$.*

Здесь $H(K)$ — семейство гензелевых колец нормирования, определенное в [2], стр. 106.

Лемма 3. *Пусть $T(K) \neq \varnothing$;*

а) *если существует $R \in Hen(K)$ такое, что $F_R^s = F_R$, то справедливо $R_c^K = \bigcup \{R \mid R \in Hen(K),\ F_R^s = F_R\}$ и $F^s_{R_c^K} = F_{R_c^K}$ в этом случае;*

б) *если не существует $R \in Hen(K)$ такого, что $F_R^s = F_R$, то R_c^K — наименьшее по включению гензелево кольцо нормирования и тогда $Hen(K) = T(K)$.*

Пусть $R \in Hen(K)$ и $F_R^s = F_R$; так как R_c^K толерантно, то либо $R \leqslant R_c^K$, либо $R_c^K < R$. Если $R > R_c^K$, то $F_R^s \neq F_R$, т.к. $R_c^K \in T(K)$; следовательно, $R \leqslant R_c^K$ и $R_c^K \geqslant R_* \rightleftharpoons \bigcup \{R \mid R \in Hen(K),\ F_R^s = F_R\}$. Если $R > R_*$, то $F_R^s \neq F_R$ и, следовательно, $R_* \in T(K)$ и $R_c^K \leqslant R_*$. Итак, $R_c^K = R_*$.

Утверждение б) очевидно следует из предложения 1.$\square$

Следствие. *Пусть $T(K) \neq \varnothing$; равенство $Hen(K) = T(K)$ имеет место тогда и только тогда, когда $F^s_{R_c^K} \neq F_{R_c^K}$ или $F_{R_c^K}$ абсолютно алгебраично.* $\square$

Определим подсемейство $T_\omega(K)$ семейства $T(K)$ следующим образом: пусть $R \in Hen(K)$; тогда $R \in T_\omega \Leftrightarrow$ для любого кольца $(K \geqslant)R' > R$ имеет место $[F^s_{R'} : F_{R'}] = \omega$.

Заметим, что условие $[K^s : K] = \omega$ означает, что K не является ни сепарабельно замкнутым, ни вещественно замкнутым. Если $\chi(K) \neq 0$, то $[K^s : K] = \omega \Leftrightarrow K^s \neq K$.

Имеет место аналог предложения 2.

Предложение 2_ω**.** *Если $[K^s : K] = \omega$ и $Hen(K) \neq \varnothing$, то и $T_\omega(K) \neq \varnothing$.* $\square$

Если $T_\omega(K) \neq \varnothing$, то полагаем $R^K_{c_\omega} \rightleftharpoons \cap\, T_\omega(K)$.

Лемма 2_ω. $R^K_{c_\omega} \in T_\omega(K)$. $\square$

Рассмотрим случай, когда $T_\omega(K) \neq \varnothing$ и $T(K) \neq T_\omega(K)$.

Предложение 3. *Пусть $T_\omega(K) \neq \varnothing$ и $T(K) \neq T_\omega(K)$. Тогда для $R \in T(K) \setminus T_\omega(K)$ и для $R = R^K_{c_\omega}$ поле вычетов вещественно замкнуто.*

Пусть $R \in T(K) \setminus T_\omega(K)$, тогда существует $R' \geqslant R$ такой, что $F^s_{R'} \neq F_{R'}$, но $[F^s_{R'} : F_{R'}] < \omega$.

Условие $1 < [F^s_{R'} : F_{R'}] < \omega$ влечет (см. [2]), что $F_{R'}$ вещественно замкнуто. Если $R < R'$, то имеет место разложение $R = \bar{R} \circ R'$, где $\bar{R}$ — гензелево кольцо нормирования (вещественно замкнутого) поля $F_{R'}$. Справедлива (известная)

Лемма 4. *Если F — вещественно замкнутое поле, R — собственное кольцо нормирования поля F, то R гензелево тогда и только тогда, когда поле вычетов F_R вещественно замкнуто ($\Leftrightarrow$ F_R формально вещественно).*

Набросок доказательства. Если F_R формально вещественно, то F_R — поле характеристики 0, $i = \sqrt{-1} \notin F_R$ и основное неравенство (теорема 1.4.1 в [1]) показывает, что R имеет единственное расширение на $F(i) = F^s$, т.е. R гензелево.

Если F_R не формально вещественно, а R гензелево, то применением леммы Гензеля нетрудно установить, что F не является формально вещественным; противоречие. $\square$

Применяя лемму 4, получаем, что $F_R = F_{\bar{R}}$ вещественно замкнуто.

