S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 216–231 (2006) УДК 517.5

MSC 30C75

НОРМАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В.И.РЯЗАНОВ И Е.А. СЕВОСТЬЯНОВ

Abstract. Classes of the recently introduced so-called Q-homeomorphisms are studied. In the terms of the majorant $Q(x)$, a series of criteria of normality based on estimates of the distortion of the spherical distance under Q-homeomorphisms is given.

1. Введение

Как известно, нормальные семейства играют важную роль при исследовании локального и граничного поведения отображений. Их изучение тесно связано с равностепенно непрерывными семействами и, таким образом, с оценками искажения в соответствующих классах отображений. Работа посвящена изучению так называемых $Q-$гомеоморфизмов, изучение которых было начато на плоскости, см. [36]–[39], а затем в пространстве, см. [26]–[29] и [12]–[16]. В частности, теория $Q-$гомеоморфизмов применима к изучению различных классов отображений конечного искажения, изучаемых в работах многих ведущих специалистов по теории отображений, см. [1], [9], [10], [11], [17], [20], [21], [22], [31] и [32].

Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $Q : D \to [1, \infty]$ - измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является Q-*гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \tag{1}$$

Ryazanov V.I., Sevostyanov E.A., Normal families of space mappings.

Работа поступила 17 *мая* 2005 *г., исправленная версия поступила 7 июня 2006 г., опубликована 9 июня 2006 г.*

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in adm\Gamma$.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для Γ, пишем $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geq 1 \qquad (2)$$

для всех путей $\gamma \in \Gamma$.

Модуль семейства Γ есть величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x)\,dm(x). \qquad (3)$$

2. Предварительные замечания

Напомним ряд основных определений, так или иначе связанных с нормальностью семейств отображений между метрическими пространствами. Пусть (X, d) и (X', d') - метрические пространства с расстоянием d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f : X \to X'$. Введённое понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$ если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $f \in \mathfrak{F}$ и для всех x с $d(x, x_0) < \delta$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Предложение 1. *Пусть (X, d) и (X', d') - произвольные метрические пространства и пусть $\mathfrak{F}$ - нормальное семейство отображений $f : X \to X'$. Тогда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Действительно, предположим, что существуют $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$, а также последовательность отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ и последовательность точек $x_m \in X$, такие что $x_m \to x_0$ и $d'(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Без потери общности, можно считать, что $f_m \to f$ равномерно на любом компакте $C \subset X$, где $f -$ непрерывное отображение. Заметим, что множество $\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \{x_m\}$ является компактным. Следовательно,

$$d'(f_m(x_0), f(x_0)) < \varepsilon_0/3, \quad d'(f_m(x_m), f(x_m)) < \varepsilon_0/3$$

для всех m, начиная с некоторого. Кроме того, $d'(f(x_m), f(x_0)) < \varepsilon_0/3$ в силу непрерывности предельного отображения f. Таким образом, по неравенству треугольника $d'\left(f_m(x_m), f_m(x_0)\right) < \varepsilon_0$, что противоречит сделанному предположению. $\Box$

Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равномерно равностепенно непрерывным* на множестве $E \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$ для любых x и $x' \in E$ с $d(x, x') < \delta$ для всех $f \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1. *Пусть* (X, d) *и* $\left(X', d'\right)$ *- произвольные метрические пространства и пусть* $\mathfrak{F}$ *-семейство равностепенно непрерывных отображений* $f : X \to X'$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *равномерно равностепенно непрерывно на любом компакте* $C \subset X$.

