S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 257–283 (2006) УДК 512.5

MSC 20D45

О ГРУППАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРУППУ АВТОМОРФИЗМОВ, РАНГ ЦЕНТРАЛИЗАТОРА КОТОРОЙ ОГРАНИЧЕН

В. Д. МАЗУРОВ, Е. И. ХУХРО

Abstract. We obtain restrictions on the structure of a finite group G with a group of automorphisms A in terms of the order of A and the rank of the fixed-point subgroup $C_G(A)$. When A is regular, that is, $C_G(A) = 1$, there are well-known results giving in many cases the solubility of G, or bounds for the Fitting height. Some earlier "almost regular" results were deriving the solubility, or bounds for the Fitting height, of a subgroup of index bounded in terms of $|A|$ and $|C_G(A)|$. Now we prove rank analogues of these results: when "almost regular" in the hypothesis is interpreted as a restriction on the rank of $C_G(A)$, it is natural to seek solubility, or nilpotency, or bounds for the Fitting height, of "almost" entire group modulo certain bits of bounded rank. The classification is used to prove almost solubility. For soluble groups the Hall–Higman–type theorems are combined with the theory of powerful p-groups to obtain almost nilpotency, or bounds for the Fitting height of a normal subgroup with quotient of bounded rank. Examples are produced showing that some of our results are in a sense best-possible, while certain results on almost regular automorphism have no valid rank analogues. Several open problems are discussed, especially in the case of nilpotent G.

Получены ограничения на строение конечной группы G с группой автоморфизмов A в зависимости от порядка A и ранга подгруппы $C_G(A)$ неподвижных точек. Если A регулярна, т. е. $C_G(A) = 1$,

---

Mazurov, V. D., Khukhro, E. I., On groups admitting a group of automorphisms whose centralizer has bounded rank.

Работа поддержана РФФИ (проект 05-01-00797).

Поступила 5 мая 2006 г., опубликована 20 июля 2006 г.

хорошо известны результаты, дающие во многих случаях разрешимость группы G или ограничивающие ее нильпотентную длину (высоту Фиттинга). Некоторые полученные ранее «почти регулярные» результаты давали разрешимость или ограниченность нильпотентной длины некоторой подгруппы, индекс которой ограничен в зависимости от $|A|$ и $|C_G(A)|$. Мы доказываем ранговые аналоги этих результатов: если почти регулярность в условии понимать как ограниченность ранга подгруппы $C_G(A)$, то естественно доказывать разрешимость, или нильпотентность, или ограниченность нильпотентной длины «почти всей» группы по модулю некоторых «кусочков» ограниченного ранга. Классификация конечных простых групп используется нами для доказательства почти разрешимости. Для разрешимых групп теоремы типа Холла–Хигмана сочетаются с теорией мощных p-групп для того, чтобы получить почти нильпотентность или ограниченность нильпотентной длины некоторой нормальной подгруппы с фактором ограниченного ранга. Строятся примеры, показывающие с одной стороны неулучшаемость некоторых из полученных результатов, а с другой — невозможность получения подходящих ранговых аналогов некоторых известных результатов о почти регулярных автоморфизмах. Обсуждаются нерешённые вопросы, особенно для нильпотентной группы G.

1. Введение

Пусть A — группа автоморфизмов конечной группы G и $C_G(A)$ — подгруппа её неподвижных точек. Изучение строения G в зависимости от свойств подгруппы $C_G(A)$ — важное направление в теории групп. По теореме Томпсона [37] G нильпотентна, если A простого порядка q и *регулярна*, т. е. $C_G(A) = 1$; более того, по теореме Хигмана [22] ступень нильпотентности G ограничена функцией, зависящей только от q. Из классификации конечных простых групп вытекает разрешимость G, если порядок A взаимно прост с порядком G и $C_G(A) = 1$. С использованием классификации Фонг [16] доказал, что в случае, когда A простого порядка q и $|C_G(A)| = n$, порядок фактора $G/S(G)$ по разрешимому радикалу ограничен в терминах только q и n (или, для краткости, (q, n)-*ограничен*). Этот факт обобщает лежащую в основании классификации теорему Брауэра–Фаулера [12], в которой рассмотрен случай $|A| = 2$.

Когда группы G и A разрешимы и их порядки взаимно просты, Томпсон [38] получил верхние границы для нильпотентной длины $h(G)$ в зависимости от нильпотентной длины $h(C_G(A))$ и порядка $|A|$. Доказательство этой теоремы использует технику теории представлений, развитую в статье о разрешимости групп нечётного порядка [15] и в работе Холла и Хигмана [20]. Теоремы типа Холла–Хигмана, часто формулируемые в терминах теории характеров, составляют фундамент многочисленных статей о регулярных и почти регулярных автоморфизмах разрешимых групп, из которых мы упомянем работы Бергера [11], Дейда [14], Гросса [19], Курцвайля [28], Турулла [39], Хартли–Айзекса [23] и Шульта [35].

В частности, Хартли и Майкснер [21] и независимо Петет [33] доказали для группы A простого порядка q, что порядок фактора Фиттинга $G/F(G)$ ограничен в терминах $|C_G(A)|$ и q. В общем случае для разрешимых групп G и A взаимно простых порядков Турулл [39] и Хартли–Айзекс [23] показали, что порядок фактора $G/F_{2l+1}(G)$ по $(2l + 1)$-ой подгруппе Фиттинга ограничен в терминах $|A|$ и $|C_G(A)|$, где $l = l(A)$ — число (не обязательно различных) простых чисел, произведение которых равно $|A|$. Условие взаимной простоты неустранимо, по крайней мере для ненильпотентной группы A, как показывают примеры, построенные Беллом и Хартли [10], в которых $C_G(A) = 1$, но нильпотентная длина G не ограничена.

В нашей работе рассматриваются (в основном, конечные) группы G с группами автоморфизмов A, которые почти регулярны в том смысле, что $C_G(A)$ имеет данный ранг r (напомним, что рангом конечной группы называется такое наименьшее число r, что все её подгруппы могут быть порождены r элементами). Из ограниченности ранга $C_G(A)$ выводится разрешимость, или нильпотентность, или ограниченность нильпотентной длины некоторых подгрупп или секций по модулю «небольших кусочков», ранги которых ограничены в терминах r и $|A|$. Частично результаты данной работы были анонсированы в [9] и опубликованы в [26].

Используя классификацию мы доказываем, что в случае, когда $(|A|, |G|) = 1$, существует оценка сверху для ранга фактора $G/S(G)$ по разрешимому радикалу, зависящая от $|A|$ и ранга $C_G(A)$ (теорема 1). Мы также доказываем похожий результат для порядков: если $(|A|, |G|) = 1$, то порядок $|G/S(G)|$ ограничен в терминах $|C_G(A)|$ и $|A|$. От условия взаимной простоты порядков освободиться нельзя: строятся примеры, показывающие, что, во-первых, нельзя ограничить подобным образом ранг группы $G/S(G)$ даже в случае $|A| = 2$ и, во-вторых, порядок $G/S(G)$ нельзя ограничить в терминах $|C_G(A)|$ и $|A|$ даже для A порядка 4.

Если обе группы G и A разрешимы, для случая, когда порядок q группы A — простое число, мы получили [25] в некотором смысле неулучшаемый результат: существуют такие характеристические подгруппы $R < N < G$, что N/R нильпотентна, а ранги G/N и R ограничены функцией от q и ранга $C_G(A)$ (теорема 2). Примеры показывают, что при этом ранг $G/F(G)$ и даже ранг $G/F_2(G)$ такой функцией ограничить нельзя. С другой стороны, ранг $G/F_3(G)$ ограничен (теорема 7). Эти результаты для группы A простого порядка не требуют условия взаимной простоты порядков G и A. Их доказательства сочетают «немодулярные» теоремы типа Холла–Хигмана и теорию мощных p-групп. Случай $q = 2$ ранее был исследован Шумяцким [36].

Рассуждение об обратном пределе позволяет получить аналогичные результаты для локально конечных локально разрешимых групп с элементом простого порядка, ранг централизатора которого конечен.

Ввиду примеров Белла и Хартли [10], при изучении общего случая разрешимых групп A и G естественно добавить условие $(|A|, |G|) = 1$. Упомянутая выше верхняя оценка ранга $G/F_3(G)$ в случае, когда порядок A прост, даёт возможность использовать достаточно простую индукцию, основанную на теореме Томпсона [38], утверждающей, что $F(C_G(\alpha)) \leqslant F_4(G)$ для автоморфизма α простого порядка, не делящего $|G|$. В результате ранг $G/F_{4^l-1}(G)$ ограничивается в терминах ранга $C_G(A)$ и числа $l = l(A)$ (теорема 6). Пока неизвестно, можно ли здесь заменить индекс $4^l - 1$ на линейную функцию от l, как это сделано в работах Турулла [39] и Хартли–Айзекса [23], где рассматривались границы для порядков.

Таким образом, изучение строения группы G с подгруппой $C_G(A)$ данного ранга r, по крайней мере, когда $(|A|, |G|) = 1$ и A разрешима, теперь во многом сводится к случаю нильпотентной группы G. Здесь гораздо больше нерешённых вопросов, чем ответов, даже если порядок A — простое число. Пусть $A = \langle\varphi\rangle$ — циклическая группа простого порядка q. Напомним, что по теореме Хигмана [22] ступень нильпотентности нильпотентной группы с регулярным автоморфизмом простого порядка q является q-ограниченной. По теореме Хухро [6, 7], если G нильпотентна и $|C_G(\varphi)| = n$, то в G найдётся подгруппа (q, n)-ограниченного индекса, ступень нильпотентности которой q-ограничена. Естественно ожидать, что в случае, когда G нильпотентна и ранг $C_G(\varphi)$ равен r, в G должна содержаться подгруппа «(q, r)-ограниченного коранга», ступень нильпотентности которой q-ограничена, возможно, даже нормальная подгруппа q-ограниченной ступени нильпотентности с фактором (q, r)-ограниченного ранга (для нильпотентных групп нормальную подгруппу ограниченного ранга можно исключить за счёт фактор-группы, поэтому здесь нет необходимости в подгруппе типа R, как в отмеченной выше теореме 2). Пока это предположение подтверждено только при $q = 2$ Шумяцким [36]. Некоторые частичные результаты для произвольного q с оценками, зависящими также и от ступени разрешимости группы G, были получены Макаренко [31] и Хухро [8].

Что касается групп автоморфизмов составного порядка, то уже ситуация, когда группа $A = \langle\varphi\rangle$ циклическая и регулярная, т. е. когда $C_G(\varphi) = 1$, остаётся для нильпотентных групп неисследованной (за исключением случая $|\varphi| = 4$, рассмотренного Ковачем [27]). Естественно ожидать, что ступень разрешимости G ограничена функцией от $|\varphi|$. Это ожидание основано на известной теореме Крекнина [2]: если кольцо Ли L обладает регулярным автоморфизмом φ конечного порядка n (это означает, что подкольцо $C_L(\varphi)$ неподвижных точек равно нулю), то L разрешимо n-ограниченной ступени разрешимости (она не превосходит $2^n - 2$). Но пока метод колец Ли не даёт возможности получить аналогичный результат для групп. Например, во взаимно простой ситуации автоморфизм присоединенного кольца Ли $L(G)$, индуцированный регулярным автоморфизмом порядка n группы G, остаётся регулярным; поэтому по теореме Крекнина кольцо $L(G)$ разрешимо n-ограниченной ступени разрешимости. Но ступень разрешимости $L(G)$ может вполне оказаться меньше ступени разрешимости G (в отличие от ступени нильпотентности, которая остаётся той же; именно по этой причине теорема Хигмана, по сути, является результатом о кольцах Ли). Недавно Хухро и Макаренко [32] доказали, что алгебра Ли с автоморфизмом конечного порядка n, размерность m неподвижных точек которого конечна, является почти разрешимой в том смысле, что в ней есть разрешимый идеал n-ограниченной ступени разрешимости и (m, n)-ограниченной коразмерности. Этот результат, как и теорема Крекнина, с помощью соответствия Мальцева (основанного на формуле Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа), сохраняющего ступень разрешимости, влечёт аналогичный результат для локально нильпотентных групп без кручения. Но, повторим, даже регулярный случай автоморфизма составного порядка остаётся неисследованной проблемой для произвольных нильпотентных групп.