Лемма 5. *В условиях предложения справедливо*

$$R^K_{c_\omega} = \bigcup \{R \mid R \in T(K) \setminus T_\omega(K)\}.$$

Пусть $R_* \rightleftharpoons \bigcup\{R \mid R \in T(K) \setminus T_\omega(K)\}$. Как в доказательстве предложения 2 устанавливается, что F_{R_*} вещественно замкнуто (так как F_R вещественно замкнуты для всех $R \in T(K) \setminus T_\omega(K)$). Пусть $R_* \neq R^K_{c_\omega}$, тогда $R_* < R^K_{c_\omega}$ и не существует кольца R такого, что $R_* < R < R^K_{c_\omega}$. Действительно, если $R_* < R < R^K_{c_\omega}$, то $R \notin T_\omega(K)$, $R \in T(K) \setminus T_\omega(K)$ и должно быть $R \leqslant R_* = \bigcup(T(K) \setminus T_\omega(K))$. Так как $R_* \in T(K)$, то $F^s_{R^K_{c_\omega}} \neq F_{R^K_{c_\omega}}$; но если $\left[F^s_{R^K_{c_\omega}} : F_{R^K_{c_\omega}}\right] = \omega$, то $R_* \in T_\omega(K)$, что не так. Итак, $F_{R^K_{c_\omega}}$ — вещественно замкнуто. $\square$

Следствие. *В условиях предложения справедливо равенство $T(K) = Hen(K)$.*

Пусть $R \in Hen(K)$; если $R \geqslant R^K_c$, то $R \in T(K)$, что и нужно. Пусть $R \not\geqslant R^K_c$, тогда по толерантности $R < R^K_c$. Пусть $R = \bar{R} \circ R^K_c$ — разложение, где $\bar{R}$ — гензелево нормирование вещественно замкнутого поля $F_{R^K_c}$. Тогда по лемме 4 $F_R = F_{\bar{R}}$ вещественно замкнуто, $F^s_R \neq F_R$ и $R \in T(K)$. $\square$

Предложение 4 (подъем). *Пусть $L \geqslant K$ — конечное расширение полей; тогда*

а) *если $i = \sqrt{-1} \notin L$, $R \in T(K)$ $(R \in T_\omega(K))$, то $R^0 \in T(L)$ $(R^0 \in T_\omega(L))$ (здесь R^0 — единственное расширение (гензелева!) кольца нормирования R на L);*

б) *если $i \in L$, то $T(L) = T_\omega(L)$ и если $R \in T_\omega(K)$, то $R^0 \in T_\omega(L)$; если $R \in T(K) \setminus T_\omega(K)$, то $R^0 \notin T(L)$.*

Пусть $R \in T_\omega(K)$; пусть $R'_0 > R^0$; $R' \rightleftharpoons R'_0 \cap K$; $R' > R$. По определению $[F^s_{R'} : F_{R'}] = \omega$, так как $[F_{R'_0} : F_{R'_0}] < \omega$ и $F^s_{R'_0} = F^s_{R'}$, то $[F^s_{R'_0} : F_{R'_0}] = \omega$ и, следовательно, $R^0 \in T_\omega(L)$.

Пусть $R \in T(K) \setminus T_\omega(K)$; тогда F_R вещественно замкнуто. Если F_{R^0} вещественно замкнуто, то $i \notin L$ и $R^0 \in T(L)$. Если же F_{R^0} алгебраически замкнуто, то по лемме Гензеля $i \in F_{R^0}$ влечет, что $i \in L$ ($F_{R^0} > F_R$ — поле характеристики 0), и замечание 2 влечет, что $R^0 < R^L_{c_\omega}$ толерантно; $R^0 \notin T(L)$. $\square$

Возникает следующий вопрос. Пусть L — алгебраическое расширение поля K, $R_0 \in T(L)$; когда выполнено $R \rightleftharpoons R_0 \cap K \in T(K)$?

Используя предложение 1 нетрудно установить, что ответ положителен в случае, когда R гензелево.

Ниже для полноты картины дадим (иногда упрощенные) доказательства предложений о спуске из книги [2].

Предложение 5 (нормальный спуск)**.** *Пусть $L \geqslant K$ — нормальное расширение, $R_0 \in T(L)$ ($R_0 \in T_\omega(L)$), тогда $R_0 \cap K \in T(K)$ ($R_0 \cap K \in T_\omega(K)$).*

Установим, что $R = R_0 \cap K \in \mathit{Hen}(K)$ для $R_0 \in T(L)$. Для этого достаточно установить, что R имеет единственное расширение на L. Пусть R_1 — кольцо нормирования L такое, что $R = R_1 \cap K$. Тогда (предложение 1.2.6 в [1]) существует K-автоморфизм σ поля L такой, что $R_1 = \sigma(R_0)$. Ясно, что семейство $T(L)$ устойчиво относительно автоморфизмов поля L; тогда $R_1 \in T(L)$ и толерантность влечет сравнимость по включению R_0 и R_1, что влечет $R_0 = R_1$.

