S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 232–237 (2006) УДК 512.544
MSC 20E34

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЧЕРНИКОВСКИХ ГРУПП В КЛАССЕ ГРУПП ШУНКОВА С ЧЕТВЕРНОЙ СИЛОВСКОЙ 2-ПОДГРУППОЙ

М.Н. ИВКО

Abstract. We consider groups whose Sylow 2-subgroup is a four-group L and the centralizers of involutions of L are Chernikov groups. Under these circumstances we have obtained a characterization of Chernikov groups in a class of Shunkov groups.

Введение

В §2 работы [1] для групп, являющихся расширением групп, не содержащих инволюций, при помощи четверной группы Клейна L, автором была получена характеризация черниковских групп в классе групп Шункова по свойствам централизаторов инволюций из L. При этом, ввиду теоремы Файта–Томпсона [2], все конечные подгруппы группы G являлись разрешимыми, а сама группа G, ввиду леммы 1.2 из [1], оказалась порождённой централизаторами инволюций из L. В данной работе аналогичная характеризация получена для групп, в которых четверная подгруппа Клейна L является силовской 2-подгруппой группы G (без дополнительных ограничений на расположение подгруппы L в группе G), а условие разрешимости накладывается только на L-инвариантные конечные подгруппы.

Ivko, M.N., Characterization of Cherinikov groups in class of Shunkov groups with Sylow four-subgroup.

Поступила 15 февраля 2006 г., опубликована 13 июня 2006 г.

1. Определения и известные результаты

1. Говорят, что *группа G удовлетворяет условию $(a,\ b)$-конечности для некоторых элементов $a, b \in G$*, если почти все (т.е. все за исключением конечного числа) группы вида гр$(a,\ b^g)$, где $g \in G$, конечны [6].

2. Группа G называется *группой Шункова*, если она сопряжённо бипримитивно конечна, т.е. для любой её конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряжённых элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. (см., например, [3]). [1]

Остальные термины и обозначения, используемые в работе, являются общепринятыми (см., например, [4]–[8]), а ниже приведены известные результаты, ссылаться на которые будем как на предложения с соответствующим номером.

1. (М.Н. Ивко [1]) Пусть в группе G, содержащей четверную подгруппу Клейна L, нормализатор любой L-инвариантной черниковской подгруппы является черниковской группой, и A, B — черниковские подгруппы группы G. Если $A \cap B$ содержит бесконечную L-инвариантную черниковскую группу, то гр$(A,\ B)$ является черниковской группой.

2. (В.П. Шунков [5]) Если группа G, содержащая инволюции, обладает сильно вложенной подгруппой H и удовлетворяет условию (i, i)-конечности для некоторой инволюции $i \in G$, то

   а) множество элементов из H, строго вещественных относительно некоторой инволюции $a \in G \setminus H$ равномощно множеству инволюций из H.
   б) любой элемент $g \in G \setminus H$ можно представить в виде $g = ah$, где $h \in H$ и a — некоторая инволюция из $G \setminus H$;
   в) все инволюции из H сопряжены в H;
   г) для любой инволюции $i \in H$ и любой инволюции $t \in G \setminus H$ порядок элемента it нечётен, и все элементы из (it) являются строго вещественными относительно инволюций i и t.

3. (В.В. Беляев [9]) Пусть K — некоторое конечное подмножество группы G и $K \cap K^g \neq \varnothing$ для любого $g \in G$. Тогда $K \cap FC(G) \neq \varnothing$.

2. Основные результаты

Пользуясь обозначениями из доказательства теоремы 2.1 из [1] и несколько модифицируя его, покажем сначала, что имеет место следующее обобщение этой теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — группа Шункова, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) силовская 2-подгруппа L группы G является четверной группой Клейна;
2) все L-инвариантные конечные подгруппы группы G разрешимы;
3) $G =$ гр$(C_G(i), C_G(j), C_G(k))$, где i, j, k — инволюции из L.