Мы напоминаем в § 2 некоторые известные факты. В § 3 рассматривается фактор по разрешимому радикалу. В § 4 даётся доказательство теоремы о почти нильпотентности для автоморфизма простого порядка. Оценки ранга факторов по некоторым членам ряда Фиттинга в разрешимой взаимно простой ситуации содержатся в § 5.

2. Обозначения и предварительные факты

На протяжении всей работы $r(G)$ означает ранг группы G, определяемый как минимальное число r, для которого все конечно порождённые подгруппы G (разумеется, все подгруппы, если G конечна) могут быть порождены r элементами. Автоморфизм, индуцированный на инвариантной подгруппе, факторе или секции, обозначается той же буквой, что и исходный автоморфизм.

Напомним теперь некоторые известные факты.

Лемма 1. *Пусть A — группа автоморфизмов конечной группы H и пусть их порядки взаимно просты:* $(|H|, |A|) = 1$. *Если N — нормальная A-инвариантная подгруппа, то $C_{H/N}(A) = C_H(A)N/N$.* □

Некоторые другие известные свойства взаимно простого действия, например, существование A-инвариантной силовской подгруппы, будут использоваться без ссылок.

Лемма 2. *Если конечная абелева p-группа A допускает автоморфизм φ порядка p с централизатором ранга r, то ранг A не больше pr.*

Доказательство. Ранг A равен рангу подгруппы $\Omega_1(A) = \{a \in A \mid a^p = 1\}$, которую можно считать векторным пространством над полем из p элементов. Поскольку $0 = \varphi^p - 1 = (\varphi - 1)^p$, все собственные значения линейного преобразования φ равны 1. Число блоков жордановой нормальной формы φ равно размерности централизатора $C_{\Omega_1(A)}(\varphi)$, в то время как размерность каждого блока не превосходит p. □

Следующая лемма появилась независимо и одновременно в работах Горчакова [1], Мерзлякова [5] и, как «лемма Ф. Холла», в статье Роузблейда [34].

Лемма 3. *Пусть p — простое число. Тогда ранг p-группы автоморфизмов конечной p-группы ранга r ограничен в терминах r.* □

(Хотя в [1], [5] и [34] рассматриваются p-группы автоморфизмов конечных *абелевых* p-групп ранга r, общий результат легко вывести из этого частного случая; см., например, лемму 4.2 в [36]).

Лемма 4. *Если конечная группа G допускает автоморфизм φ простого порядка p с централизатором ранга r, то ранг силовской p-подгруппы группы G ограничен в терминах p и r.*

Доказательство. Вложив $\langle\varphi\rangle$ в силовскую p-подгруппу полупрямого произведения $G\langle\varphi\rangle$, найдём φ-инвариантную силовскую p-подгруппу P группы G. Ранг максимальной абелевой нормальной подгруппы A полупрямого произведения $P\langle\varphi\rangle$ не превосходит $p(r+1)$ по лемме 2. Поскольку $C_{P\langle\varphi\rangle}(A) = A$, фактор-группа PA/A изоморфно вкладывается в силовскую p-подгруппу группы автоморфизмов группы A. По лемме 3 ранг PA/A ограничен в терминах ранга A. □

Следующий результат был получен для разрешимых групп Ковачем [27] на основе теорем типа Холла–Хигмана. Лонгобарди и Май [29] с помощью классификации распространили его на произвольные группы.

Лемма 5. (а) *Если d — максимум рангов силовских подгрупп конечной разрешимой группы, то ранг всей группы не превосходит $d + 1$.*

(б) *Если d — максимум рангов силовских подгрупп конечной группы, то ранг всей группы не превосходит $2d$.* □

Следующая лемма тоже наверняка известна.

Лемма 6. *Конечная p'-группа Q линейных преобразований векторного пространства размерности n над полем характеристики p имеет n-ограниченный ранг.*

Доказательство. По лемме 5 можно считать, что Q примарна. По лемме 3 достаточно ограничить ранг каждой абелевой подгруппы A из Q. Подгруппа A диагонализируема над некоторым расширением основного поля, что даёт искомый результат, поскольку конечные мультипликативные подгруппы поля являются циклическими. □

Конечная p-группа P называется мощной, если $[P, P] \leqslant P^p$ для $p \neq 2$, и $[P, P] \leqslant P^4$ для $p = 2$ (здесь $A^n = \langle a^n \mid a \in A \rangle$). Следующий результат взят из [30].

Лемма 7. *Если мощная p-группа P порождена d элементами, то ранг P не больше d.*

Ниже приведены ещё два известных факта.

Лемма 8. *Конечная разрешимая группа ранга r имеет r-ограниченную нильпотентную длину.*

Доказательство. Для любого простого числа p фактор $G/O_{p',p}(G)$ действует точно на факторе Фраттини группы $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$ и поэтому является линейной группой размерности $\leqslant r$. По теореме Ли–Цассенхауза–Колчина–Мальцева $G/O_{p',p}(G)$ имеет r-ограниченную ступень разрешимости. Следовательно, то же самое верно для $G/F(G) = G/\bigcap_p O_{p',p}(G)$. □

Лемма 9. *Порядок конечной разрешимой группы ранга r и периода n не превосходит $n^{f(r)}$ для некоторого r-ограниченного числа $f(r)$.*

3. Ограничения для $G/S(G)$

Теорема 1. *Пусть A — группа автоморфизмов конечной группы G взаимно простого порядка:* $(|G|, |A|) = 1$.

(а) *Если $|C_G(A)| = r$, то порядок $G/S(G)$ является $(|A|, r)$-ограниченным.*

(б) *Если $r(C_G(A)) = r$, то ранг $G/S(G)$ является $(|A|, r)$-ограниченным.*

Доказательство этой теоремы использует классификацию конечных простых групп. Для функций от $|A|$ и r, ограничивающих ранг и порядок в теореме 1, можно указать явную оценку сверху, хотя мы её и не вычисляем.

Следующие примеры показывают, что без условия взаимной простоты $|G|$ и $|A|$ нельзя ограничить ни порядок, ни ранг $G/S(G)$.

Пример 1. Пусть $G = PSL(2, q)$, где q — степень простого числа и $q > 3$. Пусть A — группа внутренних автоморфизмов G, индуцированная нециклической подгруппой порядка 4 из G. Тогда $|C_G(A)| = 4$, но $S(G) = 1$ и порядок G может быть произвольно большим.

Пример 2. Для нечётного простого числа p и любого натурального числа n положим $G = SL(2, q)$, где $q = 2^{n(p-1)}$. Тогда $S(G) = 1$, $|G| = q(q-1)(q+1)$, и $q - 1$ делится на p по малой теореме Ферма. Пусть A — группа порядка p в группе внутренних автоморфизмов G. Централизатор $C_G(A)$ является циклической подгруппой порядка $q - 1$, в то время как ранг силовской 2-подгруппы группы G равен $n(p-1)$. Итак, ранг $G/S(G)$ может быть произвольно большим даже в случае, когда ранг $C_G(A)$ равен 1.

Для доказательства теоремы 1 потребуется следствие из классификации конечных простых групп [18], которое вытекает из описания автоморфизмов известных простых групп (см., например, [13]). Если центр группы тривиален, мы отождествляем её с группой внутренних автоморфизмов.

Лемма 10. *Пусть G — конечная простая неабелева группа.*

(а) $r(\mathrm{Aut}(G)/G) \leq 3$.

(б) *Если $A \leq \mathrm{Aut}(G)$ и $(|G|, |A|) = 1$, то либо $A = 1$, либо $G = L(q)$ — группа лиева типа над полем порядка q и $C_G(A) \simeq L(q_0)$, где $q = q_0^{|A|}$.* □

Лемма 11. (а) *Пусть $G = P_1 \times \cdots \times P_s$, где P_i — конечная простая группа. Тогда группа автоморфизмов G переставляет сомножители P_i.*

(б) *Пусть $P_1, \ldots, P_s$ — попарно неизоморфные простые группы,*

$$Q_i = R_{i1} \times \cdots \times R_{it_i},$$

где $R_{ij} \simeq P_i$ для $j = 1, \ldots, t_i$ и $i = 1, \ldots, s$. Пусть $G = Q_1 \times \cdots \times Q_s$. Тогда $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(Q_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(Q_s)$ и $\mathrm{Aut}(Q_i)$ изоморфна расширению $\mathrm{Aut}(R_{i1}) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(R_{it_i})$ посредством симметрической группы степени t_i.

(в) *Пусть $G = P_1 \times \cdots \times P_t$, где P_i — конечные простые неабелевы группы. Пусть группа A, действующая на G, транзитивно переставляет сомножители P_i, и пусть $A_1 = \{a \in A \mid P_1^a = P_1\}$ — стабилизатор P_1 в A. Тогда централизатор $C = C_{P_1}(A_1)$ изоморфен подгруппе группы $C_G(A)$.*

Доказательство. Пункты (а) и (б) хорошо известны. Чтобы доказать (в), выберем для каждого $i = 1, \ldots, t$ такой элемент $a_i \in A$, что $P_1^{a_i} = P_i$. Тогда $\{a_1, \ldots, a_t\}$ является множеством представителей всех различных правых смежных классов по A_1 в A. Для $c \in C$ положим $c_i = c^{a_i}$ и $\tau(c) = c_1 \cdots c_t$. Поскольку $c_i \in P_i$ и $c_i \neq 1$ для $c \neq 1$, отображение τ является вложением C в G. С другой стороны, если $a \in A$, то для любого $i = 1, \ldots, t$ существуют такие $x_i \in A_1$ и $j_i \in \{1, \ldots, t\}$, что $a_i a = x_i a_{j_i}$ и $\{j_1, \ldots, j_t\} = \{1, \ldots, t\}$. Поэтому $c_i^a = c^{a_i a} = c^{x_i a_{j_i}} = c^{a_{j_i}} = c_{j_i}$. Отсюда следует, что $(\tau(c))^a = c_{j_1} \cdots c_{j_t} = \tau(c)$, т. е. $\tau(C) \subseteq C_G(A)$. □

Доказательство теоремы 1 начнём с простых групп.

Лемма 12. *Теорема 1 верна, если G — простая группа. Кроме того, порядок $C_G(A)$ чётен, если G проста.*

Доказательство. Можно считать, что A действует на G точно и $A \neq 1$. По лемме 10(б) $G = L(q)$ — группа лиева типа и $C_G(A) = L(q_0)$, где $q = q_0^{|A|}$.

В пункте (а) теоремы 1 q_0 и лиев ранг G, который равен лиеву рангу $L(q_0)$, являются r-ограниченными. Отсюда вытекает, что q является $(r, |A|)$-ограниченным числом и поэтому то же самое верно для $|G|$.

Перейдём к пункту (б). Так как $L(q_0)$ содержит элементарную абелеву подгруппу порядка q_0, то $q_0 = s^n$, где число s простое, а n ограничено в терминах $|A|$ и r. Поскольку силовская 2-подгруппа в $L(q_0)$ имеет $(|A|, r)$-ограниченный ранг, лиев ранг $G = L(q)$, который равен лиеву рангу $L(q_0)$, также $(|A|, r)$-ограничен. Поэтому G можно вложить в $PSL_m(q)$, где m является $(|A|, r)$-ограниченным. По лемме 6 любая силовская t-подгруппа из G для $t \neq s$ имеет $(|A|, r)$-ограниченный ранг. Ранг силовской s-подгруппы также $(|A|, r)$-ограничен, поскольку $q = q_0^{|A|} = s^{n|A|}$, а лиев ранг и число n являются $(|A|, r)$-ограниченными. Теперь ранг G является $(|A|, r)$-ограниченным по лемме 5(б). $\square$

Лемма 13. *Теорема* 1 *верна, если* $G = P_1 \times \dots \times P_t$ *— прямое произведение неабелевых простых групп* P_i *и* A *действует транзитивно на* $\{P_1, \dots, P_t\}$. *Кроме того, в этом случае порядок* $C_G(A)$ *чётен.*

Доказательство. Пусть $A_1 = \{a \in A \mid P_1^a = P_1\}$ — стабилизатор P_1 в A. По лемме 11(в) группа $C = C_{P_1}(A_1)$ изоморфна подгруппе $C_G(A)$, откуда вытекает, что $|C|$ (соответственно, $r(C)$) является $(r, |A|)$-ограниченным числом. По лемме 12 тогда порядок $|P_1|$ (соответственно, ранг $r(P_1)$) является $(r, |A_1|)$-ограниченным числом, а порядок $|C|$ чётен. В частности, чётен порядок $C_G(A)$. Так как $t = |A : A_1|$ и все P_i изоморфны, то $|G|$ (соответственно, $r(G)$) является $(r, |A|)$-ограниченным. $\square$

Завершение доказательства теоремы 1. По лемме 1 можно считать, что $S(G) = 1$. Пусть M — произведение всех минимальных нормальных подгрупп G (цоколь). Тогда $M = P_1 \times \dots \times P_t$ — произведение неабелевых простых групп. По лемме 11(а) группа A действует на множестве $\{P_1, \dots, P_t\}$, причем $M = Q_1 \times \dots \times Q_k$, где каждая подгруппа Q_i удовлетворяет условиям леммы 13 вместо G. Из леммы 13 вытекает, что $|Q_i|$ (соответственно, $r(Q_i)$) является $(r, |A|)$-ограниченным числом и порядок $C_{Q_i}(A)$ чётен. Отсюда следует, что числа k и t являются $(r, |A|)$-ограниченными и, следовательно, то же самое верно для $|M|$ (соответственно, для $r(M)$).