Доказательство. Допустим, что утверждение Леммы неверно, т.е. найдётся компакт $C \subset X$, число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность пар точек $x_k, x'_k \in C$, такая что $d(x_k, x'_k) < 2^{-k}$ и $d'\left(f_k(x_k), f_k(x'_k)\right) \geq \varepsilon_0$ для некоторой последовательности $f_k \in \mathfrak{F}, k = 1, 2, \ldots$. Без ограничения общности можно считать, что $x_k \to x_0$ и $x'_k \to x_0 \in C$, поскольку $C-$ компакт. Но тогда $d'\left(f_k(x_k), f_k(x_0)\right) < \varepsilon/3$ и $d'\left(f_k(x'_k), f_k(x_0)\right) < \varepsilon/3$ при достаточно больших k в силу равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{F}$ в точке x_0. Таким образом, $d'\left(f_k(x_k), f_k(x'_k)\right) < \varepsilon_0$, что противоречит предположению. $\Box$

Согласно Предложения 1, получаем

Следствие 1. *Нормальные семейства отображений в метрических пространствах являются равномерно равностепенно непрерывными на компактах.*

Пусть $(X, d), (X', d')-$ метрические пространства, $\mathfrak{F}-$ некоторое семейство отображений между пространствами X и X'. Пусть множество $E \subset X$ не вырождается в точку. Тогда функция

$$\omega_E(t) = \omega_E^{\mathfrak{F}}(t) = \sup_{\substack{d(x,z)\leq t,\\ x,z\in E, f\in\mathfrak{F}}} d'\left(f(x), f(z)\right), \ t \in (0, \delta_E], \tag{4}$$

где δ_E - диаметр множества E, $\delta_E = \sup\limits_{x,z\in E} d(x, z)$, называется *модулем непрерывности семейства* $\mathfrak{F}$ на множестве E.

Функция

$$\omega_{x_0}(t) = \omega_{x_0}^{\mathfrak{F}}(t) = \sup_{\substack{d(x_0,x)\leq t,\\ x\in X, f\in\mathfrak{F}}} d'\left(f(x_0), f(x)\right), \ t \in (0, \delta_X], \tag{5}$$

называется *модулем непрерывности семейства* $\mathfrak{F}$ *в точке* $x_0 \in X$.

По определению, ω_E и ω_{x_0} неотрицательны, не убывают и непрерывны справа. Заметим, что $\omega_{x_0}(t) \to 0$ при $t \to 0$ для любого $x_0 \in X$, если семейство $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.

Из Леммы 1 непосредственно следует

Следствие 2. *Если семейство* $\mathfrak{F}$ *отображений* $f : X \to X'$ *равностепенно непрерывно, то* $\omega_C(t) \to 0$ *при* $t \to 0$ *для любого компакта* $C \subset X$.

Доказательство. Пусть $C-$ произвольный компакт из пространства X. По Лемме 1 семейство $\mathfrak{F}$ равномерно равностепенно непрерывно на C.

Берём любое $\varepsilon > 0$. Находим $\delta = \delta(\varepsilon)$: при $x\,, z :\ d(x,z) < \delta$

$$d'\left(f\left(x\right), f\left(z\right)\right) < \varepsilon$$

для всех $f \in \mathfrak{F}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\delta \in (0, \delta_C]$. В последнем неравенстве переходим к супремуму по всем $x\,, z \in C$ с $d(x,z) \le t$. Получаем

$$\omega_C(t) < \varepsilon\,.$$

Следствие 2 доказано. □

Предложение 2. *Пусть* (X, d) *и* $\left(X', d'\right)$ *- произвольные метрические пространства и* $\overline{\mathfrak{F}}$ *- замыкание семейства* $\mathfrak{F}$ *отображений* $f : X \to X'$ *относительно поточечной сходимости. Тогда* $\overline{\mathfrak{F}}$ *и* $\mathfrak{F}$ *имеют одинаковые модули непрерывности (4) и (5).*

Доказательство. Докажем утверждение для модуля непрерывности (5). Пусть $x,\ x_0 \in X\,, f \in \mathfrak{F}$. Т.к. супремум по большему множеству может только увеличиться, то

$$\omega_{x_0}^{\mathfrak{F}}(t) \le \omega_{x_0}^{\overline{\mathfrak{F}}}(t)\,. \tag{6}$$

Пусть, далее, $f(x) \in \overline{\mathfrak{F}}-$ произвольное отображение, $x_0\,, x \in X$ с $d(x, x_0) \le t$. Тогда существует последовательность $f_m(x) \in \mathfrak{F}$ такая, что $f_m(x) \to f(x)$ при всех $x \in X$.

