S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 238–252 (2006) УДК 512.531.2
MSC 20M14

ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП, ДОПУСКАЮЩИЕ ПЛАНАРНЫЙ ГРАФ КЭЛИ

Д.В. СОЛОМАТИН

Abstract. Direct products of cyclic semigroups admitting a planar Caley Graph are described.

1. Введение

Граф Кэли первоначально рассматривали как объект, связанный с группой. Изучению графов Кэли групп посвящено много работ.

Аналогичная конструкция перенесена на полугруппы в работе [1], в которой графом Кэли полугруппы S относительно её подмножества T назван граф с вершинами из S и множеством дуг, состоящем из таких упорядоченных пар различных элементов (a, b), где $at = b$ для некоторого t из T.

Графы Кэли для представления полугрупп использовались, например, в [2], [3]. Исследования специальных видов графов Кэли полугрупп проведены в [4], [5].

Одним из основных свойств графа является его планарность, поскольку оно находит широкое применение на практике. Что касается свойства планарности графа Кэли, то оно изучалось в основном для групп.

Напомним, что известно описание конечных групп, допускающих плоские графы Кэли [9]. Изучению возможностей, при которых одна и та же группа обладает неизоморфными плоскими графами Кэли, и изучению неизоморфных групп, допускающих изоморфные графы Кэли, посвящены работы [8] и [10], а описание всех возможные вариантов выбора групп и их порождающих множеств, приводящих к регулярным замощениям как графам Кэли дано в [11].

Solomatin, D.V., Direct products of cyclic semigroups admitting a planar Caley Graph.

Поступила 25 августа 2005 г., опубликована 16 июня 2006 г.

Мы исследуем полугруппы, допускающих планарные графы Кэли. Продолжая изучение влияния различных операций над полугруппами на планарность соответствующего графа Кэли, начатое в [6],[7], где изучаются свободные коммутативные произведения конечных циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли, в настоящей работе охарактеризованы прямые произведения конечных циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли. Прежде чем сформулировать результат, приведём необходимые определения.

Напомним, что *обыкновенный граф* – это пара (V, E), где V – конечное непустое множество *вершин*, E – множество *ребер*, являющееся произвольным подмножеством множества неупорядоченных пар вершин графа.

Ориентированный граф – это пара (V, A), где V – конечное непустое множество *вершин*, A – множество *дуг* (упорядоченных пар (v_i, v_j) элементов из V), являющееся произвольным подмножеством декартова квадрата множества вершин графа.

Если пара (v_i, v_j) встречается в A более одного раза, то говорят, что (v_i, v_j) – кратная дуга. Граф с кратными дугами называют *ориентированным мультиграфом.* Определим понятие помеченного графа. Пусть S_v и S_e – множества меток. *Пометкой (распределением меток) графа* $G = (V, A)$ называется пара функций $f : V \to S_v$ – распределение меток вершин, $g : E \to S_e$ – распределение меток дуг. Ориентированный мультиграф, с заданным распределение меток дуг, состоящий из конечного непустого множества вершин V и множества помеченных дуг – упорядоченных троек (v_i, x, v_j), для которых упорядоченная пара (v_i, v_j) является элементом декартова квадрата множества вершин этого графа, x – элемент множества меток дуг, называем *ориентированным мультиграфом с помеченными дугами.*

Вершины графа, как обычно изображаются точками на плоскости, а дуга (a, x, b) – стрелкой, направленной от a к b и помеченной элементом x. В случае, когда метка ребра легко восстанавливается, мы будем опускать её. При изображении графов в общем виде, для удобства восприятия, пунктирными линиями или стрелками будем обозначать легковосстановимые цепи из одинаково помеченных ребер, соединяющие соответствующие вершины.

Плоским графом называется обыкновенный граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется *планарным.*

Для обоснования планарности обыкновенного графа используются различные критерии. Наиболее распространен являющийся исторически первым критерий *Понтрягина-Куратовского*: граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному пятиэлементному графу K_5 или полному двудольному графу $K_{3,3}$ [12, с. 160]. Напомним, что два обыкновенных графа называются *гомеоморфными*, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

Основой ориентированного мультиграфа мы называем обыкновенный граф, полученный из данного графа удалением петель и заменой всех дуг, соединяющих две вершины одним ребром, соединяющим эти вершины. *Ориентированной основой* ориентированного мультиграфа будем называть ориентированный граф, полученный из заданного удалением петель, а также заменой всех одинаково направленных дуг одной дугой. Ориентированный мультиграф естественно назвать планарным, если его основа является планарным графом.

Графом Кэли полугруппы S относительно множества образующих её элементов X, мы называем ориентированный мультиграф $Cay(S,X)$, состоящий из множества вершин S и множества помеченных дуг – всевозможных троек (a,x,b), где $a,b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$.

Такое определение графа Кэли аналогично определению графа Кэли [8, с. 3], связанного с группой. Оно несколько отличается от введенного в [1], где граф Кэли является ориентированным графом без петель и многократных ребер.

Будем говорить, что *полугруппа S допускает планарный граф Кэли*, если для некоторого множества образующих X основа графа $Cay(S,X)$ является планарным графом.

2. Основной результат

Очевидно, что граф Кэли конечной циклической полугруппы является планарным. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что число сомножителей в рассматриваемых ниже прямых произведениях более одного.