Итак, если $R_0 \in T(L)$, то $R \rightleftharpoons R_0 \cap K \in \mathit{Hen}(K)$. Пусть $R' > R$; R'_0 — поднятие R' на L; тогда $R'_0 > R_0$ и $[F^s_{R'_0} : F_{R'_0}] > 1 (= \omega)$, если $R_0 \in T(L)(R_0 \in T_\omega(L))$; так как $F_{R'_0}$ — алгебраическое расширение $F_{R'}$, то $[F^s_{R_0} : F_{R_0}] > 1\ (= \omega)$ и $R \in T(K)(R \in T_\omega(K))$. $\square$

Предложение 6 (конечный спуск)**.** *Пусть $L \geqslant K$ — конечное расширение, $R_0 \in T(L)$ ($R_0 \in T_\omega(L)$); тогда $R_0 \cap K \in T(K)$ ($R_0 \cap K \in T_\omega(K)$).*

Пусть $M \geqslant L \geqslant K$ — нормальное замыкание L над K (наименьшее нормальное расширение K, содержащее L). Пусть $R_0 \in T_\omega(L)$, R^0_0 — подъем R_0 на M; $R^0_0 \in T_\omega(M)$ по предложению 4 и $R_0 \cap K = R^0_0 \cap K \in T_\omega(K)$ по предложению 5.

Пусть $R_0 \in T(L) \setminus T_\omega(L)$; тогда F_{R_0} вещественно замкнуто; F_{R_0} — конечное расширениеF_R; следовательно, F_R так же вещественно замкнуто. Рассмотрим два случая.

Случай 1: L вещественно замкнуто; тогда $K = L$ и доказывать нечего.

Случай 2: $[L^s : L] = \omega$; если $\mathit{Hen}(L) = \varnothing$, то доказывать нечего. Если $\mathit{Hen}(L) \neq \varnothing$, то по предложению 2_ω $T_\omega(L) \neq \varnothing$. Тогда по доказанному $R^L_{c_\omega} \cap K \in T_\omega(K)$. И если $R_0 < R^L_{c_\omega}$, то $R_0 = \bar{R}_0 \circ R^L_{c_\omega}$; $R = \bar{R} \circ (R^L_{c_\omega} \cap K)$ ($R \rightleftharpoons R_0 \cap K$); $F_{\bar{R}}$ вещественно замкнуто $F_{\bar{R}} \leqslant F_{\bar{R}_0} = F_{R_0}$; $[F_{\bar{R}_0} : F_{\bar{R}}] < \omega$; $R^L_{c_\omega} \cap K$ гензелево по доказанному; тогда по лемме 4 R гензелево. То, что $F_R = F_{\bar{R}}$ — вещественно замкнуто, влечет, что $R \in T(K)$. $\square$

Замечание 3. *В условиях предложения 6, если $F_{R^L_c \cap K}$ алгебраически замкнуто, то $R_0 \cap \mathit{Hen}(K)$ для любого $R_0 \in \mathit{Hen}(L) \setminus T(L)$; если же $F_{R^L_c \cap K}$ вещественно замкнуто, то для $R_0 \in \mathit{Hen}(L) \setminus T(L)$ справедлива эквивалентность*

$R_0 \cap K \in \mathit{Hen}(K) \Leftrightarrow F_{R^L_c \cap K}$ *вещественно замкнуто.*

Действительно, если $Hen(L) \setminus T(L) \neq \varnothing$, то поле $F_{R_c^L}$ алгебраически замкнуто; $[F_{R_c^L} : F_{R_c^L \cap K}] < \omega$ влечет, что $F_{R_c^L \cap K}$ либо алгебраически замкнуто, либо вещественно замкнуто. Далее рассмотреть эти два случая, учитывая, что $R_c^L \cap K \in Hen(K)$. □

Пусть L — сепарабельное алгебраическое расширение поля K, p — простое число. Назовем L *максимальным p'-расширением* K, если выполнены следующие условия: а) для любого конечного подрасширения $K \leqslant L_0 \leqslant L$ степень расширения $[L_0 : K]$ не делится на p ; б) для любого конечного расширения $L_1 \geqslant L$ степень расширения $[L_1 : L]$ является степенью числа p.

Максимальные p'-расширения поля K могут быть описаны (с помощью теории Галуа бесконечных расширений и теории проконечных групп) следующим образом: пусть P — силовская p-подгруппа абсолютной группы Галуа $G(K)(= G(K^s/K))$ поля K; тогда K^{sP} — максимальное p'-расширение K и все максимальные p'-расширения устроены таким образом.