В силу непрерывности метрики,

$$d'\left(f_m\left(x\right), f_m\left(x_0\right)\right) \to d'\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right)$$

Берём любое $\varepsilon > 0$. Для него находим номер $N = N(\varepsilon, x, x_0)$: при $m > N$

$$d'\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) \le d'\left(f_m\left(x\right), f_m\left(x_0\right)\right) + \varepsilon\,.$$

Из последнего соотношения, по определению точной верхней грани, следует, что

$$d'\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) \le \omega_{x_0}^{\mathfrak{F}}(t) + \varepsilon\,.$$

В этом неравенстве переходим к супремуму по всем $x \in X$ с $d(x, x_0) \le t$ и по всем функциям $f \in \mathfrak{F}$. Получаем

$$\omega_{x_0}^{\overline{\mathfrak{F}}}(t) \le \omega_{x_0}^{\mathfrak{F}}(t) + \varepsilon\,.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\omega_{x_0}^{\overline{\mathfrak{F}}}(t) \le \omega_{x_0}^{\mathfrak{F}}(t)\,. \tag{7}$$

На основании соотношений (6) и (7), делаем нужное заключение. □

Для модуля непрерывности (4) утверждение доказывается аналогично.

Следствие 3. *Если последовательность отображений* $f_k : X \to X'$, $k = 1, 2 \ldots$, *равностепенно непрерывна и* $f_k(x) \to f(x)$ *при* $k \to \infty$ *для каждого* $x \in X$, *то функция* $f : X \to X'$ *непрерывна.*

Доказательство. Предположим, что мы имеем последовательность равностепенно непрерывных отображений $f_k(x)$, которая сходится поточечно к функции $f(x)$. Покажем, что $f(x)$ непрерывно.

Обозначим через $\overline{\{f_k\}_{k=1}^{\infty}}$ замыкание последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в топологии поточечной сходимости. На основании Предложения 2 и по определению точной верхней грани, для любых x, x_0 с $d(x, x_0) \le t$ имеем

$$d'\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) \le \sup_{\substack{d(x,x_0)\le t \\ g\in\overline{\{f_k\}_{k=1}^{\infty}}}} d'\left(g\left(x\right), g\left(x_0\right)\right) =$$

$$\sup_{\substack{d(x,x_0)\le t \\ g\in\{f_k\}_{k=1}^{\infty}}} d'\left(g\left(x\right), g\left(x_0\right)\right) \to 0$$

при $t \to 0$. Что и доказывает непрерывность отображения f. □

Последовательность отображений $f_k : X \to X'$, $k = 1, 2 \ldots$, называется *непрерывно сходящейся* к отображению $f : X \to X'$, если $f_k(x_k) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$ для любой сходящейся последовательности $x_k \to x_0$.

Замечание 1. *Равномерная сходимость непрерывных функций на компактах всегда влечёт непрерывную сходимость, поскольку* $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \{x_k\}$ – *компакт, при условии, что* $x_k \to x_0$ *и, кроме того,*

$$d\left(f_k\left(x_k\right), f\left(x_0\right)\right) \le d\left(f_k\left(x_k\right), f\left(x_k\right)\right) + d\left(f\left(x_k\right), f\left(x_0\right)\right).$$

В сепарабильных пространствах эти две сходимости эквивалентны, см. [4], *с. 268.*

Очевидно также, что непрерывная сходимость всегда влечёт поточечную сходимость. Обратное утверждение неверно как показывает следующий пример $f_k(x) = x^k$, $x \in [0, 1]$: $f_k(x) \to 0$ *для* $x < 1$ *и* $f_k(1) \to 1$, *но* $f_k(x_k) \equiv \frac{1}{2}$ *для* $x_k = 2^{-\frac{1}{k}} \to 1$ *при* $k \to \infty$.

Следующая Теорема показывает, что в произвольных метрических пространствах все три вида сходимости (равномерная сходимость на компактах, непрерывная и поточечная сходимость) эквивалентны для равностепенно непрерывных семейств отображений.