Теорема. Граф Кэли полугруппы S, являющейся прямым произведением не одноэлементных циклических полугрупп, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $S \cong \langle a|a^{r+m} = a^r\rangle \times \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$ для натуральных r, m, h, t и выполняется одно из следующих ограничений:

1.1) $r = 1$, $h = 1$, НОД$(m,t) < 3$;

1.2) $r = 1$, $m = 2$, $t < 3$;

1.3) $r = 2$, $m = 1$, $h < 4$, $t < 3$;

1.4) $r = 2$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$;

1.5) $r = 3$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$;

2) $S \cong \langle a|a^{r+m} = a^r\rangle \times \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle \times \langle c|c^{k+l} = c^k\rangle$ для натуральных r, m, h, t, k, l и выполняется одно из следующих ограничений:

2.1) $r = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $t = 2$, $k = 1$, $l = 2$;

2.2) $r = 1$, $m = 2$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 2$, $l = 1$;

2.3) $r = 2$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 2$, $l < 3$;

2.4) $r = 2$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 3$, $l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0|a_0^{r+m} = a_0^r\rangle \times \prod_{i=1\div n}\langle a_i|a_i^{2+1} = a_i^2\rangle$, при:

3.1) $r = 1$, $m = 2$;

3.2) $r = 2$, $m < 3$;

3.3) $r = 3$, $m = 1$;

Доказательство.

1) Достаточность указанных ограничений на r, m, h и t для планарности доказывается приведением плоской укладки графа Кэли. Пусть даны две группы $A = \langle a|a^{1+m} = a\rangle$, $B = \langle b|b^{1+t} = b\rangle$. Тогда граф Кэли их прямого произведения допускает плоскую укладку, если и только если, НОД$(m,t) \leq 2$. В самом деле, как показано в [10, с. 5], нециклическая абелева группа A допускает плоский граф Кэли в том и только в том случае, когда $A \cong C_2 \times C_{2m}$, или $A \cong C_2 \times C_2 \times C_2$. Более того, прямым произведением циклических групп взаимнопростых порядков является циклическая группа, очевидно допускающая планарный граф Кэли. Если заданы две циклические группы своими копредставлениями $A = \langle a|a^{1+m} = a\rangle$, $B = \langle b|b^{1+t} = b\rangle$ и НОД$(m,t) = 2$, то граф

Кэли прямого произведения $A \times B$ допускает плоскую укладку, приведенную на рис.1, при выборе пар (a, b) и $(a^{\frac{m}{2}}, b^{\frac{t}{2}})$ в качестве образующих.

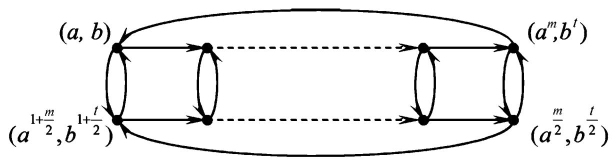

Рис. 1. Планарный граф Кэли прямого произведения двух циклических групп четных порядков.

Для оставшихся случаев $r = 1$, $m = 2$, $t < 3$; $r = 2$, $m = 1$, $h < 4$, $t < 3$; $r = 2$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$; $r = 3$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$ плоская укладка соответствующих графов Кэли приведена на рис.2–рис.11 с указанием выбора систем образующих приводящих к такой укладке. Не следует забывать, что при перестановке сомножителей прямого произведения получаемые полугруппы будут изоморфны между собой, равно как и соответствующие графы Кэли.

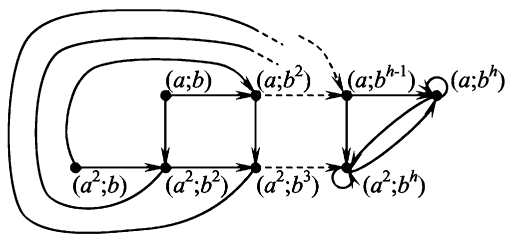

Рис. 2. Плоская укладка графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{1+2} = a \rangle$ и $B = \langle b | b^{h+1} = b^h \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b), (a^2; b)$.

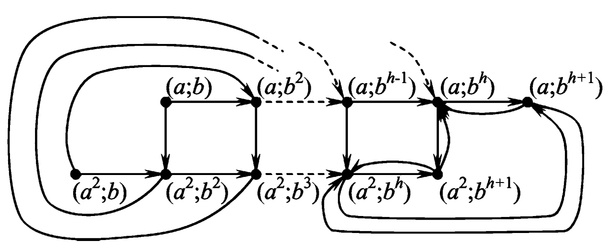

Рис. 3. Плоская укладка графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{1+2} = a \rangle$ и $B = \langle b | b^{h+2} = b^h \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b), (a^2; b)$.

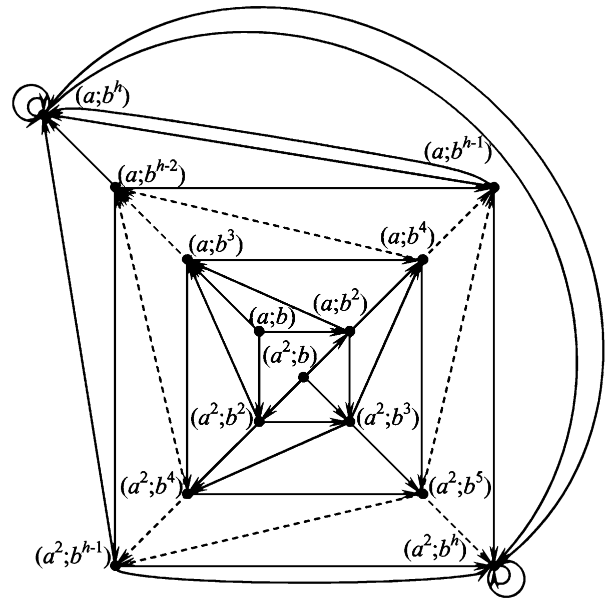

Рис. 4. Плоская укладка графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{1+2} = a\rangle$ и $B = \langle b|b^{h+1} = b^h\rangle$ относительно образующих элементов $(a; b), (a^2; b), (a^2; b^2)$.