Поскольку $C_G(M) = 1$, группа G является подгруппой $\mathrm{Aut}(M)$. Это доказывает, в частности, пункт (а) теоремы. В пункте (б) числа t и $r(M)$ являются $(r, |A|)$-ограниченными. По лемме 11 G вложима в

$$(\mathrm{Aut}(P_1) \times \dots \times \mathrm{Aut}(P_t)) \cdot H,$$

где H — подгруппа симметрической группы степени t. Поскольку ранг $\mathrm{Aut}(P_i)/P_i$ не превосходит числа 3 по лемме 10(а), ранг G является $(r, |A|)$-ограниченным. $\square$

4. Почти нильпотентность для случая группы A простого порядка

В этом параграфе $A = \langle \varphi \rangle$ — циклическая группа простого порядка q. Ввиду теоремы 1 и примера 2 мы считаем, что G разрешима. Однако мы не предполагаем, что порядок φ взаимно прост с $|G|$. Здесь мы формулируем результаты, полученные нами в [25], и приводим их доказательства для полноты изложения.

4.1. **Формулировка результатов.** Следующая теорема говорит о том, что группа G почти нильпотентна с точностью до двух секций малого ранга. Её доказательство основано на сочетании теорем типа Холла–Хигмана и теории мощных p-групп.

Теорема 2. *Предположим, что конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм φ простого порядка q с подгруппой неподвижных точек $C_G(\varphi)$ ранга r. Тогда G содержит такие характеристические подгруппы $R \leqslant N \leqslant G$, что N/R нильпотентна и обе группы G/N и R имеют (q,r)-ограниченные ранги.*

Примеры показывают, что, в отличие от теоремы Хартли–Майкснера–Петета [21, 33] для порядков, здесь нельзя избавиться ни от подгруппы R, ни от фактора G/N.

Пример 3. Пусть n — натуральное число и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — различные простые числа, большие, чем 7. Для любого $i = 1, \dots, n$ группа автоморфизмов элементарной абелевой группы E_i порядка p_i^6 содержит такую группу Фробениуса F_i с ядром A_i порядка 7 и дополнением, порождённым элементом b_i порядка 6, что A_i действует регулярно на E_i. Пусть B_i означает полупрямое произведение E_iF_i, и пусть $P = B_1 \times \dots \times B_n$. Пусть G — подгруппа P, порождённая всеми E_i, A_i и элементом b^2, где $b = b_1 \cdots b_n$. Элемент b^3 индуцирует автоморфизм φ группы G порядка $q = 2$, для которого $C_G(\varphi)$ — группа ранга 3, в то время как ранг фактора Фиттинга группы G точно так же как и ранг любой нормальной подгруппы с нильпотентной фактор-группой не меньше, чем n.

Этот пример (аналогичные примеры можно построить для любого простого q) показывает, что в теореме 2 ряд $R \leqslant N \leqslant G$ в общем случае нельзя сократить до двух подгрупп. Более того, в следующем параграфе будут построены примеры, показывающие, что нельзя ограничить даже ранг $G/F_2(G)$. С другой стороны, будет доказано, что ранг $G/F_3(G)$ ограничен в терминах r и q.

Сформулируем очевидное следствие теорем 1 и 2.

Следствие 1. *Предположим, что конечная группа G допускает автоморфизм φ простого порядка q с подгруппой неподвижных точек $C_G(\varphi)$ ранга r. Если q не делит порядок G, то G содержит такие характеристические подгруппы $R \leqslant N \leqslant G$, что N/R нильпотентна и обе группы G/N и R имеют (q,r)-ограниченные ранги.*

Теорему 2 можно переформулировать в терминах конечной разрешимой группы, содержащей элемент простого порядка с централизатором данного ранга. Более того, обычные рассуждения, использующие понятие обратного предела, обобщают этот результат на локально конечные группы. Здесь группа имеет конечный ранг $\leqslant r$, если любая конечно порождённая подгруппа может быть порождена r элементами.

Следствие 2. *Предположим, что периодическая локально разрешимая группа G содержит элемент g простого порядка q, централизатор $C_G(g)$ которого имеет конечный ранг r. Тогда в G найдутся такие нормальные подгруппы*

$R \leqslant N \leqslant G$, что N/R локально нильпотентна и обе группы G/N и R имеют конечный (q,r)-ограниченный ранг.

Опять-таки, можно указать в явном виде верхнюю оценку функций от q и r, ограничивающих ранги в теореме 2 и следствии 2, хотя мы и не делаем этого. Объединяя теорему 2 с результатами из § 5 можно дополнительно добиться того, чтобы группа R в теореме 2 имела нильпотентную длину 2.

Для некоторых возможных приложений может оказаться важным контролировать порядки элементов групп G/N и R. Доказательство основных результатов действительно даёт такую возможность.

Следствие 3. *Предположим, что в условиях теоремы 2 (соответственно, следствия 2) число простых чисел, делящих порядки элементов из $C_G(\varphi)$ (из $C_G(g)$), конечно и равно m. Тогда можно добиться, чтобы число простых чисел, делящих порядки элементов групп N/R и R из заключения было (q,r,m)-ограниченным.*

В случае, когда G — разрешимая q'-группа нечётного порядка и, следовательно, в теоремах типа Холла–Хигмана не возникает исключительных ситуаций, основной результат можно слегка усилить, и мы сформулируем его отдельно. Мы используем коммутаторное обозначение для $[G,\varphi] = [G,\langle\varphi\rangle] = \langle [g,\varphi] \mid g \in G\rangle$ — наименьшей нормальной подгруппы из G, на факторе по которой φ действует тривиально.

Теорема 3. *Предположим, что конечная разрешимая q'-группа G нечётного порядка допускает автоморфизм φ простого порядка q, ранг централизатора $C_G(\varphi)$ которого равен r. Тогда $[G,\varphi]$ содержит такую характеристическую подгруппу R, что её ранг (q,r)-ограничен, а фактор $[G,\varphi]/R$ нильпотентен.*

Некоторая дополнительная информация здесь заключена в том, что для нормального ряда $G \geqslant [G,\varphi] \geqslant R$ с нильпотентным фактором $[G,\varphi]/R$ ранг R является (q,r)-ограниченным числом, а ранг $G/[G,\varphi]$ не превосходит r по лемме 1.

Доказательство теоремы 2 сочетает «немодулярные» теоремы типа Холла–Хигмана и теорию мощных p-групп. Построение мощной подгруппы аналогично части доказательства в работе Шумяцкого [36]. Известные факты используются, чтобы по индукции ограничить в терминах q и r нильпотентную длину. Эта индукция оказывается эффективной благодаря следующему полезному общему результату, который чудесным образом превращает нормальные подгруппы в характеристические.

Теорема 4. *Если конечная разрешимая группа G содержит такие нормальные подгруппы $R \leqslant N \leqslant G$, что N/R нильпотентна и ранги обеих групп G/N и R не превосходят r, то G содержит характеристические подгруппы $R_1 \leqslant N_1 \leqslant G$, для которых фактор N_1/R_1 нильпотентен, а ранги обеих групп G/N_1 и R_1 ограничены функцией от r.*

4.2. **Теоремы типа Холла–Хигмана.** Следующая лемма является ключевой в немодулярных теоремах типа Холла–Хигмана. Она в различных вариантах появлялась во многих работах. Предлагаемый вариант взят из [21].

Лемма 14. *Пусть $T\langle\varphi\rangle$ — полупрямое произведение нормальной t-подгруппы T и циклической группы $\langle\varphi\rangle$ порядка q, где t и q — различные простые числа.*

Предположим, что $T = [T, \varphi] \neq 1$ *и что фактор* $T/Z(T)$ *абелев периода* t. *Далее, пусть* $T\langle\varphi\rangle$ *действует точно и неприводимо на векторном пространстве* V *над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого отлична от* t *и* q. *Тогда либо*

(а) $C_V(\varphi) \neq 0$, *либо*

(б) $t = 2$, *группа* T *экстраспециальна,* $[Z(T), \varphi] = 1$, *порядок* $|T|$ *ограничен в терминах* q, *причем* $q = t^m + 1$ *для некоторого натурального числа* m. □

Пункт (б) этой леммы обычно называют исключительным случаем. Следующая лемма вытекает из неисключительного пункта (а).

Лемма 15. *Пусть* q *и* p *— различные простые числа и* $H\langle\varphi\rangle$ *— полупрямое произведение нормальной* $\{2, q, p\}'$*-подгруппы* H *и циклической группы* $\langle\varphi\rangle$ *порядка* q. *Пусть, далее,* $H = [H, \varphi] \neq 1$ *и группа* $H\langle\varphi\rangle$ *действует точно на векторном пространстве* V *над полем* $\mathbb{F}_p$ *порядка* p. *Тогда* $C_V(\varphi) \neq 0$.

Доказательство. Прежде всего расширим основное поле $\mathbb{F}_p$ до алгебраически замкнутого поля K, что не повлияет на тривиальность или нетривиальность $C_V(\varphi)$. Минимальная φ-инвариантная подгруппа T из H, на которой φ действует нетривиально, как известно, является t-подгруппой для некоторого простого t, удовлетворяющей условию леммы 14 (см. например теорему 5.3.7 в [17]). Поскольку $t \neq 2$, можно применить лемму 14(а) к любому неприводимому $KT\langle\varphi\rangle$-подмодулю модуля $V \otimes_{\mathbb{F}_p} K$, на котором T действует нетривиально. □

Нам будет удобно использовать следующий результат Хартли и Айзекса из [23], а именно теорему B, которую можно рассматривать как обобщение некоторых теорем типа Холла–Хигмана (хотя в нашей частной ситуации можно обойтись несколькими последовательными применениями леммы 14).

Теорема 5. (Хартли–Айзекс [23]) *Пусть* A *— произвольная конечная группа. Тогда существует число* $\delta = \delta(A)$, *зависящее только от* A, *со следующим свойством. Пусть* A *действует на* G, *где* G *— конечная разрешимая группа и* $(|G|, |A|) = 1$. *Пусть* k *— поле, характеристика которого не делит* $|A|$. *Пусть, далее,* V *— любой неприводимый* kAG*-модуль и* S *— произвольный* kA*-модуль, который появляется в качестве компоненты ограничения* V_A. *Тогда* $\dim_k V \leqslant \delta m_S$, *где* m_S *— кратность* S *в* V_A.

Существует явная оценка числа δ, которую можно использовать для получения явной оценки функций из основных результатов настоящей работы. Мы применим этот результат к $A = \langle\varphi\rangle$, чтобы получить верхнюю оценку размерности V в терминах размерности $C_V(\varphi)$ (которая равна кратности появления тривиального $k\langle\varphi\rangle$-модуля), если $C_V(\varphi) \neq 0$. В неисключительном случае можно применить лемму 15, которая показывает, что $C_V(\varphi) \neq 0$. В исключительном случае требуются более тонкие рассуждения.

Следующие две леммы вполне элементарны. Обозначим через $\gamma_i(X)$ члены нижнего центрального ряда группы X, начиная с $\gamma_1(X) = X$. Положим $\gamma_\infty(X) = \bigcap_i \gamma_i(X)$. Члены ряда Фиттинга, начиная с подгруппы Фиттинга $F_1(X) = F(X)$, обозначим через $F_i(X)$.