Теорема 1. *Пусть* (X, d) *и* $\left(X', d'\right)$ *- произвольные метрические пространства и пусть* $\mathfrak{F}$ *-семейство равностепенно непрерывных отображений* $f : X \to X'$. *Тогда следующие утверждения для последовательности* $f_k \in \mathfrak{F}$, $k = 1, 2, \ldots$, *равносильны:*

1) f_k сходится равномерно на каждом компакте;
2) f_k сходится непрерывно;
3) f_k сходится в каждой точке $x \in X$.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3) сразу следуют из Замечания 1. Покажем, что из 3) следует 1).

Проведём рассуждения от противного. Допустим, что 3) $\not\Rightarrow$ 1), т.е., найдётся последовательность $f_k \in \mathfrak{F}$, такая, что $f_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ для всех $x \in X$, и одновременно, для некоторого компакта $C \subset X$ найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что для бесконечной подпоследовательности k : $d'\left(f_k\left(x_k\right), f\left(x_k\right)\right) \geq \varepsilon$, где $x_k \in C$. Без ограничения общности можно считать, что $d'\left(f_k\left(x_k\right), f\left(x_k\right)\right) \geq \varepsilon$ для всех k и что $x_k \to x_0 \in C$ при $k \to \infty$.

Однако, по неравенству треугольника

$$d'\left(f_k\left(x_k\right), f\left(x_k\right)\right) \leq d'\left(f_k\left(x_k\right), f_k\left(x_0\right)\right) +$$

$$+ d'\left(f_k\left(x_0\right), f\left(x_0\right)\right) + d'\left(f\left(x_0\right), f\left(x_k\right)\right)$$

и по Следствиям 2 и 3 мы приходим в противоречие с предположением. □

Следствие 4. *Замыкания $\overline{\mathfrak{F}}$ равностепенно непрерывных семейств $\mathfrak{F}$ относительно простой и равномерной на компактах сходимости совпадают в произвольных метрических пространствах.*

Лемма 2. *Пусть (X, d) - произвольное метрическое пространство, а $\left(X^{'}, d^{'}\right)$ - полное метрическое пространство. Если равностепенно непрерывная последовательность отображений $f_k : X \to X^{'}$ сходится на множестве E, плотном в X, то f_k сходится равномерно на каждом компакте $C \subset X$.*

Доказательство. Ввиду Теоремы 1 достаточно доказать, что сходимость f_k на E влечёт поточечную сходимость f_k на всём пространстве X. Пусть $x_0 \in X \setminus E$. Тогда найдётся последовательность $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, где $x_k \in E$, $k = 1, 2, \ldots$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся $K = K(\varepsilon)$, такое, что $d'\left(f_m(x_k), f_m(x_0)\right) < \varepsilon/3$ для всех $k \geq K$ при любом $m = 1, 2, \ldots$, по равностепенной непрерывности f_m. Фиксируя $k_0 \geq K$, по критерию Коши получаем, что

$$d'\left(f_n\left(x_{k_0}\right), f_m\left(x_{k_0}\right)\right) < \varepsilon/3$$

для всех m и $n \geq N$. Наконец, по неравенству треугольника

$$d'\left(f_n\left(x_0\right), f_m\left(x_0\right)\right) \leq d'\left(f_n\left(x_0\right), f_n\left(x_{k_0}\right)\right) +$$

$$+ d'\left(f_n\left(x_{k_0}\right), f_m\left(x_{k_0}\right)\right) + d'\left(f_m\left(x_{k_0}\right), f_m\left(x_0\right)\right) < \varepsilon$$

при всех $n, m \geq N$, т.е., последовательность $f_n(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, является фундаментальной и поэтому сходится в X'. □

Хорошо известно, см., напр., Теорему 3 в [23], с. 416, что любое компактное метрическое пространство полно. Используя диагональный процесс, на основании Предложения 1 и Леммы 2, получаем

Следствие 5. *Если (X, d)-сепарабильное метрическое пространство, а $\left(X^{'}, d^{'}\right)$-компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X^{'}$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.*