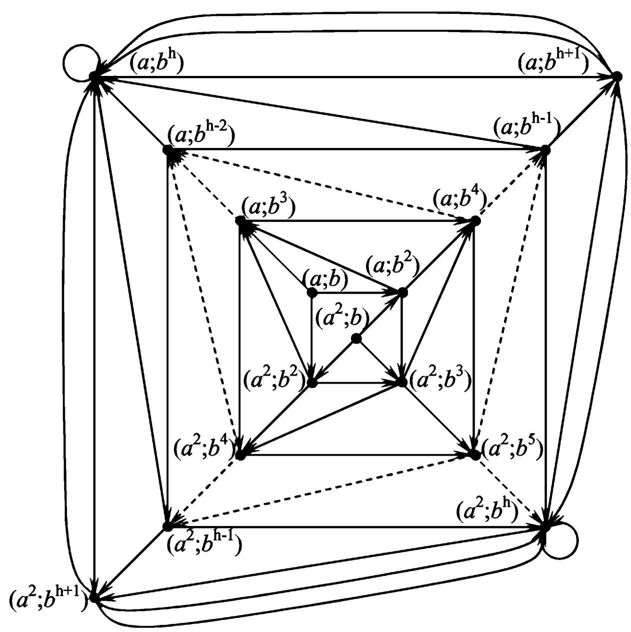

Рис. 5. Плоская укладка графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{1+2} = a\rangle$ и $B = \langle b|b^{h+2} = b^h\rangle$ относительно образующих элементов $(a; b), (a^2; b), (a^2; b^2)$.

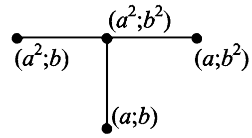

Рис. 6. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b | b^{2+1} = b^2 \rangle$ *относительно образующих элементов* $(a;b), (a;b^2), (a^2;b)$.

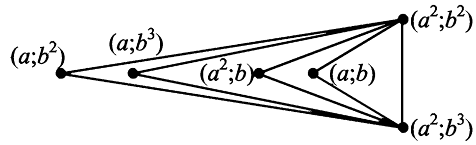

Рис. 7. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b | b^{2+2} = b^2 \rangle$ *относительно образующих элементов* $(a;b), (a;b^2), (a;b^3), (a^2;b)$.

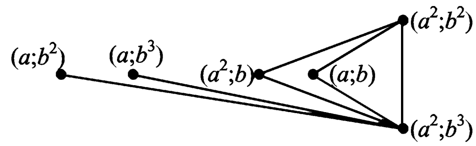

Рис. 8. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b | b^{3+1} = b^3 \rangle$ *относительно образующих элементов* $(a;b), (a;b^2), (a;b^3), (a^2;b)$.

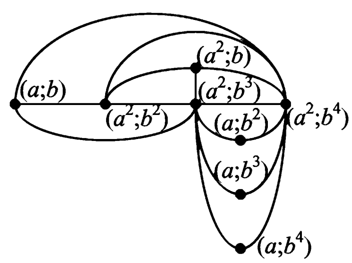

Рис. 9. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b | b^{3+2} = b^3 \rangle$ *относительно образующих элементов* $(a;b), (a;b^2), (a;b^3), (a;b^4), (a^2;b)$.

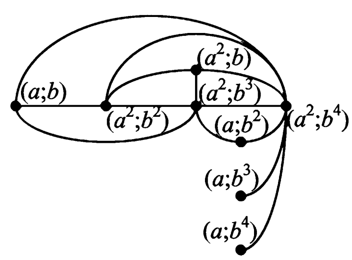

Рис. 10. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b | b^{4+1} = b^4 \rangle$ *относительно образующих элементов* $(a;b), (a;b^2), (a;b^3), (a;b^4), (a^2;b)$.

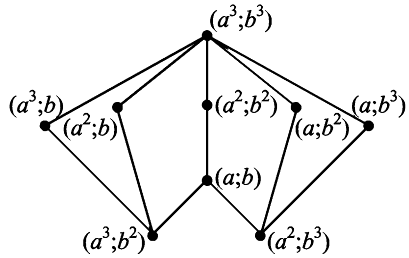

Рис. 11. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{3+1} = a^3 \rangle$, $B = \langle b | b^{3+1} = b^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b), (a; b^2), (a; b^3), (a^2; b), (a^3; b)$.

Покажем, что во всех остальных случаях граф Кэли прямого произведения двух циклических полугрупп не имеет плоской укладки, поскольку его основа содержит подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$ при любом выборе множества образующих. Следует учитывать, что для прямого произведения двух циклических полугрупп $A = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$, $B = \langle b | b^{h+t} = b^h \rangle$ в каждом из возможных множеств образующих содержатся следующие неразложимые элементы: $\{(a; b), (a; b^2), \ldots, (a; b^{h+t-1}), (a^2; b), (a^3; b), \ldots, (a^{r+m-1}; b)\}$

Для доказательства необходимости ограничений воспользуемся законом контрапозиции. Поскольку соотношения для элементов a и b идентичны, добавляем аналогичные ограничения, поменяв местами соответствующие порядки. Покажем, что если не выполняется ни одно из условий:

1.1.1) $r = 1$, $m = 1$;
1.1.2) $h = 1$, $t = 1$;
1.2.1) $r = 1$, $m = 2$, $t < 3$;
1.2.2) $h = 1$, $t = 2$, $m < 3$;
1.3.1) $r = 2$, $m = 1$, $h < 4$, $t < 3$;
1.3.2) $h = 2$, $t = 1$, $r < 4$, $m < 3$;
1.4.1) $r = 2$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$;
1.4.2) $h = 2$, $t = 1$, $r < 5$, $m = 1$;
1.5.1) $r = 3$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$;
1.5.2) $r = 1$, $h = 1$, НОД$(m, t) < 3$;

то граф Кэли полугруппы S не является планарным.