Лемма 16. *Для любой конечной группы* $H = F_2(H)$ *нильпотентной длины* 2

$$\gamma_\infty(H) = \prod_p [F_p, H_{p'}] = \prod_{p \neq t} [F_p, H_t], \tag{1}$$

где F_p — силовская p-подгруппа из $F(H)$, $H_{p'}$ — холлова p'-подгруппа в H и H_t — силовская t-подгруппа в H.

Доказательство. Коммутанты $[F_p, H_{p'}]$ и $[F_p, H_t]$ для $t \neq p$ очевидно не зависят от выбора холловой p'-подгруппы или силовской t-подгруппы из H, поэтому произведения в (1) определены корректно. В частности, $[F_p, H_{p'}]$ и $[F_p, H_t]$ нормальны в H, как и их произведения.

Пусть p — произвольное простое число и H_p — силовская p-подгруппа из H. По модулю $[F_p, H_{p'}]$ группа $H = H_pH_{p'}$ действует на F_p как образ подгруппы H_p. Поэтому фактор-группа $H/\prod_p[F_p, H_{p'}]$ нильпотентна. Отсюда $\gamma_\infty(H) \leqslant \prod_p[F_p, H_{p'}]$.

С другой стороны, поскольку $[[F_p, H_{p'}], H_{p'}] = [F_p, H_{p'}]$ по известным свойствам взаимно простого действия (см. лемму 1), включение $[F_p, H_{p'}] \leqslant \gamma_\infty(H)$ справедливо для каждого p, поэтому $\gamma_\infty(H) \geqslant \prod_p[F_p, H_{p'}]$, и первое равенство из (1) выполнено.

Для любого p имеет место равенство $[F_p, H_{p'}] = \prod_{t\neq p}[F_p, H_t]$, поскольку все $[F_p, H_t]$ нормальны в H и $H_{p'} = \prod_{t\neq p} H_t$. □

Лемма 17. *Пусть π — множество простых чисел. Предположим, что G — π-отделимая конечная группа, допускающая такой автоморфизм φ, что $G = [G, \varphi]$. Пусть H — φ-инвариантная холлова π'-подгруппа группы G, а X — нормальная φ-инвариантная подгруппа из G, для которой $H \nleqslant X$. Тогда и $[H, \varphi] \nleqslant X$.*

Доказательство. Можно считать, что $X = 1$. Предположим, напротив, что $[H, \varphi] = 1$. Рассмотрим какой-нибудь φ-инвариантный нормальный ряд

$$G > G_1 > G_2 > \cdots > 1$$

группы G, факторы которого попеременно являются нетривиальными π- и π'-группами. Фактор G/G_1 не может быть π'-группой, поскольку $[G, \varphi] = G$ и по условию $[H, \varphi] = 1$. Поэтому G_1/G_2 является π'-группой и следовательно $[G_1, \varphi] \leqslant G_2$ по нашему предположению. Теперь

$$[[G, G_1], \varphi] \leqslant [G_1, \varphi] \leqslant G_2 \qquad \text{и} \qquad [[G_1, \varphi], G] \leqslant [G_2, G] \leqslant G_2.$$

По лемме о трёх коммутантах отсюда вытекает, что

$$[[\varphi, G], G_1] = [G, G_1] \leqslant G_2.$$

Это означает, что образ G_1 централен в G/G_2. Поскольку этот образ является холловой π'-подгруппой в G/G_2, группа G/G_2 — прямое произведением её холловой π-подгруппы и G_1/G_2. Однако это противоречит равенству $G = [G, \varphi]$. □

Воспроизведём для удобства один из результатов работы [8], доказательство которого основывается на лемме 14 и известных фактах в духе теоремы Колчина–Мальцева о конечных разрешимых линейных группах.

Лемма 18. *Если конечная разрешимая q'-группа G допускает такой автоморфизм φ простого порядка q, что ранг $C_G(\varphi)$ равен r, то*

(а) *для любого простого числа p ранг холловой p'-подгруппы фактора $G/O_{p',p}(G)$ является (q, r)-ограниченным;*

(б) *$G/F_5(G)$ имеет (q, r)-ограниченный порядок, и нильпотентная длина G является (q, r)-ограниченной.*

Доказательство. Пункт (a) — это предложение 1 в [8].

По теореме 1 из [8] группа G обладает нормальным рядом
$$1 \leqslant G_1 \leqslant G_2 \leqslant G_3 \leqslant G_4 \leqslant G_5 \leqslant G, \qquad (2)$$
факторы G_1 и G_2/G_1 которого нильпотентны, фактор G_3/G_2 нильпотентен (q,r)-ограниченной ступени нильпотентности, фактор G_4/G_3 абелев, фактор G_5/G_4 нильпотентен q-ограниченной ступени нильпотентности, а фактор G/G_5 имеет (q,r)-ограниченный ранг. В доказательстве теоремы 1 из [8] для случая, когда $|G|$ взаимно прост с q, в действительности показано, что существует нормальный ряд вида (2), для которого G/G_5 имеет (q,r)-ограниченный порядок. В этом случае, в частности, нильпотентная длина G является (q,r)-ограниченной. (Можно, конечно, для ограничения нильпотентной длины $C_G(\varphi)$ использовать лемму 8, а затем применить теорему Томпсона [38], но приведённое выше доказательство, возможно, даёт лучшие оценки.) □

4.3. **Неисключительный разрешимый взаимно простой случай. Доказательство теоремы 3.** По лемме 18(б) нильпотентная длина G является (q,r)-ограниченной. Теорема 3 получится применением индукции по нильпотентной длине G, если будет доказано следующее предложение. Мы сформулируем его в том (несколько более общем) виде, в каком оно понадобится позже.

Предложение 1. *Пусть конечная q'-группа G допускает такой автоморфизм φ простого порядка q, что ранг $C_G(\varphi)$ равен r. Предположим, что $G=[G,\varphi]$, и пусть L — нормальная φ-инвариантная подгруппа из G, для которой порядок $F_2(L)/F_1(L)$ нечётен. Тогда подгруппа $\gamma_\infty(F_2(L))$ имеет (q,r)-ограниченный ранг.*

Завершение доказательства теоремы 3 по модулю предложения 1. Можно считать, что $G=[G,\varphi]$. По предложению 1, примененному к $L=G$, ранг подгруппы $\gamma_\infty(F_2(G))$ является (q,r)-ограниченным. Эта подгруппа характеристична в G и образ $F_2(G)$ в факторе $G/\gamma_\infty(F_2(G))$ нильпотентен. Поэтому нильпотентная длина фактора $G/\gamma_\infty(F_2(G))$ меньше, чем у исходной группы. По индукционному предположению, этот фактор обладает характеристической подгруппой (q,r)-ограниченного ранга с нильпотентной фактор-группой. Полный прообраз этой подгруппы — искомая характеристическая подгруппа с нильпотентным фактором: её ранг (q,r)-ограничен, поскольку число индукционных шагов (q,r)-ограничено нильпотентной длиной группы G. □

Доказательство предложения 1. Пусть p — произвольный простой делитель порядка $F(L)$ и пусть $\pi=\{2,p\}$ (мы не исключаем случай $p=2$, когда, понятно, $\pi=\{2\}$). Пусть P — силовская p-подгруппа из $F(L)$, а H — холлова π'-подгруппа из G. Тогда $H_2=H\cap F_2(L)$ — холлова π'-подгруппа в $F_2(L)$, поскольку $F_2(L)$ нормальна в G. Так как $2\nmid |F_2(L)/F_1(L)|$, то действие H_2 на P совпадает с действием холловой p'-подгруппы из $F_2(L)$. По леммам 5(а) и 16 достаточно доказать, что $P_1=[P,H_2]$ имеет (q,r)-ограниченный ранг. Отметим, что P_1 — нормальная φ-инвариантная подгруппа в G, поскольку она является нормальной силовской p-подгруппой нильпотентной нормальной φ-инвариантной подгруппы $\gamma_\infty(F_2(L))\leqslant F(L)$. Очевидно, можно считать, что $P_1\neq 1$. Заметим, что $P_1=[P_1,H_2]$, поскольку действие взаимно простое.

Наша ближайшая цель — оценить число порождающих P_1.

Лемма 19. *Минимальное число порождающих группы P_1 является (q, r)-ограниченным.*

Доказательство. Рассмотрим фактор Фраттини $V = P_1/\Phi(P_1)$ как $\mathbb{F}_pG\langle\varphi\rangle$-модуль. Пусть

$$V = V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots \supset 0$$

— композиционный ряд, так что каждый фактор $U_i = V_i/V_{i+1}$ является неприводимым $\mathbb{F}_pG\langle\varphi\rangle$-модулем. По теореме Машке $[U_i, H_2] = U_i$ для каждого i. В частности, H действует нетривиально на U_i. По лемме 17, где X — ядро действия G на U_i и $\pi = \{2, p\}$, заключаем, что $[H, \varphi]$ также действует нетривиально на U_i. Так как $[[H, \varphi], \varphi] = [H, \varphi]$, то $C_{U_i}(\varphi) \neq 0$ по лемме 15. По теореме Хартли–Айзекса получаем, что $\dim_{\mathbb{F}_p} U_i \leqslant \delta \dim_{\mathbb{F}_p} C_{U_i}(\varphi)$, где δ является q-ограниченным числом (в неисключительной ситуации здесь можно на самом деле положить $\delta(\langle\varphi\rangle) = q$). Так как $\dim_{\mathbb{F}_p} C_V(\varphi) = \sum_i \dim_{\mathbb{F}_p} C_{U_i}(\varphi)$, то в результате получаем

$$\dim_{\mathbb{F}_p} V = \sum_i \dim_{\mathbb{F}_p} U_i \leqslant \delta \dim_{\mathbb{F}_p} C_V(\varphi) \leqslant \delta r,$$

то есть число порождающих группы P_1 является (q, r)-ограниченным. □

Наша следующая цель — показать, что P_1 обладает мощной p-подгруппой ограниченного ранга и «коранга». Построение мощной подгруппы аналогично части доказательства Шумяцкого в [36]. Пусть M — нормальная φ-инвариантная подгруппа из G, содержащаяся в P_1. Добавлением черты сверху будем обозначать образы в факторе $\overline{P}_1 = P_1/M^p$ (или в P_1/M^4, если $p = 2$). Так как $\overline{M} = M/M^p$ (или M/M^4) имеет период p (или 4), то *порядок* централизатора φ в этой группе по лемме 9 не превосходит p^f (или 2^f) для некоторого r-ограниченного числа $f = f(r)$.

Обозначим через $\zeta_i(X)$ члены верхнего центрального ряда, начиная с центра $\zeta_1(X) = Z(X)$.

Лемма 20. $\overline{M} \leqslant \zeta_{2f+1}(\overline{P}_1)$.

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$M_1 = \overline{M} > M_2 > M_3 > \cdots > 1,$$

где

$$M_i = [\overline{M}, \underbrace{\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_1}_{i-1}].$$

Все M_i — нормальные φ-инвариантные подгруппы группы G. Пусть $V_i = M_i/M_{i+1}$ — факторы этого ряда. Поскольку это центральный ряд в $\overline{P}_1$, все V_i — элементарные абелевы p-подгруппы и их можно считать $\mathbb{F}_pG\langle\varphi\rangle$-модулями.

Так как $[V_i, H_2] \neq 0$, то $[V_i, H] \neq 0$, и поэтому $[V_i, [H, \varphi]] \neq 0$ по лемме 17, в которой X — ядро действия G на V_i, а $\pi = \{2, p\}$. Теперь лемма 15 показывает, что $C_{V_i}(\varphi) \neq 0$. Поскольку $|C_{\overline{M}}(\varphi)| \leqslant p^f$, неравенство $[V_i, H_2] \neq 0$ может выполняться не больше чем для f из факторов V_i. Поэтому для некоторого $k \leqslant 2f + 1$ одновременно $[V_k, H_2] = 0$ и $[V_{k+1}, H_2] = 0$. Другими словами,

$$[[H_2, M_k], P_1] \leqslant [M_{k+1}, P_1] = M_{k+2}$$

и
$$[[M_k, P_1], H_2] = [M_{k+1}, H_2] \leqslant M_{k+2}.$$
По лемме о трёх коммутантах
$$[[P_1, H_2], M_k] = [P_1, M_k] = M_{k+1} \leqslant M_{k+2}.$$
Значит $M_{k+1} = 1$, поскольку $\overline{P}_1$ нильпотентна. Это в точности означает, что $\overline{M} \leqslant \zeta_k(\overline{P}_1) \leqslant \zeta_{2f+1}(\overline{P}_1)$. □

Пусть теперь $M = \gamma_{2f+1}(P_1)$. Тогда
$$[\overline{M}, \overline{M}] \leqslant [\gamma_{2f+1}(\overline{P}_1),\ \zeta_{2f+1}(\overline{P}_1)] = 1,$$
то есть $[M, M] \leqslant M^p$ (или $[M, M] \leqslant M^4$). Это означает, что $M = \gamma_{2f+1}(P_1)$ — мощная p-подгруппа в P_1.