В дальнейшем мы используем *сферическую (хордальную)* метрику:

$$h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|, \tag{8}$$

где π - стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}\,,$$

$$h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, x \neq \infty \neq y. \tag{9}$$

Отметим, что всегда

$$h(x, y) \, \leq \, 1\,, \tag{10}$$

и

$$h(x, y) \, \leq \, |x - y|\,. \tag{11}$$

Кроме того, в единичном шаре $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение:

$$h(x, y) \, \geq \, \frac{1}{2}\,|x - y|\,. \tag{12}$$

Хордальным диаметром множества $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) \, = \, \sup\limits_{x\,, y \,\in\, E} \, h(x, y)\,. \tag{13}$$

3. Основная лемма искажения Q - гомеоморфизмов.

Компактное множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называют *континуумом,* если E связно. Говорят, что континуум вырожденный, если он состоит из единственной точки. Далее, пусть заданы множества E, F и $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$. Всюду далее $\triangle(E,F,G)$ обозначает семейство всех невырожденных (непостоянных) кривых $\gamma : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ соединяющих E и F в G, т.е. $\gamma \in \triangle(E,F,G)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ для всех $t \in (a,b)$. Семейство $\triangle(E,F)$ обозначает $\triangle(E,F,\overline{\mathbb{R}^n})$. Область D в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется кольцом, если $\overline{\mathbb{R}^n}\backslash D$ имеет две (связных) компоненты C_1 и C_2. В этом случае мы пишем $D = R(C_1,C_2)$. Здесь $cap\, R(C_1,C_2)$ обозначает конформный модуль $\triangle(C_1,C_2)$, см. соотношение (3) . *Кольцом Тейхмюллера* $R_{T,n}(s)$ называется кольцо $R([-e_1,0],[se_1,\infty])$, $s > 0$.

Согласно хорошо известной Лемме Геринга,

$$cap\ R(C_1,C_2) \geq \tau\left(\frac{1}{h(C_1)h(C_2)}\right), \tag{14}$$

где

$$\tau(s) = \tau_n(s) = cap\ R_{T,n}(s), \tag{15}$$

см., напр., 7.37 в [42], или [7].

Хорошо известно также, см., напр., (7.19) и (7.22) в [42] или [7], что

$$\tau_n(s) = \frac{\omega_{n-1}}{[\log\Phi(s)]^{n-1}} \tag{16}$$

где ω_{n-1} - площадь сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$,

$$s+1 \leq \Phi(s) \leq \lambda_n^2\cdot(s+1),\ \ s>1. \tag{17}$$

Здесь $\lambda_n \geq 4$. Более подорбно, $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ as $n \to \infty$. Следовательно,(14) влечёт, что

$$M(\triangle(E,F)) \geq \frac{\omega_{n-1}}{\left[\log\frac{2\lambda_n^2}{h(E)h(F)}\right]^{n-1}} \tag{18}$$

для произвольных континуумов E и F в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Лемма 3. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, Q-гомеоморфизм, такой что $D' = f(D)$ опускает, по крайней мере, две точки v и $w \in \overline{\mathbb{R}^n}$ с $h(v,w) \geq \delta > 0$. Если для $x_0 \in D$ и $0 < \varepsilon_0 \leq dist(x_0,\partial D)$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\ dm(x) \leq c\cdot I^p(\varepsilon),\ \ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{19}$$

для некоторого $x_0 \in D$ и $0 < \varepsilon_0 \leq dist(x_0,\partial D)$ где $p \leq n$ и $\psi_\varepsilon(t)$ - неотрицательная на $(0,\infty)$ функция, такая, что

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)dt < \infty,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{20}$$

тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta}\, exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|)\} \tag{21}$$

для всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, *где*

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2,\quad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}},\quad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}, \tag{22}$$

$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1}),\ \lambda_2 = 4$ *и* $\lambda_n^{1/n} \to e$ *as* $n \to \infty$.