Проведя преобразования на языке алгебры логики, получаем, что если выполнено одно из условий:

1) $r > 1$, $m > 1$, $h > 1$, $t > 1$;
2) $r = 1$, $m > 1$, $h = 1$, $t > 2$, НОД$(m, t) > 2$, или
$r = 1$, $m > 2$, $h = 1$, $t > 1$, НОД$(m, t) > 2$;
3) $r > 1$, $m > 2$, $h = 1$, $t = 2$, или $r = 1$, $m = 2$, $h > 1$, $t > 2$;
4) $r > 2$, $h > 1$, $t > 1$, или $r > 1$, $m > 1$, $h > 2$;
5) $r > 3$, $m > 1$, $h = 2$, $t = 1$, или $r = 2$, $m = 1$, $h > 3$, $t > 1$, или
$r > 4$, $h = 2$, $t = 1$, или $r = 2$, $m = 1$, $h > 4$;
6) $r > 1$, $t > 2$, $m > 2$, $h > 1$;
7) $r > 2$, $m = 1$, $h > 3$, или $r > 3$, $h > 2$, $t = 1$;

то граф не является планарным. Для каждой серии ограничений в графе Кэли соответствующей полугруппы обнаруживаются подграфы, изображенные на рис.12-рис.18, гомеоморфные графу $K_{3,3}$, что доказывает непланарность графа на основании критерия Понтрягина-Куратовского.

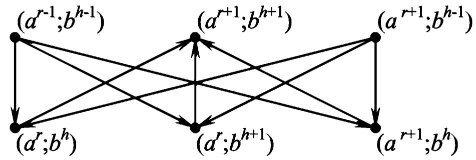

Рис. 12. Подграф ориентированной основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{r+m} = a^r\rangle$, $B = \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$ при $r \geq 2$, $m \geq 2$, $h \geq 2$, $t \geq 2$.

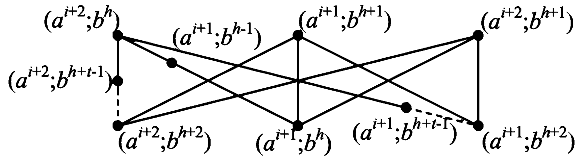

Рис. 13. Подграф основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{1+2} = a\rangle$, $B = \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$ при $h \geq 2$, $t \geq 3$ и нечетном t, где $i = 0$ либо $i = 1$.

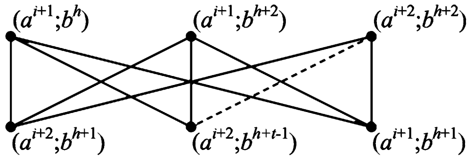

Рис. 14. Подграф основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{1+2} = a\rangle$, $B = \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$ при $h \geq 2$, $t \geq 3$ и четном t, где $i = 0$ либо $i = 1$.

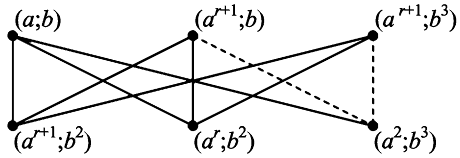

Рис. 15. Подграф основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{r+m} = a^r\rangle$, $B = \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$ при $r \geq 2$, $m \geq 2$, $h \geq 3$, $t \geq 1$.

Как уже упоминалось выше, пунктирными линиями обозначается легковосстановимый путь, соединяющий соответствующие вершины. Так, например, в данном случае, вершины $(a^2; b^3)$ и $(a^{r+1}; b^3)$ можно соединить следующим образом: если $h = 3$, то элемент $(a^{r+1}; b^3)$ получен умножением $(a^2; b^3)$ на $(a; b^t)$ $r-1$ раз, иначе

где $(a^x; b^h)$ получен умножением $(a^{r+1}; b^3)$ на $(a; b)$ $h-3$ раза, $(a^y; b^{h-1})$ получен умножением $(a^2; b^3)$ на $(a; b)$ $h-4$ раза, а из $(a^y; b^{h-1})$ получаем $(a^x; b^h)$ умножением на $(a^z; b)$, где $0 < x, y, z < r + m$. Аналогичные рассуждения применимы и в остальных случаях.

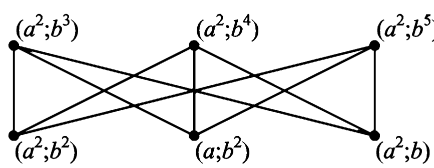

Рис. 16. Подграф основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{2+1} = a^2\rangle$, $B = \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$ при $h \geq 4$, $t \geq 2$ либо при $h \geq 5$, $t \geq 1$.

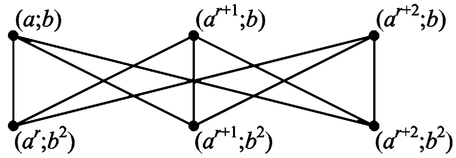

Рис. 17. Подграф основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{r+m} = a^r\rangle$, $B = \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$ *при* $r \geq 1$, $m \geq 3$, $h \geq 2$, $t \geq 1$.

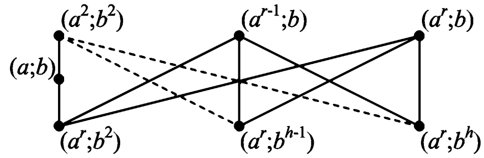

Рис. 18. Подграф основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{r+1} = a^r\rangle$, $B = \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$ *при* $r \geq 3$, $h \geq 4$, $t \geq 1$.

2) Перейдем к доказательству условий планарности графа Кэли прямого произведения трех циклических полугрупп. Следует учитывать тот факт, что каждые два из трех сомножителей должны удовлетворять условиям планарности графа Кэли прямого произведения двух полугрупп. Итак, если все три сомножителя полугруппы S группового типа, то для планарности соответствующего графа Кэли необходимо и достаточно выполнение условия $S = C_2 \times C_2 \times C_2$. Рассмотрим случай, при котором только один из сомножителей является циклической группой. Плоская укладка основы графа Кэли такого произведения приведена на рис.19, с указанием соответствующего множества образующих.

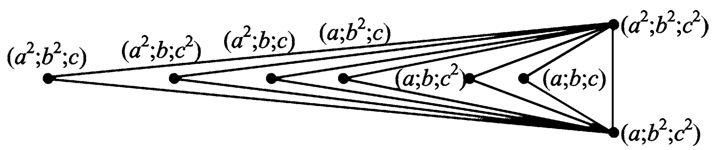

Рис. 19. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{1+2} = a\rangle$, $B = \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle$ *и* $C = \langle c|c^{2+1} = c^2\rangle$ *относительно образующих элементов* $(a;b;c), (a;b;c^2), (a;b^2;c), (a^2;b;c), (a^2;b;c^2), (a^2;b^2;c)$.