Группа G является черниковской тогда и только тогда, когда централизатор любой инволюции из L является черниковской группой.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, и, как и в доказательстве теоремы 2.1 из [1], среди всех групп, которые удовлетворяют условию доказываемой теоремы, выберем группу G с наименьшими параметрами

[1]По аналогии с термином "черниковская группа"автор в данном случае считает более удачным употреблять термин "шунковская группа".

$(r_i; t_i; r_j; t_j; r_k; t_k)$, где r_l — ранг полной части из $C_G(l)$, а t_l — её индекс в $C_G(l)$ для любой инволюции $l \in L$. Тогда для группы G справедливы утверждения лемм 2.1–2.5 из [1].

Если пересечение $C_G(i) \cap C_G(j)$ бесконечно, то как следует из условия 3 теоремы и леммы 2.5 из [1], группа G является черниковской, что приводит к противоречию. Таким образом, для группы G справедлива лемма 2.6, а также леммы 2.7–2.9 из [1] (существование подгрупп V_n вытекает из условия 2 теоремы).

Предположим, что для некоторого n подгруппа $V = V_n$ является 2-группой. Тогда, ввиду условия 1 теоремы, возможны два случая.

1) $|V| = 4$. Если $j \notin V$, то подгруппа $V \leftthreetimes (j)$ имеет порядок 8, что противоречит условию 1 теоремы. Таким образом, $j \in V$. Далее, так как a^{b_n} является строго вещественным элементом относительно инволюции j и $V \lhd \text{гр}(a^{b_n^{-1}}, a^{b_n})$, то $(a^{b_n^{-1}})ja^{b_n} = j(a^{b_n})^2 \in V$. Но тогда и $(a^{b_n})^2 \in V$, а следовательно, $(a^{b_n})^2 = 1$. Противоречие.

2) $|V| = 2$. Тогда $V = (l)$ для некоторой инволюции l и $a^{b_n^{-1}}, a^{b_n} \in C_G(l)$. Так как $L \leqslant N_G((l)) = C_G(l)$, то $l \in L$. Очевидно, $l \neq j$. Предположим, что $l = i$ (случай, когда $l = k$, рассматривается аналогично). Тогда $a^{b_n} \in \widetilde{C_G(i)}$ а поэтому $(a^{b_n})^i = a^{b_n}$. Но так как b_n является строго вещественным элементом относительно i, то $b_n a b_n^{-1} = b_n^{-1} a b_n$ и $\text{гр}(a^{b_n^{-1}}, a^{b_n})$ является циклической группой нечётного порядка, вопреки тому, что $V \lhd \text{гр}(a^{b_n^{-1}}, a^{b_n})$.

Таким образом, порядки всех подгрупп $V_n (n = 1,\ 2,\ \ldots)$ нечётны и заключительная часть доказательства теперь дословно переносится из доказательства теоремы 2.1 из [1], начиная с леммы 2.10. Теорема доказана.

Покажем теперь, что от условия 3 в теореме 1 можно отказаться.

Теорема 2. *Пусть G — группа Шункова, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) силовская 2-подгруппа L группы G является четверной группой Клейна;

2) все L-инвариантные конечные подгруппы группы G разрешимы.

Группа G является черниковской тогда и только тогда, когда централизатор любой инволюции из L является черниковской группой.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, и, как и в доказательстве предыдущей теоремы, среди всех групп, которые удовлетворяют условию доказываемой теоремы, выберем группу G с наименьшими параметрами $(r_i; t_i; r_j; t_j; r_k; t_k)$, где $i,\ j,\ k$ — инволюции из L.

Лемма 1. *Нормализатор любой нетривиальной L-инвариантной черниковской подгруппы группы G является черниковской группой.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.4 из [1].