Здесь мы используем стандартное обозначение шара в $\mathbb{R}^n$:

$$B(x_0, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon_0\}. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть Γ_ε - семейство всех кривых, соединяющих $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ и $\overline{\mathbb{R}^n} \backslash B(x_0, \varepsilon_0)$ в кольце $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$. По Теореме Лузина, см. 2.3.5 в [5] и [40], с. 69, существует борелевская функция $\psi_\varepsilon^*(t) = \psi_\varepsilon(t)$, такая что функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi_\varepsilon^*(|x - x_0|)/I(\varepsilon), & x \in A_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash A_\varepsilon \end{cases} \tag{24}$$

является допустимой для семейства Γ_ε. Согласно определению $Q-$ гомеоморфизма и соотношению (19), будем иметь, что

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(x)\rho_\varepsilon^n(x)\, dm(x) \le c \cdot I^{p-n}(\varepsilon). \tag{25}$$

По Теореме Жордана-Брауэра, множество $\overline{\mathbb{R}^n} \backslash fA_\varepsilon$ состоит из двух связных компонент. Пусть $E = f\left(\overline{B\,(x_0, \varepsilon)}\right)$ и $F = \overline{\mathbb{R}^n} \backslash f\,(B\,(x_0, \varepsilon_0))$ и пусть Γ_ε^* обозначает семейство кривых, соединяющих E и F в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда

$$M\,(f\Gamma_\varepsilon) = M\,(\Gamma_\varepsilon^*)\,. \tag{26}$$

Действительно, по определению, $\gamma \in f\Gamma_\varepsilon$ соединяет E и F и, следовательно, $f\Gamma_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon^*$ и $M\,(f\Gamma_\varepsilon) \le M\,(\Gamma_\varepsilon^*)$. С другой стороны, $f\Gamma_\varepsilon < \Gamma_\varepsilon^*$, поскольку fA_ε отделяет E и F и, следовательно, $M\,(f\Gamma_\varepsilon) \ge M\,(\Gamma_\varepsilon^*)$, см., напр., Теорему 1$(c)$ в [6] and 6.4 в [41] .

Следовательно, (21) следует из (25) , (26) и (18) . □

Следствие 6. *В условиях Леммы* 3 , *при* $p = 1$

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta}\, exp\ \{-\beta_n I(|x - x_0|)\}. \tag{27}$$

4. Оценки искажения расстояния при $Q-$гомеоморфизмах.

Теорема 2. *Пусть $f: D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, $-$ $Q-$гомеоморфизм, такой что $D' = f(D)$ опускает, как минимум, две точки v и $w \in \overline{\mathbb{R}^n}$ с $h(v,w) \geq \delta > 0$. Тогда для каждой точки $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) \leq dist\,(x_0, \partial D)$, и для каждого $\beta \geq 1/(n-1)$,*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta}\, exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)}\right\} \tag{28}$$

где α_n задаётся соотношением (22) *и $q_{x_0}(r)$ - среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x-x_0| = r$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t q_{x_0}^{\beta}(t)}, & t \in (0, \varepsilon_0), \\ 0, & \text{t} \in [\varepsilon_0, \infty)\,. \end{cases} \tag{29}$$

Будем иметь:

(30)
$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta n-1}(r)} \leq \omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q^{\beta}(r)}\,.$$

Заключение теоремы следует теперь из Леммы 3 с $p = 1$. □

Замечание 2. *Конечно, среднее значение $q_{x_0}(r)$ функции $Q(x)$ на некоторых сферах $|x - x_0| = r$ может быть бесконечно. Однако, скажем, по теореме Фубини, см., напр.,* [40]*, $q_{x_0}(r)$ измерима по параметру r, поскольку $Q(x)$ измерима по x. Более того,*

$$\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)} < \infty \tag{31}$$

для $x \neq x_0$, т.к. $q_{x_0}(r) \geq 1$. Интеграл может быть равен 0, если $q_{x_0}(r) = \infty$ п.в., но в таком случае неравенство (28) очевидно, ибо $\alpha_n \geq 32$ и $\delta \leq 1$, ибо $h(f(x), f(x_0))$ меньше либо равно 1.