Теперь фактор $P_1/\gamma_{2f+1}(P_1)^p$ нильпотентен ступени $4f + 1$. Поскольку P_1 порождается (q, r)-ограниченным числом элементов и $P_1/\gamma_{2f+1}(P_1)^p$ нильпотентна (q, r)-ограниченной ступени, ранг $P_1/\gamma_{2f+1}(P_1)^p$ является (q, r)-ограниченным. В частности, ранг фактор-группы $\gamma_{2f+1}(P_1)/\gamma_{2f+1}(P_1)^p$ также (q, r)-ограничен, а он по лемме 6 совпадает с рангом мощной p-подгруппы $\gamma_{2f+1}(P_1)$. Таким образом, ранг P_1, как и требуется, (q, r)-ограничен. Предложение 1 и, следовательно, теорема 3 доказаны. □

4.4. **Разрешимый взаимно простой случай.** В этом пункте мы получим лишь нормальный, а не характеристический ряд.

Предложение 2. *Пусть конечная разрешимая q'-группа G допускает автоморфизм φ простого порядка q, для которого ранг $C_G(\varphi)$ равен r. Тогда существует такой нормальный ряд $R \leqslant N \leqslant G$, что N/R нильпотентна, а обе группы G/N и R имеют (q, r)-ограниченные ранги.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3 (или результата Шумяцкого [36]) можно считать, что $q \neq 2$. Исключительная ситуация леммы 14(б), которая мешает в общем случае применить доказательство теоремы 3, может возникнуть только если 2-подгруппа появляется в одной из рассматриваемых холловых подгрупп, действующих на элементарных p-группах.

Рассмотрим вначале фактор $G/O_{2',2}([G, \varphi])$.

Лемма 21. *Ранг $G/O_{2',2}([G, \varphi])$ является (q, r)-ограниченным.*

Доказательство. Ранг $G/[G, \varphi]$ не больше r по лемме 1, поэтому достаточно ограничить ранг $[G, \varphi]/O_{2',2}([G, \varphi])$. По лемме 18(а) ранг холловой $2'$-подгруппы фактор-группы $[G, \varphi]/O_{2',2}([G, \varphi])$ является (q, r)-ограниченным. По лемме 5(а) остаётся ограничить ранг силовской 2-подгруппы.

Пусть добавление верхней черты обозначает взятие образов в
$$\overline{[G, \varphi]} = ([G, \varphi]/O_{2'}([G, \varphi])\Big/\Phi(O_{2',2}([G, \varphi])/O_{2'}([G, \varphi]))$$

Положим $V = \overline{O_{2',2}([G, \varphi])}$. Тогда $[G, \varphi]/O_{2',2}([G, \varphi])$ действует точно на элементарной абелевой 2-группе V, которая совпадает с подгруппой Фиттинга группы $\overline{[G, \varphi]}$, в то время как порядок $F_2(\overline{[G, \varphi]})/V$ нечётен. Пусть $F = F_2(\overline{[G, \varphi]})/V$. По предложению 1 ранг $[V, F] = \gamma_\infty(F_2(\overline{[G, \varphi]}))$ является (q, r)-ограниченным.

Пусть T — силовская 2-подгруппа в $[G,\varphi]/O_{2',2}([G,\varphi])$. Стандартные рассуждения показывают, что T действует точно на $[V,F]$. А именно, пусть $T_0 = C_T([V,F])$. Тогда

$$[[F,\,[V,F]],\,T_0] = [[V,F],\,T_0] = 1 \qquad \text{и} \qquad [[[V,F],\,,T_0],\,F] = 1;$$

следовательно, по лемме о трёх коммутантах

$$[[T_0,F],\,[V,F]] = 1.$$

Но $[T_0,F] \leqslant F$ действует тривиально и на $V/[V,F]$; значит, $[T_0,F]$ действует тривиально на V из-за взаимной простоты действия. Тогда $[T_0,F]=1$, поскольку действие F на V является точным. Так как F — группа нечётного порядка, равная подгруппе Фиттинга группы $[G,\varphi]/O_{2',2}([G,\varphi])$, получаем $T_0 = 1$.

Итак, 2-группа T действует точно на 2-группе $[V,F]$, ранг которой (q,r)-ограничен. Следовательно, по лемме 3 ранг T также (q,r)-ограничен. □

По лемме 18(б) группа G имеет (q,r)-ограниченную нильпотентную длину. Теперь мы используем предложение 1 и индукцию по нильпотентной длине, чтобы доказать, что подгруппа $\gamma_\infty(O_{2'}([G,\varphi]))$ имеет (q,r)-ограниченный ранг. Поскольку эта подгруппа является характеристической в $[G,\varphi]$, она нормальна в $G\langle\varphi\rangle$. Это даст возможность считать, что $\gamma_\infty(O_{2'}([G,\varphi])) = 1$, то есть, что $O_{2'}([G,\varphi])$ нильпотентна.

Лемма 22. *Ранг $\gamma_\infty(O_{2'}([G,\varphi]))$ является (q,r)-ограниченным.*

Доказательство. Индукция по нильпотентной длине, которая (q,r)-ограничена по лемме 18(б), сводит доказательство к проверке того, что ранг группы $\gamma_\infty(F_2(O_{2'}([G,\varphi])))$ является (q,r)-ограниченным, а это следует из предложения 1, применённого к $[G,\varphi] = [[G,\varphi],\varphi]$ при $L = O_{2'}([G,\varphi])$. □

Итак, с этого места мы считаем, что подгруппа $O_{2'}([G,\varphi])$ нильпотентна. Положим $H = O_{2',2}([G,\varphi])$; эта подгруппа равна полупрямому произведению нормальной нильпотентной $2'$-подгруппы и 2-группы. Оставшиеся рассуждения призваны исключить исключительные ситуации. Пусть W означает φ-инвариантную силовскую 2-подгруппу из H. Основная идея заключается в том, чтобы «вытолкнуть вверх» исключительные «плохие» части группы W; оказывается, что они образуют только фактор-группу (q,r)-ограниченного ранга. Доказательство для оставшихся «хороших» частей H аналогично доказательству теоремы 3.

Пусть $\mathfrak{V}$ — множество всех $G\langle\varphi\rangle$-инвариантных секций V подгруппы $O_{2'}(H)$, которые являются элементарными абелевыми p-группами (для различных простых чисел p) и удовлетворяют следующим двум условиям:

(i) V — композиционный фактор $G\langle\varphi\rangle$ (то есть неприводимый $\mathbb{F}_pG\langle\varphi\rangle$-модуль);

(ii) $C_V(\varphi) = 1$.

Первое условие не очень существенно, но оно упрощает следующее определение. Положим

$$K = \bigcap_{V\in\mathfrak{V}} C_H(V).$$

Очевидно, что K — нормальная φ-инвариантная подгруппа в G. Поскольку $O_{2'}(H)$ нильпотентна, условие (i) показывает, что любая $V \in \mathfrak{V}$ является центральной секцией в $O_{2'}(H)$. Следовательно $C_H(V) \geqslant O_{2'}(H)$ и $C_H(V) =$

$O_{2'}(H)C_W(V)$, поскольку $H = O_{2'}(H)W$, где, напомним, W — это φ-инвариантная силовская 2-подгруппа в H. Поэтому $K = O_{2'}(H) \cdot \bigcap_{V\in\mathfrak{V}} C_W(V)$.

Идея заключается в том, что рассуждения, аналогичные тем, которые использовались для доказательства неисключительного предложения 1, можно применить к группе K, для которой G/K имеет (q,r)-ограниченный ранг. После этого $\gamma_\infty(K)$ станет характеристической подгруппой в K с нильпотентным фактором, ранг которой (q,r)-ограничен, что и завершит доказательство.

Лемма 23. *Ранг G/K является (q,r)-ограниченным.*

Доказательство. Поскольку ранг G/H по лемме 21 (q,r)-ограничен, достаточно ограничить ранг $H/K \cong W/W\cap K = W/\bigcap_{V\in\mathfrak{V}} C_W(V)$. Пусть C — критическая подгруппа в $W/W\cap K$; напомним, что C — характеристическая подгруппа в $W/W\cap K$ ступени нильпотентности 2, содержащая свой централизатор в $W/W\cap K$, для которой период $C/Z(C)$ равен 2 (см., например, теорему 5.3.11 в [17]). По лемме 3 достаточно ограничить ранг C. Последний, в свою очередь ограничен в терминах ранга максимальной абелевой нормальной подгруппы B из C. Так как ранг B равен рангу $\Omega_1(B)$, то достаточно ограничить ранг группы $\Omega_1(C)$, которая является φ-инвариантной подгруппой в $W/W\cap K$. Поскольку период $\Omega_1(C)$ делит 4, это эквивалентно ограничению порядка $\Omega_1(C)$. Понятно, что $\Omega_1(C)/Z(\Omega_1(C))$ также периода 2 и значит $|C_{\Omega_1(C)}(\varphi)| = 2^s \leqslant 2^{3r}$.

Чтобы воспользоваться индукцией по s, нам нужно доказать, что если D — любая φ-инвариантная подгруппа группы $W/W\cap K$ ступени нильпотентности 2, для которой $D/Z(D)$ имеет период 2 и $|C_D(\varphi)| = 2^s$, то порядок D обязательно (q,s)-ограничен. Тем самым будет завершено доказательство леммы 23.

Мы сейчас увидим, что $D = 1$, если $s = 0$, что даст нам основание индукции при $s = 0$. Ранг фактора $D/[D,\varphi]$ не превосходит r, а его период делит 4; поэтому его порядок мал. Заменив при необходимости D на $[D,\varphi]$, можно считать, что $D = [D,\varphi]$. Если $D \neq 1$, то существует такая секция $V \in \mathfrak{V}$, что D действует нетривиально на V (действие определено корректно, поскольку D — подгруппа в $W/W\cap K$ и $C_W(V) \geqslant W\cap K$). Рассмотрим V как $\mathbb{F}_p D\langle\varphi\rangle$-модуль (для подходящего p), расширим основное поле и рассмотрим неприводимый подмодуль U, на котором D действует нетривиально. Фактор $D/C_D(U)$ также двуступенно нильпотентен, его фактор по центру элементарен и $[D/C_D(U),\, \varphi] = D/C_D(U)$. Поэтому группа $D/C_D(U)\langle\varphi\rangle$ в её действии на U удовлетворяет условиям леммы 14. Поскольку $C_U(\varphi) = 1$, должен иметь место исключительный случай леммы 14(б). В результате возникает нетривиальная неподвижная точка φ в $D/C_D(U)$, принадлежащая центру этой экстраспециальной секции (в частности, $C_D(\varphi) \neq 1$, поэтому у нас есть основание индукции при $s = 0$). Кроме того, порядок $D/C_D(U)$ является q-ограниченным. Остаётся применить индукционное предположение к подгруппе $C_D(U)$, в которой число неподвижных точек φ меньше по лемме 1. □

Лемма 24. *Ранг $\gamma_\infty(K)$ является (q,r)-ограниченным.*

Доказательство. По леммам 7(а) и 16 достаточно для каждого простого числа $p \neq 2$ ограничить ранг $P_1 = [P,Y]$, где P — силовская p-подгруппа в $F(K)$, а $Y = W\cap K$ — это φ-инвариантная силовская 2-подгруппа из K (напомним, что $K/F(K)$ является 2-группой). Положим $\pi = \{p\}$ и по-существу повторим рассуждения из доказательства предложения 1.