Рассмотрим оставшиеся случаи, при которых ни один из сомножителей не является циклической группой. Плоские укладки основ графов Кэли таких произведений приведены на рис.20-рис.22, с указанием соответствующих множеств образующих.

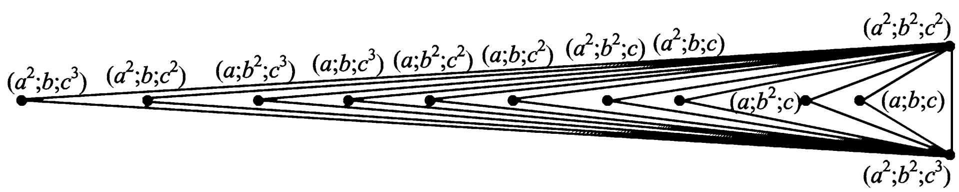

Рис. 20. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{2+1} = a^2\rangle$, $B = \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle$ *и* $C = \langle c|c^{2+2} = c^2\rangle$ *относительно образующих элементов* $(a;b;c), (a;b^2;c), (a;b;c^2), (a;b^2;c^2), (a;b;c^3)$, $(a;b^2;c^3), (a^2;b;c), (a^2;b^2;c), (a^2;b;c^2), (a^2;b;c^3)$.

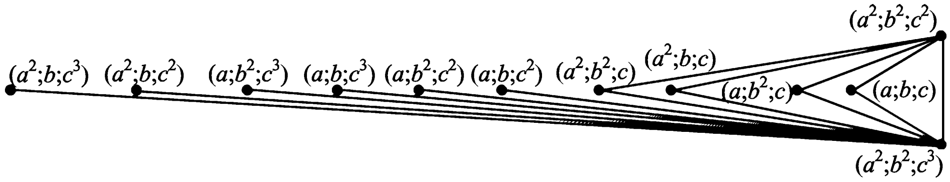

Рис. 21. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{2+1} = a^2\rangle$, $B = \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle$ и $C = \langle c|c^{3+1} = c^3\rangle$ относительно образующих элементов $(a;b;c), (a;b^2;c), (a;b;c^2), (a;b^2;c^2), (a;b;c^3),$ $(a;b^2;c^3), (a^2;b;c), (a^2;b^2;c), (a^2;b;c^2), (a^2;b;c^3)$.

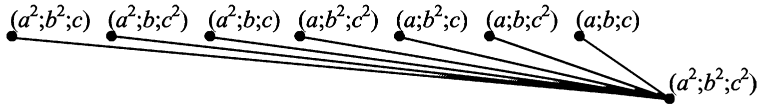

Рис. 22. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{2+1} = a^2\rangle$, $B = \langle b|b^{2+1} = b^2\rangle$ и $C = \langle c|c^{2+1} = c^2\rangle$ относительно образующих элементов $(a;b;c), (a;b;c^2), (a;b^2;c), (a;b^2;c^2), (a^2;b;c), (a^2;b;c^2), (a^2;b^2;c)$.

Докажем необходимость приведенных условий планарности. Пользуясь законом контрапозиции потребуется доказать, что если условия не выполняются, то соответствующий граф Кэли не является планарным.

Покажем, что если не выполняется ни одно из условий:

1) $r = 1$, $m < 3$, $h = 1$, $t < 3$, $k = 1$, $l < 3$, или
$r = 1$, $m < 3$, $h < 3$, $t = 1$, $k < 3$, $l = 1$, или
$r < 3$, $m = 1$, $h = 1$, $t < 3$, $k < 3$, $l = 1$, или
$r < 3$, $m = 1$, $h < 3$, $t = 1$, $k = 1$, $l < 3$, или
$r < 3$, $m = 1$, $h < 3$, $t = 1$, $k < 3$, $l = 1$, или
$r < 3$, $m = 1$, $h < 3$, $t = 1$, $k < 3$, $l < 3$, или
$r < 3$, $m = 1$, $h < 3$, $t < 3$, $k < 3$, $l = 1$, или
$r < 3$, $m < 3$, $h < 3$, $t = 1$, $k < 3$, $l = 1$, или
$r < 3$, $m = 1$, $h < 3$, $t = 1$, $k < 4$, $l = 1$, или
$r < 3$, $m = 1$, $h < 4$, $t = 1$, $k < 3$, $l = 1$, или
$r < 4$, $m = 1$, $h < 3$, $t = 1$, $k < 3$, $l = 1$;

2) $r = 1$, $m = 1$, $h = 1$, $t = 1$, $k > 0$, $l > 0$, или
$r = 1$, $m = 1$, $h > 0$, $t > 0$, $k = 1$, $l = 1$, или
$r > 0$, $m > 0$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 1$, $l = 1$, или
$r = 1$, $m = 1$, $h = 1$, $t > 0$, $k = 1$, $l > 0$, НОД$(t, l) < 3$, или
$r = 1$, $m > 0$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 1$, $l > 0$, НОД$(m, l) < 3$, или
$r = 1$, $m > 0$, $h = 1$, $t > 0$, $k = 1$, $l = 1$, НОД$(m, t) < 3$;

3) $r = 1$, $m = 1$, $h = 1$, $t = 2$, $k > 0$, $l < 3$, или
$r = 1$, $m = 1$, $h > 0$, $t < 3$, $k = 1$, $l = 2$, или
$r = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $t = 1$, $k > 0$, $l < 3$, или
$r > 0$, $m < 3$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 1$, $l = 2$, или
$r = 1$, $m = 2$, $h > 0$, $t < 3$, $k = 1$, $l = 1$, или
$r > 0$, $m < 3$, $h = 1$, $t = 2$, $k = 1$, $l = 1$;