Обозначим $K = \text{гр}(C_G(i), C_G(j), C_G(k))$, $T = N_G(\widetilde{K})$ и $H = N_G(\widetilde{T})$. Как следует из теоремы 1, подгруппа K является черниковской, и по лемме 1 подгруппа H также является черниковской. Очевидно, $\widetilde{T}$ — максимальная полная L-инвариантная подгруппа в G, а поэтому H является максимальной L-инвариантной черниковской подгруппой группы G.

Лемма 2. *Любая бесконечная L-инвариантная черниковская подгруппа группы G содержится в H.*

Доказательство. Действительно, если R — бесконечная L-инвариантная черниковская подгруппа из G, то $C_R(l)$ бесконечен для некоторой инволюции $l \in L$. Но так как $C_R(l) \leqslant H$, то по предложению 1 подгруппа гр(R, H) является черниковской, а поэтому гр$(R, H) = H$ ввиду максимальности подгруппы H. Следовательно, $R \leqslant H$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Подгруппа H является сильно вложенной в группе G.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, т.е. пусть для некоторого $g \in G \setminus H$ пересечение $H \cap H^g$ содержит инволюцию i. Так как силовские 2-подгруппы сопряжены в H, то без ограничения общности можно считать, что $i \in L$. Далее, так как $C_G(i) \leqslant H$, то $C_G(i) \leqslant H \cap H^g$ и по предложению 1 подгруппа гр(H, H^g) является черниковской. Отсюда, согласно предыдущей лемме, гр$(H, H^g) = H$, а поэтому $g \in H$, что противоречит выбору элемента g. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любой инволюции $a \in G \setminus H$ пересечение $H \cap H^a$ содержит лишь конечное число строго вещественных относительно этой инволюции элементов.*

Доказательство. Обозначим через K подгруппу, порождённую всеми элементами простых порядков из $\widetilde{H}$, и предположим, что лемма неверна, т.е. пусть для некоторой инволюции $a \in G \setminus H$ множество элементов из $H_a = H \cap H^a$, строго вещественных относительно этой инволюции, бесконечно. Тогда по пункту а) предложения 2, подгруппа H содержит бесконечное множество инволюций и по пункту а) предложения 2 для любой инволюции $a \in G \setminus H$ подгруппа H_a бесконечна, и следовательно, она обладает полной частью. Пользуясь пунктом б) предложения 2, отсюда получаем, что $K \cap K^g \neq 1$ для любого $g \in G$, а поэтому согласно предложению 3 $FC(G) \neq 1$. Но тогда по лемме 1 группа G является черниковской. Противоречие. Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно убедиться, что, пользуясь аналогичными рассуждениями, можно доказать следующее утверждение.

Лемма. *Пусть группа G обладает сильно вложенной подгруппой H и для некоторой инволюции $i \in G$ выполняется условие (i, i)-конечности. Если подгруппа H обладает черниковской периодической частью, то либо для любой инволюции $a \in G \setminus H$ пересечение $H \cap H^a$ содержит лишь конечное число строго вещественных относительно этой инволюции элементов, либо $\widetilde{H} \cap FC(G) \neq 1$.*

Лемма 5. *Множество элементов из H, строго вещественных относительно какой-либо инволюции из H, конечно.*

Доказательство. Действительно, как следует из леммы 4 и пункта а) предложения 2, подгруппа H, содержит лишь конечное множество инволюций. Отсюда и из леммы 4 вытекает доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 6. *Любой элемент b простого порядка, строго вещественный относительно некоторой инволюции $i \in H$, содержится в H.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть $b \notin H$. Согласно пункту в) предложения 2 без ограничения общности можно считать, что $i \in L$. Так как подгруппа гр(b, b^j), где $j \neq i$ — инволюция из L, является L-инвариантной, то, как следует из условия теоремы, подгруппа $B =$ гр$(b,\, b^j,\, L)$ конечна и разрешима.

Очевидно, минимальная нормальная подгруппа $VO(B)/O(B)$ из $B/O(B)$ является элементарной абелевой 2-подгруппой, причём $V \leqslant L$. При этом возможны два случая.