Вначале ограничим ранг $V = P_1/\Phi(P_1)$. Отметим, что $V = [V, Y]$. Рассмотрим V как $\mathbb{F}_pG\langle\varphi\rangle$-модуль. Пусть $V = V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ — ряд $\mathbb{F}_pG\langle\varphi\rangle$-подмодулей с неприводимыми факторами $U_i = V_i/V_{i+1}$. Поскольку Y действует нетривиально на каждом U_i, неизбежно $C_{U_i}(\varphi) \neq 0$ по определению $K \geqslant Y$ и пункту (ii) в определении $\mathfrak{V}$. Теперь по теореме Хартли–Айзекса $\mathbb{F}_p$-размерность U_i ограничена в терминах q и $\mathbb{F}_p$-размерности подпространства $C_{U_i}(\varphi)$. Так как $\sum_i \dim_{\mathbb{F}_p} C_{U_i}(\varphi) \leqslant r$, то $\mathbb{F}_p$-размерность пространства V, равная $\sum_i \dim_{\mathbb{F}_p} U_i$, является (q, r)-ограниченной.

Далее покажем, что P_1 содержит мощную p-подгруппу ограниченного ранга и «коранга». Пусть M — нормальная φ-инвариантная подгруппа группы G, содержащаяся в P_1. Будем добавлять верхнюю черту при обозначении образов в факторе $\overline{P}_1 = P_1/M^p$. Поскольку период $\overline{M} = M/M^p$ равен p, порядок централизатора φ в этой группе по лемме 9 не превосходит p^f для некоторого r-ограниченного числа $f = f(r)$.

Утверждается, что $\overline{M} \leqslant \zeta_{2f+1}(\overline{P}_1)$. Рассмотрим ряд

$$M_1 = \overline{M} > M_2 > M_3 > \cdots > 1,$$

где

$$M_i = [\overline{M}, \underbrace{\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_1}_{i-1}].$$

Все M_i являются нормальными φ-инвариантными подгруппами в G. Пусть $V_i = M_i/M_{i+1}$ — факторы этого ряда. Поскольку этот ряд централен в $\overline{P}_1$, все V_i являются элементарными абелевыми p-группами и могут считаться $\mathbb{F}_pG\langle\varphi\rangle$-модулями.

Предположим, что $[V_i, Y] \neq 0$ для некоторого i. Поскольку $[V_i, Y] = \gamma_\infty(V_iK)$ по лемме 16 и группы V_i и K обе $G\langle\varphi\rangle$-инвариантны, группа $[V_i, Y]$ также $G\langle\varphi\rangle$-инвариантна. Если U — неприводимый $\mathbb{F}_pG\langle\varphi\rangle$-подмодуль в $[V_i, Y]$, то $C_{V_i}(\varphi) \neq 0$ по определению $K \geqslant Y$. Итак, $C_{V_i}(\varphi) \neq 0$, если $[V_i, Y] \neq 0$.

Поскольку $|C_{\overline{M}}(\varphi)| \leqslant p^f$, условию $[V_i, Y] \neq 0$ могут удовлетворять не более f из факторов V_i. Следовательно, для некоторого $k \leqslant 2f + 1$ одновременно $[V_k, Y] = 0$ и $[V_{k+1}, Y] = 0$. Другими словами,

$$[[Y, M_k], P_1] \leqslant [M_{k+1}, P_1] = M_{k+2}$$

и

$$[[M_k, P_1], Y] = [M_{k+1}, Y] \leqslant M_{k+2}.$$

По лемме о трёх коммутантах имеет место также

$$[[P_1, Y], M_k] = [P_1, M_k] = M_{k+1} \leqslant M_{k+2}.$$

Значит $M_{k+1} = 1$. Это означает, что $\overline{M} \leqslant \zeta_k(\overline{P}_1) \leqslant \zeta_{2f+1}(\overline{P}_1)$.

Теперь положим $M = \gamma_{2f+1}(P_1)$. Тогда

$$[\overline{M}, \overline{M}] \leqslant [\gamma_{2f+1}(\overline{P}_1),\, \zeta_{2f+1}(\overline{P}_1)] = 1,$$

то есть $[M, M] \leqslant M^p$. Итак, $M = \gamma_{2f+1}(P_1)$ — мощная p-подгруппа в P_1.

Теперь фактор $P_1/\gamma_{2f+1}(P_1)^p$ нильпотентен ступени нильпотентности $4f+1$. Так как группа P_1 порождается (q, r)-ограниченным числом элементов, группа $P_1/\gamma_{2f+1}(P_1)^p$ нильпотентна и её ступень нильпотентности (q, r)-ограничена, то ранг группы $P_1/\gamma_{2f+1}(P_1)^p$ также (q, r)-ограничен. В частности, в этих же терминах ограничен ранг $\gamma_{2f+1}(P_1)/\gamma_{2f+1}(P_1)^p$, совпадающий с рангом мощной

p-подгруппы $\gamma_{2f+1}(P_1)$. В результате получаем, что ранг P_1, как и утверждалось, (q,r)-ограничен. Лемма 24 и вместе с ней предложение 2 доказаны. $\square$

4.5. **Характеристичность взамен нормальности. Доказательство теоремы 4.** По лемме 8 нильпотентная длина N является r-ограниченной и мы используем индукцию по этой длине. Если N нильпотентна, то можно положить $N_1 = F(G)$ и $R_1 = 1$.

Предположив, что N ненильпотентна, рассмотрим $S = \gamma_\infty(F_2(N))$, которая является нормальной нильпотентной подгруппой из G, содержащейся в R. Для краткости обозначим $A = \operatorname{Aut} G$. Достаточно показать, что автоморфное замыкание S

$$S^A = \prod_{a\in\operatorname{Aut} G} S^a$$

имеет r-ограниченный ранг.

В этом случае индукционное предположение можно применить к фактору G/S^A по этой характеристической подгруппе: полные прообразы соответствующих характеристических подгрупп будут искомыми подгруппами группы G. Ранг таким образом построенной подгруппы R_1 будет r-ограниченным, поскольку число шагов в этом процессе r-ограничено нильпотентной длиной N.

Далее, по лемме 5(a) достаточно ограничить ранг силовской p-подгруппы группы S^A для каждого простого числа p. Пусть P (единственная) силовская p-подгруппа в S. Тогда $P^A = \prod\limits_{a\in\operatorname{Aut} G} P^a$ — (нормальная) силовская p-подгруппа в S^A. Пусть $V = P^A/\Phi(P^A)$. Достаточно доказать, что ранг V является r-ограниченным. Действительно, тогда мы сможем выбрать r-ограниченное число k таких автоморфизмов $a_1,\dots,a_k \in A$, что

$$\prod_{i=1}^{k} P^{a_i}\Phi(P^A)/\Phi(P^A) = V = P^A/\Phi(P^A).$$

Следовательно по теореме Бернсайда о базисе $\prod\limits_{i=1}^{k} P^{a_i} = P^A$ и потому P^A имеет ранг не выше kr, поскольку $P \leqslant R$.

По лемме 16 имеем $P = \prod\limits_{t\neq p} [P, S_t]$, где S_t — силовская t-подгруппа в $F_2(N)$ (или можно считать, что S_t — силовская t-подгруппа в $F_2(N)/S$). Поскольку ранг $P/\Phi(P)$ не превосходит r, можно так выбрать r-ограниченное число простых чисел $t_1,\dots,t_m$, отличных от p, и элементы h_{ij} в силовской t_i-подгруппе группы $F_2(N)/S$, что

$$P/\Phi(P) = \prod_{i,j} [P/\Phi(P),\, h_{ij}].$$

Тогда

$$\begin{aligned} V &= \prod_{a\in \operatorname{Aut} G}\prod_{i,j}[P^a,\, h_{ij}^a]\Phi(P^A)/\Phi(P^A) \\ &\leqslant \prod_{i,j,a}[V,\, h_{ij}^a] = \prod_i\prod_{j,a}[V,\, h_{ij}^a] \qquad (3) \\ &\leqslant \prod_i [V,\, \langle h_{ij}^a \mid j,\, a\rangle]. \end{aligned}$$

Отметим, что для любого i образ подгруппы $\langle h_{ij}^a \mid j,\, a\rangle$ в $G/C_G(V)$ содержится в силовской t_i-подгруппе T_i нильпотентного фактора $F_2(N)^A C_G(V)/C_G(V)$.

Теперь пусть t — одно из чисел t_i и пусть T — (нормальная) силовская t-подгруппа в $F_2(N)^A C_G(V)/C_G(V)$. Утверждается, что ранг T является r-ограниченным. Пусть черта обозначает образы в $G/C_G(V)$. По условию на G/N ранг $T/T\cap \overline{N}$ не превосходит r. По той же причине ранг $V/V\cap N$ не превосходит r. Так как $t\neq p$ и N/R нильпотентна, взаимный коммутант $[T\cap \overline{N},\, V\cap N]$ содержится в $R\Phi(P^A)/\Phi(P^A)$ и поэтому его ранг не превосходит r.

По теореме Машке ранг $(V\cap N)/C_{V\cap N}(T\cap \overline{N})$ не превосходит r и поэтому ранг $V/C_V(T\cap\overline{N})$ не превосходит $2r$; то же самое верно и для $[V,\, T\cap \overline{N}]$. Поскольку $T\cap\overline{N}$ действует точно на $[V,\, T\cap\overline{N}]$, ранг $T\cap\overline{N}$ по лемме 6 r-ограничен. Поэтому ранг T также r-ограничен.

Отметим, что по той же причине ранг $[V, h_{ij}]$ не превосходит $2r$; поэтому для любого $a\in \operatorname{Aut} G$ ранг $[V, h_{ij}^a]$ также не превосходит $2r$.

Теперь для каждого данного i рассмотрим образы в $G/C_G(V)$ элементов h_{ij}^a, $a\in \operatorname{Aut} G$. Все они содержатся в силовской t_i-подгруппе T_i группы $\overline{F_2(N)^A}$, ранг которой r-ограничен, как показано выше. По теореме Бернсайда о базисе можно выбрать r-ограниченное число n_i элементов среди h_{ij}^a, скажем, $h_{ij_k}^{a_k}$, $k=1,\dots,n_i$, которые порождают ту же самую подгруппу, что и все h_{ij}^a. Поскольку ранг каждой группы $[V, h_{ij_k}^{a_k}]$ не превосходит $2r$, для каждого i ранг $[V,\, \langle h_{ij}^a \mid j,\, a\rangle] = [V,\, \langle h_{ij_k}^{a_k} \mid k\rangle]$ в действительности r-ограничен числом $2rn_i$. Взяв сумму по всему r-ограниченному числу простых чисел t_i, участвующему в (3), получим r-ограниченную оценку ранга V, как и требовалось. $\square$

4.6. **Завершение доказательства теоремы 2 и следствий 2, 3. Доказательство теоремы 2.** Применяя предложение 1 и теорему 4 к $O_{q'}(G)$, получим характеристические подгруппы этой группы с нужными свойствами. Эти подгруппы характеристичны и в G. Осталось доказать (q,r)-ограниченность ранга $G/O_{q'}(G)$. Действительно, ранг силовской q-подгруппы G по лемме 4 (q,r)-ограничен. Пусть $Q=O_{q',q}(G)/O_{q'}(G)$. Группа $G/O_{q',q}(G)$ действует точно при сопряжении на $Q/\Phi(Q)$. Последняя группа абелева периода q, ранг которой (q,r)-ограничен, поэтому порядок $Q/\Phi(Q)$ является (q,r)-ограниченным. В результате получаем, что порядок $G/O_{q',q}(G)$ также (q,r)-ограничен. Отсюда вытекает, что и ранг $G/O_{q'}(G)$ является (q,r)-ограниченным. $\square$

Доказательство следствия 2. Используем известный приём обратного предела. Пусть Σ — семейство всех конечных подгрупп из G, содержащих g. Относительно включения оно является направленным частично упорядоченным множеством. Для каждого $H \in \Sigma$ пусть S_H — множество всех пар (N, R) нормальных подгрупп $H > N > R$, таких что N/R нильпотентна, а ранги H/N и R ограничены функцией $f(q, r)$, существование которой гарантируется теоремой 2. Любое S_H непусто по теореме 2, применённой к H и её внутреннему автоморфизму, индуцированному элементом g. Ясно, что S_H конечно. Для любых $H_1, H_2 \in \Sigma$, удовлетворяющих $H_1 \geqslant H_2$, существует отображение $\varphi_{H_1,H_2} : S_{H_1} \to S_{H_2}$ заданное взятием пересечениями с H_2. Эта обратная система непустых конечных множеств имеет непустой обратный предел (см. например теорему 1.K.1 в [24]). Объединения соответствующих подгрупп типа N и R по произвольному элементу обратного предела дают требуемые подгруппы группы G. □