4) $r = 1$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k < 4$, $l < 3$, или
$r = 1$, $m = 1$, $h < 4$, $t < 3$, $k = 2$, $l = 1$, или
$r = 2$, $m = 1$, $h = 1$, $t = 1$, $k < 4$, $l < 3$, или
$r < 4$, $m < 3$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 2$, $l = 1$, или
$r = 2$, $m = 1$, $h < 4$, $t < 3$, $k = 1$, $l = 1$, или

$r < 4$, $m < 3$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 1$, $l = 1$;
5) $r = 1$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k < 5$, $l = 1$, или
$r = 1$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$, $k = 2$, $l = 1$, или
$r = 2$, $m = 1$, $h = 1$, $t = 1$, $k < 5$, $l = 1$, или
$r < 5$, $m = 1$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 2$, $l = 1$, или
$r = 2$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$, $k = 1$, $l = 1$, или
$r < 5$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 1$, $l = 1$;
6) $r = 1$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$, $k = 3$, $l = 1$, или
$r = 3$, $m = 1$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 3$, $l = 1$, или
$r = 3$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$, $k = 1$, $l = 1$;
полученных из приведенных в формулировке теоремы перестановкой ограничений на типы полугрупп и учитывая возможность наличия среди множителей полугруппы типа $(1, 1)$, то граф Кэли полугруппы S не является планарным.

Проведя преобразования на языке алгебры логики, получим серии ограничений на определяющие соотношения циклических полугрупп, при выполнении которых соответствующий граф Кэли не является планарным при любом выборе порождающих.

Итак, если выполнено одно из условий:
1) $r = 1$, $m > 2$, $h = 1$, $t > 1$, НОД$(m, t) > 2$, или
$r = 1$, $m > 1$, $h = 1$, $t > 2$, НОД$(m, t) > 2$, или
$r = 1$, $m > 2$, $k = 1$, $l > 1$, НОД$(m, l) > 2$, или
$r = 1$, $m > 1$, $k = 1$, $l > 2$, НОД$(m, l) > 2$, или
$h = 1$, $t > 2$, $k = 1$, $l > 1$, НОД$(t, l) > 2$, или
$h = 1$, $t > 1$, $k = 1$, $l > 2$, НОД$(t, l) > 2$;
2) $r = 1$, $m = 2$, $h > 1$, $t > 2$, или $r > 1$, $m > 2$, $h = 1$, $t = 2$, или
$r = 1$, $m = 2$, $k > 1$, $l > 2$, или $r > 1$, $m > 2$, $k = 1$, $l = 2$, или
$h = 1$, $t = 2$, $k > 1$, $l > 2$, или $h > 1$, $t > 2$, $k = 1$, $l = 2$;
3) $r = 2$, $m = 1$, $h > 3$, $t > 1$, или $r > 3$, $m > 1$, $h = 2$, $t = 1$, или
$r = 2$, $m = 1$, $k > 3$, $l > 1$, или $r > 3$, $m > 1$, $k = 2$, $l = 1$, или
$h = 2$, $t = 1$, $k > 3$, $l > 1$, или $h > 3$, $t > 1$, $k = 2$, $l = 1$;
4) $r > 1$, $m > 1$, $k > 1$, $l > 1$, или $r > 1$, $m > 1$, $h > 1$, $t > 1$, или
$h > 1$, $t > 1$, $k > 1$, $l > 1$;
5) $r > 1$, $m > 1$, $h > 2$, или $r > 1$, $m > 1$, $k > 2$, или
$r > 2$, $h > 1$, $t > 1$, или $h > 1$, $t > 1$, $k > 2$, или
$r > 2$, $k > 1$, $l > 1$, или $h > 2$,$k > 1$,$l > 1$;
6) $r > 3$, $h > 2$, $t = 1$, или $r > 3$, $k > 2$, $l = 1$, или
$r > 2$, $m = 1$, $h > 3$, или $h > 3$, $k > 2$, $l = 1$, или
$r > 2$, $m = 1$, $k > 3$, или $h > 2$, $t = 1$, $k > 3$;
7) $r >= 5$, $k = 2$, $l = 1$, или $r >= 5$, $h = 2$, $t = 1$, или
$r = 2$, $m = 1$, $h >= 5$, или $h >= 5$, $k = 2$, $l = 1$, или
$r = 2$, $m = 1$, $k >= 5$, или $h = 2$, $t = 1$, $k >= 5$;
8) $r > 1$, $t > 2$, или $r > 1$, $l > 2$, или $h > 1$, $m > 2$, или
$h > 1$, $l > 2$, или $k > 1$, $m > 2$, или $k > 1$, $t > 2$;
9) $m > 2$, $t > 1$, $l > 1$, или $m > 1$, $t > 2$, $l > 1$, или $m > 1$, $t > 1$, $l > 2$;
10) $r > 2$, $m > 1$, $h > 1$, $k > 1$, или $r > 1$, $h > 2$, $t > 1$, $k > 1$, или
$r > 1$, $h > 1$, $k > 2$, $l > 1$;
11) $r > 2$, $h > 1$, $l > 1$, или $r > 2$, $t > 1$, $k > 1$, или
$r > 1$, $h > 2$, $l > 1$, или $m > 1$, $h > 2$, $k > 1$, или

$r > 1$, $t > 1$, $k > 2$, или $m > 1$, $h > 1$, $k > 2$;

12) $r > 3$, $h > 1$, $k > 1$, или $r > 1$, $h > 3$, $k > 1$, или $r > 1$, $h > 1$, $k > 3$;

13) $r > 1$, $h > 2$, $k > 2$, или $r > 2$, $h > 1$, $k > 2$, или $r > 2$, $h > 2$, $k > 1$;

14) $r > 1$, $t > 1$, $l > 1$, или $m > 1$, $h > 1$, $l > 1$, или $m > 1$, $t > 1$, $k > 1$;

то граф не является планарным. Действительно, первая серия ограничений сводится к случаю прямого произведения двух групп, при данных условиях не допускающего планарного графа Кэли. Серии со второй по восьмую включительно на два сомножителя накладывают такие ограничения, при которых граф Кэли не является планарным по первой части теоремы. Девятая серия ограничений является случаем прямого произведения трех групп, при данных условиях не допускающего планарного графа Кэли по известному результату для групп.