Отсюда (с использованием теоремы Силова для проконечных групп) следует, что если L_0 и L_1 — два максимальных p'-расширения поля K, то существует автоморфизм $\sigma \in G(K)$ такой, что $L_1 = \sigma(L_0)$.

Из определения сразу следует такой

Факт. *Если L — максимальное p'-расширение поля K; $F \geqslant K$ — алгебраическое расширение полей, то FL — максимальное p'-расширение поля F.*

Предложение 7 (p'-спуск)**.** *Пусть L — максимальное p'-расширение поля K; если $p \neq 2$ и $R_0 \in T(L)$ $(R_0 \in T_\omega(L))$, то $R_0 \cap K \in T(K)$ $(R_0 \cap K \in T_\omega(K))$; если $p = 2$ и $R_0 \in T_\omega(L)$, то $R_0 \cap K \in T_\omega(K)$.*

Пусть $R_0 \in T_\omega(L)$ (это влечет $[L^s : L] = \omega$). Покажем, что $R \rightleftharpoons R_0 \cap K$ гензелево ($R \in Hen(K)$). Предположим противное. Тогда существует конечное расширение Галуа $F \geqslant K$ и два различных кольца нормирования R_1 и R_2 поля F такие, что $R = R_1 \cap K = R_2 \cap K$. Так как $R_1 \cap K = R_2 \cap K$, то существует K-автоморфизм σ поля F $(\sigma \in G(F/K))$ такой, что $R_2 = \sigma(R_1)$.

Рассмотрим поле $L' \rightleftharpoons LF$; пусть R_0' — единственное расширение R_0 на L'. Не уменьшая общности можно считать, что $R_0' \cap F = R_1$. Пусть $\sigma \in G(K)$ — такой автоморфизм, что $\sigma_0 \restriction F = \sigma$. Полагаем $L'' \rightleftharpoons \sigma_0(L')$, $R_0'' \rightleftharpoons \sigma_0(R_0')$. Из выбора σ_0 следует, что $R_0'' \cap F = R_2$. Из отмеченного выше факта следует, что L' является максимальным p'-расширением F; тогда и $L'' = \sigma_0(L')$ — максимальное p'-расширение F. Следовательно, существует F-автоморфизм σ_1 поля $F^s(= K^s = L^s)$ такой, что $L' = \sigma_1(L'')$. Пусть $R_1' \rightleftharpoons \sigma_1(R_0'')$; так как σ_1 — F-автоморфизм, то $R_1' \cap F = R_0'' \cap F = R_2$. По предложению 4 кольцо R_0' лежит в $T_\omega(L')$; кроме того $R_1' \in Hen(L')$, так как $R_1' = \sigma_1(R_0'') = \sigma_1\sigma_0(R_0')$, $R_1' \simeq R_0'$. Толерантность R_0' $(R_0' \in T_\omega(L'))$ влечет $R_1' \leqslant R_0'$ или $R_0' \leqslant R_1'$; но $R_0' \cap K = R = R_1' \cap K$. Следовательно, $R_0' = R_1'$, что противоречит тому, что $R_0' \cap F = R_1 \neq R_2 = R_1' \cap F$. Итак, $R = R_0 \cap K$ гензелево.

Пусть $R < R'$ $(\leqslant K)$, R_0' — единственное расширение R' на L; тогда $R_0 < R_0'$ $(\leqslant L)$ и $[F^s_{R_0'} : F_{R_0'}] = \omega$ (так как $R_0 \in T_\omega(L)$). Но $F_{R_0'}$ — алгебраическое расширение $F^s_{R'}$; следовательно, $F^s_{R'} = F^s_{R_0'}$ и $[F^s_{R'} : F_{R'}] = \omega$. Отсюда $R \in T_\omega(K)$.

Пусть $p \neq 2$ и $R_0 \in T(L) \setminus T_\omega(L)$. Доказательство гензелевости $R \rightleftharpoons R_0 \cap K$ проходит как и выше, так как из условия $R_0 \in T(L) \setminus T_\omega(L)$ следует, что L

формально вещественно, $i \notin L$; но и $i \notin L'$, так как $2 \nmid [L' : L] = p^k$ для подходящего $k \in \omega^+$; следовательно, предложение 4 применимо и в этом случае. Завершение доказательства как выше (с заменой условий “степень расширения равна ω” на условие “степень расширения > 1”). $\square$

Список литературы

[1] Ю. Л. Ершов, *Кратно нормированные поля*, Новосибирск, Научная книга, 2000.
[2] A. J. Engler, A. Prestel, *Valued Fields*, Springer, 2005.

Юрий Леонидович Ершов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ershov@math.nsc.ru