Доказательство следствия 3. Сначала рассмотрим случай конечной разрешимой q'-группы. В доказательстве предложения 2 любая силовская q-подгруппа из R содержит нетривиальные неподвижные точки φ, поскольку это имеет место на каждом шагу построения R индукцией по нильпотентной длине. Фактор G/N обладает рядом

$$G \geqslant [G, \varphi] \geqslant O_{2',2}([G, \varphi]) \geqslant N,$$

где N — полный прообраз подгруппы K, построенной в ходе доказательства теоремы 3. Множество простых чисел, делящих порядок $G/[G, \varphi]$ совпадает с таким же множеством для $C_G(\varphi)$. Фактор $O_{2',2}([G, \varphi])/K$ является в действительности 2-группой. Осталось рассмотреть простые числа $t \neq 2$, для которых существует такая (φ-инвариантная) силовская t-подгруппа T из $[G, \varphi]/O_{2',2}([G, \varphi])$, что $C_T(\varphi) = 1$. Группа $T\langle\varphi\rangle$ действует точно на 2-группе

$$V = O_{2',2}([G, \varphi]) \Big/ \Phi(O_{2',2}([G, \varphi])/O_{2'}([G, \varphi]))\,.$$

Пусть U — некоторый неприводимый $\mathbb{F}_2T\langle\varphi\rangle$-подмодуль из V, на котором T действует нетривиально. По лемме 14(б) $C_U(\varphi) \neq 0$. Теперь по теореме Хартли–Айзекса $\mathbb{F}_2$-размерность U является (q, r)-ограниченной. Следовательно, порядок U также (q, r)-ограничен, а простое число t является (q, r)-ограниченным. Итак, число простых чисел, делящих порядки G/N и R, в заключении предложения 2 можно сделать (q, r, m)-ограниченным, где m равно числу простых чисел, делящих порядок $|C_G(f)|$.

Теперь рассмотрим доказательство теоремы 4, конструирующее характеристические подгруппы N_1 и R_1 из нормальных подгрупп N и R, при дополнительном условии, что число простых чисел, делящих $|G/N|$ и $|R|$, равно m. Характеристическая подгрупп R_1 строилась индукцией по нильпотентной длине G взятием автоморфного замыкания некоторых нормальных подгрупп в (гомоморфных образах) G, содержащихся в (образах) R. Ясно, что число участвующих простых чисел остаётся таким же, как у $|R|$. Подгруппа N_1 содержит N, поэтому число простых чисел, делящих $|G/N_1|$, не превосходит число простых чисел, делящих $|G/N|$.

В общем случае теоремы 2, когда характеристические подгруппы N и R выбираются в $O_{q'}(G)$ (после применения теоремы 4 и переименования), остаётся вспомнить, что порядок $G/O_{q',q}$ является (q, r)-ограниченным, поэтому число простых чисел, делящих порядок $|G/N|$, может увеличиться только на (q, r)-ограниченную величину.

Вернёмся к следствию 2. Из вышеизложенного следует, что можно добиться, чтобы в заключении теоремы 3 множество простых чисел, делящих $|G/N|$ и $|R|$, содержало кроме простых чисел, делящих $|C_G(\varphi)|$, только простые числа, не превосходящие некоторого числа $\pi(q,r)$, ограниченного в терминах q и r. Пусть Π — объединение множества простых делителей порядков элементов группы $C_G(\varphi)$ и множества всех простых чисел, не превосходящих $\pi(q,r)$. Теперь доказательство следствия 2 нужно модифицировать следующим образом. Снова определим Σ как семейство всех конечных подгрупп из G, содержащих g. Для каждого $H \in \Sigma$ определим S_H как множество всех таких пар (N,R) нормальных подгрупп $H > N > R$, что

(а) N/R нильпотентна,
(б) ранги H/N и R не превосходят $f(q,r)$, где функция $f(q,r)$ определяется теоремой 2, и
(в) множество простых чисел, делящих порядки $|H/N|$ и $|R|$, содержится в Π.

Каждое множество S_H непусто по модифицированной выше теореме 2, применённой к H и её внутреннему автоморфизму, индуцированному элементом g. Объединения соответствующих подгрупп типов N и R по произвольному элементу обратного предела дают искомые подгруппы группы G. □

5. Нильпотентная длина подгрупп ограниченного ко-ранга

В этом параграфе $A \leqslant \operatorname{Aut} G$ — разрешимая группа автоморфизмов конечной группы G, для которой ранг $C_G(A)$ равен r. Если не предполагать, что порядки A и G взаимно просты, и A не нильпотентна, то существуют примеры, построенные Беллом и Хартли [10], в которых $C_G(A) = 1$ и нильпотентная длина G неограничена. Поэтому мы предполагаем, что $(|A|,|G|) = 1$. Напомним, что через $l = l(A)$ мы обозначили число (не обязательно различных) простых чисел, произведение которых равно $|A|$. Наша цель — доказать, что для некоторой функции $f(l)$ фактор $G/F_{f(l)}(G)$ по $f(l)$-той подгруппе Фраттини имеет ранг, ограниченный в терминах r и $|A|$. По теореме 1 можно считать, что G также разрешима.

Теорема 6. *Пусть A — разрешимая группа автоморфизмов конечной группы G и пусть $(|A|,|G|) = 1$. Тогда*
(а) *ранг $G/F_{4^l-1}(G)$ и*
(б) *порядок $G/F_{5\cdot(4^l-1)/3}(G)$*
ограничены в терминах $|A|$ и ранга $C_G(A)$.

Этот результат является ранговым аналогом, хотя и с худшей функцией от l, теорем Турулла [39] и Хартли–Айзекса [23], где при условии, что $|C_G(A)| = n$, доказывается, что порядок $G/F_{2l+1}(G)$ ограничен в терминах $|A|$ и n. В случае, когда $l(A) = 1$ (то есть когда A простого порядка) результат справедлив и без условия взаимной простоты порядков, и сформулирован как теорема 7 ниже. Мы выведем теорему 6 из теоремы 7 несложной индукцией по $l(A)$, основываясь на классической теореме Томпсона [38]. Вполне возможно, что более позднюю технику, развитую Туруллом и Хартли–Айзексом, можно применить для существенного улучшения функции от l, которая участвует в индексе подгруппы Фиттинга, быть может даже до линейной функции от l. Но ранговый результат для группы A простого порядка в некотором смысле неулучшаем.

Теорема 7. *Если конечная разрешимая группа G допускает такой автоморфизм φ простого порядка q, что ранг $C_G(\varphi)$ равен r, то*

(а) *для любого простого числа p фактор $G/O_{p',p}(G)$ имеет (q,r)-ограниченный ранг;*

(б) *$G/F_3(G)$ имеет (q,r)-ограниченный ранг;*

(в) *если дополнительно $q \nmid |G|$, то $G/F_4(G)$ имеет (q,r)-ограниченный порядок.*

Перед доказательством этой теоремы приведём пример, показывающий, что теорема 7(б) неулучшаема в том смысле, что нельзя ограничить ранг $G/F_2(G)$.

Пример 4. Пусть p_i, q_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ — различные простые числа, каждое из которых больше, чем 3, и такие, что $q_i \mid p_i - 1$ для каждого i. Пусть M_i — неабелево метациклическое полупрямое произведение группы порядка p_i и циклической группы порядка q_i. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ пусть $D_i = \left\langle a_i, b_i \mid a_i^3 = b_i^2 = 1;\ a_i^{b_i} = a_i^{-1} \right\rangle$ — диэдральная группа порядка 6. Пусть $S_i = M_i \wr D_i$ — сплетение M_i и D_i (с D_i в качестве активной группы), так что $S_i = B_i D_i$, где B_i — прямое произведение шести копий M_i. Пусть G — прямое произведение $\prod_{i=1}^m B_i \langle a_i \rangle$ и пусть φ — автоморфизм порядка 2 группы G, индуцированный сопряжением посредством $b_1 b_2 \cdots b_m$ в прямом произведении $\prod_{i=1}^m B_i D_i$. Тогда ранг $C_G(\varphi)$ не превосходит числа 13 по лемме 5, в то время как ранг $G/F_2(G)$ равен m.

Доказательство теоремы 7. Ранг силовской q-подгруппы группы G является (q,r)-ограниченным по лемме 4. Пусть $Q = O_{q',q}(G)/O_{q'}(G)$. Тогда порядок группы $Q/\Phi(Q)$ является (q,r)-ограниченным. Группа $G/O_{q',q}(G)$ действует точно при сопряжении на $Q/\Phi(Q)$. Поэтому порядок $G/O_{q',q}(G)$ является (q,r)-ограниченным и следовательно ранг $G/O_{q'}(G)$ также (q,r)-ограничен. Отсюда вытекает, что достаточно доказать пункты (а) и (б) теоремы для $O_{q'}(G)$. Другими словами, не ограничивая общности, можно считать, что порядок G взаимно прост с q.

(а) В предложении 1 из [8] было доказано, что ранг холловой p'-подгруппы из $G/O_{p',p}(G)$ является (q,r)-ограниченным (при этом использовалась лемма 14). По лемме 5 остаётся ограничить ранг силовской p-подгруппы P из $G/O_{p',p}(G)$. Фактор $G/O_{p',p}(G)$ действует точно на факторе Фраттини группы $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$, который мы обозначим через V. Можно рассматривать V как $\mathbb{F}_p(G/O_{p',p}(G))\langle\varphi\rangle$-модуль. Пусть $F = F(G/O_{p',p}(G))$; тогда F является p'-группой и P действует точно на F.

Пусть F_2 и $F_{2'}$ — силовская 2-подгруппа и холлова $2'$-подгруппа из F. По предложению 1 из [8] ранг F_2 является (q,r)-ограниченным (если $p=2$, то $F_2 = 1$). Поэтому ранг $P/C_P(F_2)$ также (q,r)-ограничен по лемме 6, применённой к действию $P/C_P(F_2)$ на факторе Фраттини группы F_2. Осталось ограничить ранг $P_1 = C_P(F_2)$.

Поскольку действие взаимно простое, группа P_1 действует точно на нильпотентной p'-группе $F_{2'}$, которая в свою очередь действует точно на $[V, F_{2'}]$.

Положим $H = [V, F_{2'}]F_{2'}P_1$. Чтобы применить предложение 1, нам нужно перейти к $[H, \varphi]$. Пусть

$$P_2 = [P_1, \varphi], \qquad W = [V, F_{2'}] \cap [H, \varphi], \qquad L = [V, F_{2'}]F_{2'} \cap [H, \varphi],$$

и пусть T — такая $P_2\,\langle\varphi\rangle$-инвариантная подгруппа в $F_{2'}$, что $L = WT$; в частности, $[H, \varphi] = WTP_2$. Далее, P_2 действует точно на T, поскольку точное действие P_2 на $F_{2'}$ является взаимно простым и $[P_2, F_{2'}] \leqslant F_{2'} \cap [H, \varphi] = T$. Кроме того, поскольку T действует точно на V и $[V, T] \leqslant W$, группа T действует точно на $[W, T]$. Так как P_2 действует точно на T, то P_2 действует точно и на $[W, T]$. Понятно, что достаточно ограничить ранг P_2.

По предложению 1 ранг $[W, T]$ является (q, r)-ограниченным. Поэтому ранг P_2 также (q, r)-ограничен по лемме 3; отсюда то же самое верно для ранга P_1 и следовательно для ранга P.

(б) По теореме 2 можно считать, что в G содержится такая нормальная подгруппа R, что её ранг (q, r)-ограничен и G/R нильпотентна.