Для каждой из оставшихся серий ограничений, в графе Кэли соответствующей полугруппы с точностью до изоморфизма, обнаруживаются подграфы, изображенные на рис.23-рис.27 соответственно, гомеоморфные графу $K_{3,3}$, что доказывает непланарность графа на основании теоремы Понтрягина-Куратовского.

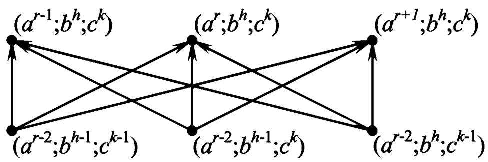

Рис. 23. Подграф ориентированной основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$, $B = \langle b | b^{h+t} = b^h \rangle$, $C = \langle c | c^{k+l} = c^k \rangle$ при $r \geq 3$, $m \geq 2$, $h \geq 2$, $t \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 1$.

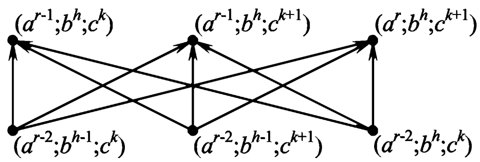

Рис. 24. Подграф ориентированной основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$, $B = \langle b | b^{h+t} = b^h \rangle$, $C = \langle c | c^{k+l} = c^k \rangle$ при $r \geq 3$, $m \geq 1$, $h \geq 2$, $t \geq 1$, $k \geq 1$, $l \geq 2$.

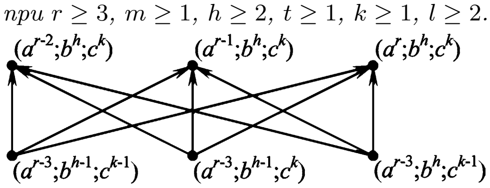

Рис. 25. Подграф ориентированной основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$, $B = \langle b | b^{h+t} = b^h \rangle$, $C = \langle c | c^{k+l} = c^k \rangle$ при $r \geq 4$, $m \geq 1$, $h \geq 2$, $t \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 1$.

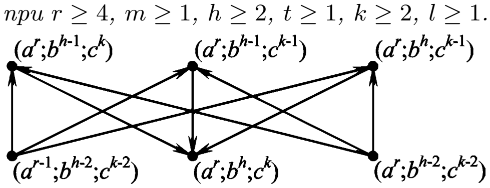

Рис. 26. Подграф ориентированной основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$, $B = \langle b | b^{h+t} = b^h \rangle$, $C = \langle c | c^{k+l} = c^k \rangle$ при $r \geq 2$, $m \geq 1$, $h \geq 3$, $t \geq 1$, $k \geq 3$, $l \geq 1$.

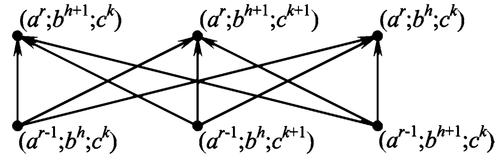

Рис. 27. Подграф ориентированной основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a|a^{r+m} = a^r\rangle$, $B = \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$, $C = \langle c|c^{k+l} = c^k\rangle$ при $r \geq 2$, $m \geq 1$, $h \geq 1$, $t \geq 2$, $k \geq 1$, $l \geq 2$.

3) Перейдем к доказательству третьей части теоремы, описывающей планарность графа Кэли прямого произведения более трех циклических полугрупп.

Для $S \cong \langle a_0|a_0^{r+m} = a_0^r\rangle \times \prod_{i=1\div n}\langle a_i|a_i^{2+1} = a_i^2\rangle$ при $r = 1$, $m = 2$ плоская укладка основы графа Кэли изображена на рис.28.

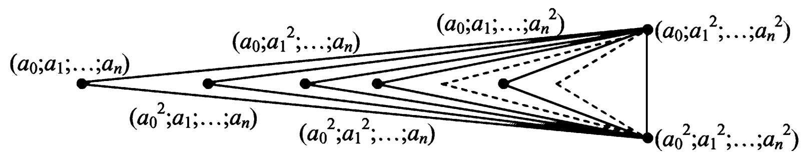

Рис. 28. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0|a_0^{1+2} = a_0\rangle \times \prod_{i=1\div n}\langle a_i|a_i^{2+1} = a_i^2\rangle$ относительно множества образующих её элементов $M = S \setminus \{(a_0; a_1^2; \ldots; a_n^2), (a_0^2; a_1^2; \ldots; a_n^2)\}$.

При $r = 2$, $m = 1$, $S \cong \langle a_0|a_0^{r+m} = a_0^r\rangle \times \prod_{i=1\div n}\langle a_i|a_i^{2+1} = a_i^2\rangle$ является полугруппой с нулевым умножением, граф Кэли которой, очевидно, допускает плоскую укладку изображенную на рис.29.

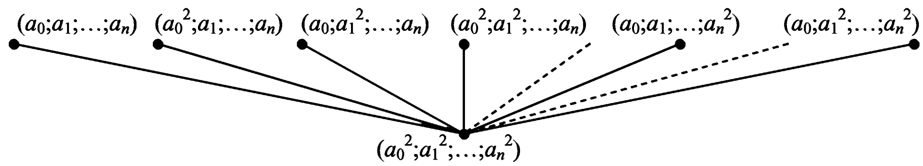

Рис. 29. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0|a_0^{2+1} = a_0^2\rangle \times \prod_{i=1\div n}\langle a_i|a_i^{2+1} = a_i^2\rangle$ относительно множества образующих её элементов $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \ldots; a_n^2)\}$.