1) $V = L$. Поскольку $LO(B)/O(B) \lhd B/O(B)$, то по теореме 4.2.1 из [4] $LO(B) \lhd B$, а поэтому $b^{-1}itb \in VO(B)$ для любого элемента $t \in O(B)$. Отсюда $b^{-1}ibb^{-1}tb \in VO(B)$, и следовательно, $b^{-1}ib \in VO(B)$. Так как b является строго вещественным относительно i, то $ib^2 \in VO(B)$, а поэтому $b^2 \in VO(B)$. Отсюда, ввиду нечётности порядка элемента b легко следует, что $b \in O(B)$. Противоречие.

2) $V < L$. Тогда $V = (l)$ для некоторой инволюции $l \in L$. Но так как $VO(B)/O(B) \lhd B/O(B)$, то, очевидно, $lO(B) \in Z(B/O(B))$, а поэтому $bO(B) \in C_{B/O(B)}(lO(B))$. Поскольку $C_{B/O(B)}(lO(B)) = C_B(l)O(B)/O(B)$, то отсюда следует, что $b \in C_B(l)O(B)$. Но $C_B(l) < H$ и согласно теореме 6.2.4 из [7] $O(B) <$ гр$(C_B(i), C_B(j), C_B(k)) < H$, а поэтому $b \in H$. Противоречие. Лемма доказана.

Обозначим теперь через M множество всех элементов простого порядка, которые являются одновременно строго вещественными относительно некоторой инволюции $i \in H$ и некоторой инволюции $a \in G \setminus H$ (существование таких элементов вытекает из пункта г) предложения 2).

Лемма 7. *$M \cap M^g \neq \varnothing$ для любого $g \in G$.*

Доказательство. Очевидно, что для любого элемента b, строго вещественного относительно инволюций $i \in H$ и $a \in G \setminus H$, элемент b^h, где $h \in H$, является строго вещественным относительно инволюций $i^h \in H$ и $a^h \in G \setminus H$, т.е. $b^h \in M$, а поэтому $M^h = M$ для любого $h \in H$. Далее, так как для любой инволюции $a \in G \setminus H$ существует такой элемент $b \in M$, что $b^a = b^{-1}$, то $M \cap M^a \supseteq (b) \neq \varnothing$ для любой инволюции $a \in G \setminus H$. Но так как согласно пункту б) предложения 2 $g = ha$ для некоторого $h \in H$ и некоторой инволюции a, то $M \cap M^g = M \cap M^{ha} = M \cap M^a \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Теперь, как следует из лемм 6, 7 и предложения 3, $FC(G) \neq 1$, и по лемме 1 группа G является черниковской, вопреки первоначальному предположению. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Ивко М.Н. *Характеризации некоторых типов SF-групп*, Сибирские электронные математические известия, **2** (2005), 308–324.

[2] Feit W., Thompson J.G. *Solvability of groups of odd order*, Pacific Journal of Mathematics, **13** (1963), 775–1029.

[3] Шлёпкин А.К., Рубашкин А.Г. *О группах, насыщенных конечным множеством подгрупп*, Сиб. матем. журн., **45** (2004), 1397–1400.

[4] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1982.

[5] Шунков В.П. *M_p-группы*, М., Наука, 1990.

[6] Шунков В.П. *О вложении примарных элементов в группе*, Новосибирск, ВО "Наука", 1992.

[7] Gorenstein D. *Finite groups*, New York, Harper & Row, 1968.

[8] Черников С.Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*, М., Наука, 1980.

[9] Беляев В.В. *Группы с почти регулярной инволюцией*, Алгебра и логика, **26** (1987), 531–535.

Максим Николаевич Ивко
филиал Омского госпедуниверситета в г.Таре,
пер. Школьный 69,
646530, г.Тара, Омская обл., Россия
E-mail address: ivko_m@mail.ru