Лемма 25. *Период $R/F_2(R)$ является (q, r)-ограниченным.*

Доказательство. Для каждого простого числа t группа $R/O_{t',t}(R)$ действует точно на факторе Фраттини группы $O_{t',t}(R)/O_{t'}(R)$, которая является элементарной абелевой t-группой ограниченного ранга. Поэтому $R/O_{t',t}(R)$ — разрешимая линейная группа ограниченной размерности $d \leqslant d(q, r)$. После расширения основного поля до алгебраически замкнутого можно применить теорему Ли–Цассенхауза–Колчина–Мальцева: в группе $R/O_{t',t}(R)$ найдётся нормальная триангулируемая подгруппа индекса $\leqslant f(d)$. Так как $O_t(R/O_{t',t}(R)) = 1$, а характеристика поля равна t, унитреугольная часть тривиальна. Поэтому в $R/O_{t',t}(R)$ найдётся абелева подгруппа индекса $\leqslant f(d)$; в частности, $R/O_{t',t}(R)$ является расширением абелевой нормальной подгруппы с помощью группы ограниченного периода, делящего $f(d)!$. По теореме Ремака то же самое верно для

$$R \Big/ \bigcap_t O_{t',t}(R) = R/F(R).$$

Поэтому период $R/F_2(R)$ является (q, r)-ограниченным. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 7(б). Рассмотрим $H = G/F_2(R)$; поскольку $F_2(R) \leqslant F_2(G)$, достаточно показать, что $H/F(H)$ имеет (q, r)-ограниченный ранг. По лемме 25 существует только (q, r)-ограниченное количество простых чисел, делящих $|R/F_2(R)|$; обозначим их через p_i, $i \in I$, где $|I| \leqslant f(q, r)$. Тогда для любого другого достаточно большого простого числа s выполняется равенство $O_{s',s}(H) = H$. Отсюда $F(H) = \bigcap_p O_{p',p}(H) = \bigcap_{i \in I} O_{p_i', p_i}(H)$.

По пункту (а) для каждого простого числа p фактор $H/O_{p',p}(H)$ имеет (q, r)-ограниченный ранг. По теореме Ремака ранг подгруппы

$$H/F(H) = H \Big/ \bigcap_{i \in I} O_{p_i', p_i}(H)$$

является (q, r)-ограниченным, так как (q, r)-ограничено число подгрупп, участвующих в этом пересечении.

(в) Для данного простого числа p рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/O_{p',p}$, ранг которой (q, r)-ограничен по пункту (а). Для любого простого числа t группа $\overline{G}/O_{t',t}(\overline{G})$ изоморфно вкладывается в группу линейных преобразований пространства (q,r)-ограниченной размерности — фактора Фраттини группы $O_{t',t}(\overline{G})/O_{t'}(\overline{G})$. Будучи разрешимой группа $\overline{G}/O_{t',t}(\overline{G})$ по теореме Ли–Цассенхауза–Колчина–Мальцева обладает триангулируемой нормальной подгруппой (q,r)-ограниченного индекса. Поскольку в $\overline{G}/O_{t',t}(\overline{G})$ нет нетривиальных нормальных t-подгрупп, унитреугольная часть тривиальна, так что в действительности $\overline{G}/O_{t',t}(\overline{G})$ обладает абелевой нормальной подгруппой (q,r)-ограниченного индекса. Следовательно, по теореме Ремака фактор

$$\overline{G}/F(\overline{G}) = \overline{G} \Big/ \bigcap_t O_{t',t}(\overline{G})$$

обладает абелевой нормальной подгруппой, фактор по которой обладает абелевой нормальной подгруппой с фактор-группой (q,r)-ограниченного *периода.* Итак, $G/O_{p',p}(G)$ является последовательным расширением нильпотентной группы посредством абелевой группы, а затем группы (q,r)-ограниченного периода. По теореме Ремака фактор-группа

$$G/F(G) = G \Big/ \bigcap_p O_{p',p}(G)$$

обладает тем же свойством,. Поэтому $G/F_3(G)$ имеет (q,r)-ограниченный период. Поскольку в рассматриваемой ситуации $q \nmid |G|$, централизатор φ в факторе является образом подгруппы $C_G(\varphi)$ по лемме 1. В факторе (q,r)-ограниченного периода централизатор φ будучи ранга r имеет (q,r)-ограниченный порядок по лемме 9. По теореме Хартли–Майкснера–Петета [21], [33] этот фактор обладает нормальной нильпотентной подгруппой (q,r)-ограниченного индекса, а по результату Хухро [6, 7] он обладает нормальной нильпотентной подгруппой q-ограниченной ступени нильпотентности и (q,r)-ограниченного индекса . Поэтому в действительности в G есть нормальный ряд

$$1 \leqslant G_1 \leqslant G_2 \leqslant G_3 \leqslant G_4 \leqslant G,$$

в котором факторы G_1 и G_2/G_1 нильпотентны, фактор G_3/G_2 абелев, фактор G_4/G_3 нильпотентен q-ограниченной ступени нильпотентности, а фактор G/G_4 имеет (q,r)-ограниченный порядок. □

Напомним теорему Томпсона, которая даст возможность применить индукцию в доказательстве теоремы 6.

Теорема 8 (Томпсон [38])**.** *Пусть α — такой автоморфизм простого порядка q конечной разрешимой группы G, что $q \nmid |G|$. Тогда $F(C_G(\alpha)) \leqslant F_4(G)$.* □

Следствие 4. *Пусть B — разрешимая группа автоморфизмов конечной разрешимой группы G и пусть $(|G|,|B|) = 1$. Тогда при $l = l(B)$ для любого натурального числа k выполняется включение $F_k(C_G(B)) \leqslant F_{k4^l}(G)$.*

Доказательство. Индукция по $l(B)$. Для $l(B) = 1$ включение $F(C_G(B)) \leqslant F_4(G)$ выполняется по теореме 8; затем очевидная индукция по k даёт включение $F_k(C_G(B)) \leqslant F_{k4^l}(G)$.

Для $l(B) > 1$ пусть B_1 — нормальная подгруппа простого индекса p в B. Тогда $C = C_G(B_1)$ допускает фактор $\langle\alpha\rangle = B/B_1$ простого порядка p в качестве группы операторов, для которой $C_C(\alpha) = C_G(B)$. По теореме 8 справедливо включение $F(C_G(B)) = F(C_C(\alpha)) \leqslant F_4(C) = F_4(C_G(B_1))$. По предположению индукции $F_4(C_G(B_1)) \leqslant F_{4\cdot 4^{l-1}}(G) = F_{4^l}(G)$. Поэтому $F(C_G(B)) \leqslant$

$F_{4^l}(G)$. Теперь очевидная индукция по k даёт искомое включение $F_k(C_G(B)) \leqslant F_{k4^l}(G)$. □

Доказательство теоремы 6. (а) Индукция по $l = l(A)$. Для $l = 1$ результат следует из теоремы 7. При $l > 1$ пусть A_1 — нормальная подгруппа простого индекса q в A. Тогда $C = C_G(A_1)$ допускает фактор $\langle\varphi\rangle = A/A_1$ простого порядка q в качестве группы операторов с $C_C(\varphi) = C_G(A)$. Поэтому ранг $C/F_3(C)$ ограничен в терминах $r = r(C_G(A))$ и q по теореме 7(б). По следствию 4 имеем $F_3(C) \leqslant F_{3\cdot 4^{l-1}}(G)$; поэтому ранг образа $C_G(A_1)$ в $G/F_{3\cdot 4^{l-1}}(G)$ ограничен в терминах r и q. По предположению индукции, применённому к этому фактору и его группе операторов A_1, получаем, что ранг $G/F_{4^{l-1}-1+3\cdot 4^{l-1}}(G) = G/F_{4^l-1}$ ограничен в терминах r и q.

(б) Доказательство аналогично пункту (а), только вместо пункта (б) теоремы 7 нужно использовать пункт (в). □

Список литературы

[1] Ю. М. Горчаков, О существовании абелевых подгрупп бесконечных рангов в локально разрешимых группах, *Докл. АН СССР* **146** (1964), 17–22.

[2] В. А. Крекнин, Разрешимость алгебр Ли с регулярным автоморфизмом конечного порядка, *Докл. АН СССР* **150** (1963), 467–469.

[3] В. А. Крекнин, А. И. Кострикин, Алгебры Ли с регулярным автоморфизмом, *Докл. АН СССР* **149** (1963), 249–251.

[4] Н. Ю. Макаренко, Нильпотентный идеал в кольце Ли с почти регулярным автоморфизмом простого порядка, *Сибирск. матем. журн.* **46**, 6 (2005), 1361–1374.

[5] Ю. И. Мерзляков, О локально разрешимых группах конечного ранга, *Алгебра и логика* **3** (1964), No 2, 5–16.

[6] Е. И. Хухро, Конечные p-группы, допускающие автоморфизм порядка p с малым числом неподвижных точек, *Матем. заметки* **38** (1985), 652–657.

[7] Е. И. Хухро, Группы и кольца Ли, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка, *Матем. сборник* **181** (1990), 1197–1219.

[8] Е. И. Хухро, Конечные разрешимые и нильпотентные группы с ограничением на ранг централизатора автоморфизма простого порядка, *Сибирск. матем. журн.* **41** (2000), 451–469.

[9] Е. И. Хухро, В. Д. Мазуров, Группы с автоморфизмом простого порядка, чей централизатор имеет малый ранг, *Докл. АН СССР* **402** (2005), 740–742.

[10] S. D. Bell and B. Hartley, A note on fixed-point-free actions of finite groups, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **41** (1990), no. 162, 127–130.

[11] T. R. Berger, Nilpotent fixed point free automorphism groups of solvable groups, *Math. Z.* **131** (1973), 305–312.

[12] R. Brauer and K. A. Fowler, On groups of even order, *Ann. Math. (2)* **62** (1955), 565–583.

[13] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[14] E. C. Dade, Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups, *Illinois J. Math.* **13** (1969) 449–514.

[15] W. Feit and J. G. Thompson, Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963) 775–1029.

[16] P. Fong, On orders of finite groups and centralizers of p-elements, *Osaka J. Math.* **13** (1976), 483–489.

[17] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Chelsea, New York, 1968.

[18] D. Gorenstein, *Finite simple groups. An introduction to their classification*, Plenum Publishing Corp., New York, USA, 1982).

[19] F. Gross, Solvable groups admitting a fixed-point-free automorphism of prime power order, *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966) 1440–1446.

[20] P. Hall and G. Higman, On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, *Proc. London Math. Soc. (3)* **6** (1956), 1–42.
[21] B. Hartley and T. Meixner, Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small, *Arch. Math. (Basel)* **36** (1981), 211–213.
[22] G. Higman, Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements, *J. London Math. Soc. (2)* **32** (1957), 321–334.
[23] B. Hartley and I. M. Isaacs, On characters and fixed points of coprime operator groups, *J. Algebra* **131** (1990), 342–358.
[24] O. H. Kegel and B. A. F. Wehrfritz, *Locally finite grous*, North-Holland, Amsterdam, American Elsevier, New York, 1973.
[25] E. I. Khukhro and V. D. Mazurov, Finite groups with an automorphism of prime order whose centralizer has small rank, *J. Algebra* **301** (2006), 474–492.
[26] E. I. Khukhro and V. D. Mazurov, Automorphisms with centralizers of small rank, *Proc. Groups St. Andrews'05*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
[27] L. G. Kovács, On finite soluble groups, *Math. Z.* **103** (1968), 37–39.
[28] H. Kurzweil, p-Automorphismen von auflösbaren p'-Gruppen, *Math. Z.* **120** (1971) 326–354.
[29] P. Longobardi and M. Maj, On the number of generators of a finite group, *Arch. Math. (Basel)* **50** (1988), 110–112.
[30] A. Lubotzky and A. Mann, Powerful p-groups. I: Finite groups, *J. Algebra* **105** (1987), 484–505
[31] N. Yu. Makarenko, Finite metabelian groups admitting an automorphism of prime order with a restriction on the rank of its centralizer, *Written communication*, 1999.
[32] N. Yu. Makarenko and E. I. Khukhro, Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms, *J. Algebra* **277** (2004), 370–407.
[33] M. R. Pettet, Automorphisms and Fitting factors of finite groups, *J. Algebra* **72** (1981), 404–412.
[34] J. E. Roseblade, On groups in which every subgroup is subnormal, *J. Algebra* **2** (1965), 402–412.
[35] E. E. Shult, On groups admitting fixed point free abelian operator groups, *Illinois J. Math.* **9** (1965) 701–720.
[36] P. Shumyatsky, Involutory automorphisms of finite groups and their centralizers, *Arch. Math. (Basel)* **71** (1998), 425–432.
[37] J. Thompson, Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **45** (1959), 578–581.
[38] J. Thompson, Automorphisms of solvable groups, *J. Algebra* **1** (1964), 259–267.
[39] A. Turull, Fitting height of groups and of fixed points, *J. Algebra* **86** (1984), 555–566.

Виктор Данилович МАЗУРОВ,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mazurov@math.nsc.ru

Евгений Иванович ХУХРО,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: khukhro@cardiff.ac.uk