При $r = 2$, $m = 2$, плоская укладка основы графа Кэли изображена на рис.30; а при $r = 3$, $m = 1$ – на рис.31, с указанием множества образующих, приводящего к такой укладке.

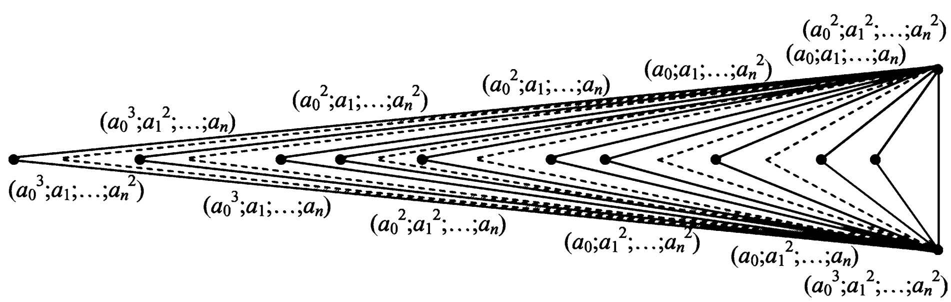

Рис. 30. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0|a_0^{2+2} = a_0^2\rangle \times \prod_{i=1\div n}\langle a_i|a_i^{2+1} = a_i^2\rangle$ относительно множества образующих её элементов $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \ldots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \ldots; a_n^2)\}$.

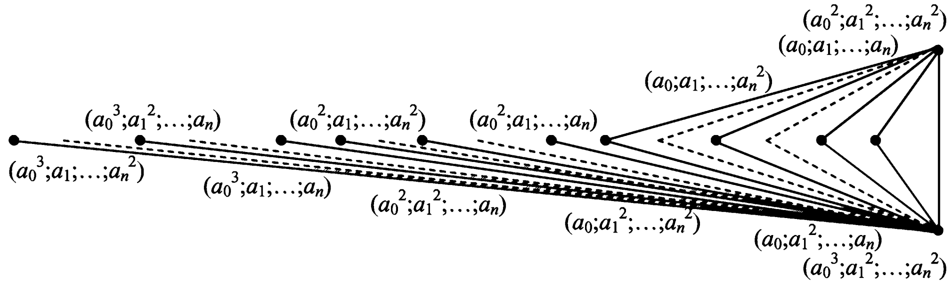

Рис. 31. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 | a_0^{3+1} = a_0^3 \rangle \times \prod_{i=1 \div n} \langle a_i | a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ *относительно множества образующих её элементов* $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \ldots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \ldots; a_n^2)\}$.

В противном случае, среди сомножителей обнаруживаются тройки, не удовлетворяющие условиям планарности по второй части теоремы.

Таким образом, получили критерий планарности графа Кэли прямого произведения циклических полугрупп.

Замечание. Граф Кэли прямого произведения циклических полугрупп, содержащего среди сомножителей одноэлементные полугруппы, планарен тогда и только тогда, когда планарен граф Кэли прямого произведения этих циклических полугрупп за исключением одноэлементных полугрупп, поскольку добавление множителя типа $(1, 1)$ приводит к полугруппе, изоморфной исходной. В качестве иллюстрации приведем плоскую укладку графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{1+1} = a \rangle$, $B = \langle b | b^{h+t} = b^h \rangle$ относительно множества образующих $\{(a; b)\}$ на рис.32, идентичную плоской укладке циклической полугруппы типа (h, t).

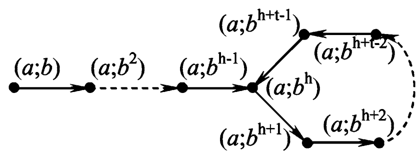

Рис. 32. Плоская укладка графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a | a^{1+1} = a \rangle$, $B = \langle b | b^{h+t} = b^h \rangle$ *относительно образующего элемента* $(a; b)$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Л.М. Мартынову за постановку задачи и полезные советы по оформлению статьи.

Список литературы

[1] Zelinka B. *Graphs of semigroups*, Casopis.Pest.Mat, **106** (1981), 407–408.

[2] Margolis S.W., Meakin J.C. *E-unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group representation*, Journal of Pure and Applied Algebra, **58** (1989), 45–76.

[3] Heydemann M.-C. *Cayley graphs and interconnection networks*, "Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications", Montreal, Canada, July **1–12** (1996), Kluwer, Dordrecht, (1997), 167–224.

[4] Kelarev A.V. *On undirected Cayley graphs*, Australasian J.Combinatorics, **25** (2002), 73–78.

[5] Kelarev A.V., Quinn S.J. *A Combinatorial Property and Cayley Graphs of Semigroups*, Semigroup Forum, Vol. **66** (2003), 89–96.

[6] Соломатин Д.В. *Конечные свободные коммутативные полугруппы с планарными графами Кэли*, Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов: Ежегодник. Вып. **3**. – Омск: Изд-во ОмГПУ, (2003), 32–38.

[7] Соломатин Д.В. *Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие планарный граф Кэли*, Вестник Омского университета. Вып. **4**. – Омск: Изд-во ОмГУ, (2005), 36–38.

[8] Беленкова Ж.Т. *Все плоские графы Кэли группы* S_4 , Препринт. Омск: Омский госуниверситет, 1997.

[9] Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. *Поверхности и разрывные группы.* М.: Наука, 1988.

[10] Беленкова Ж.Т., Романьков В.А. *Плоские графы Кэли конечных групп:* Препринт. Омск: Омский госуниверситет, 1997.

[11] Беленкова Ж.Т., Романьков В.А. *Регулярные графы Кэли.* Сибирский мат. журнал. Депонирована в ВИНИТИ, **№802-В97** (1997), 37 с., 57 рис.

[12] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сараванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.

Денис Владимирович Соломатин
Омский государственный педагогический университет,
наб. Тухачевского 14,
644099, Омск, Россия
E-mail address: denis_2001j@bk.ru