Следствие 7. *В условиях Теоремы 2*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta}\, exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r q(r)}\right\}, \tag{32}$$

где$\delta(x_0) = dist(x_0, \partial D)$.

Выбирая в Теореме 2 $\beta = 1/(n-1)$, приходим к заключению.

Следствие 8. *Если*

$$q_{x_0}(r) \le \left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1} \tag{33}$$

для $r < \varepsilon(x_0) \le \delta(x_0)$, *тогда*

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \frac{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}} \tag{34}$$

для всех $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$.

Следствие 9. *Если*

$$Q(x) \le \left[\log \frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}, \quad x \in B(x_0, \varepsilon(x_0)), \tag{35}$$

тогда соотношение (34) *имеет место в шаре* $B(x_0, \varepsilon(x_0))$.

Замечание 3. *Если вместо соотношений* (33) *и, соответственно,* (35) *выполнены соотношения*

$$q_{x_0}(r) \le c \cdot \left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1} \tag{36}$$

и, соответственно,

$$Q(x) \le c \cdot \left[\log \frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}, \tag{37}$$

тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \left[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}\right]^{1/c^{1/(n-1)}}. \tag{38}$$

5. Конечное среднее колебание

Говорят, что функция $\varphi : D \to R$ с $\varphi \in L^1_{loc}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, $\varphi \in$ **BMO**, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\varphi(x) - \varphi_B| \, dm(x) < \infty, \tag{39}$$

где точная верхняя грань берётся по всем шарам $B \subset D$ и

$$\varphi_B = \frac{1}{|B|} \int\limits_B \varphi(x) \, dm(x) - \tag{40}$$

- среднее значение функции φ на шаре B.

С целью упрощения записи, мы обозначаем в дальнейшем

$$\fint_A f(x)\,dm(x) := \frac{1}{|A|}\int_A f(x)\,dm(x)\,, \tag{41}$$

где, как обычно, $|A|$ обозначает лебегову меру множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Хорошо известно, что

$$L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{loc}(D)\,, \tag{42}$$

см.,напр., [18] и [35]. Более подробную информацию о функциях ограниченного среднего колебания и о связи их с квазиконформными и квазирегулярными отображениями можно найти также в [2], [3], [19], [30] и [34].

Следуя работам [12]-[16], введём следующие определения.

Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in \mathbf{FMO}$ в x_0, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\ dm(x) < \infty\,, \tag{43}$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x)\,. \tag{44}$$

Заметим, что при выполнении условия (43) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Также будем говорить, что $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – функция конечного среднего колебания в области D, пишем $\varphi \in FMO(D)$, или просто $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x \in D$.

В этом параграфе мы сформулируем некоторые результаты, известные для отображений конечного среднего колебания. По поводу доказательств мы отсылаем читателя к источникам [12]-[16].

Предложение 3. *Предположим, что для некоторых чисел $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, выполнено соотношение*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\,dm(x) < \infty\,. \tag{45}$$

Тогда функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.

Следствие 10. *Пусть в точке $x_0 \in D$ выполнено соотношение:*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\,dm(x) < \infty\,. \tag{46}$$

Тогда функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.

Следующее утверждение является, пожалуй, ключевым при изучении отображений конечного среднего колебания. Ранее оно широко было использовано в работах А.А.Игнатьева и В.И. Рязанова, см. Следствие 2.5 в [16] и [12]-[14] для решения проблемы гомеоморфного (непрерывного) продолжения гомеоморфизмов на границу.

Лемма 4. *Пусть $\varphi : D \to \mathbb{R}, n \geq 2$ − неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{(|x| log\frac{1}{|x|})^n} = O\left(loglog\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{47}$$

при $\varepsilon \to 0$ и для некоторого $\varepsilon_0 \leq dist\,(0, \partial D)$.

Теорема 3. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$ – Q-гомеоморфизм, такой что $D^{'} = f(D)$ опускает, по меньшей мере, две точки v и $w \in \overline{\mathbb{R}^n}$ с $h(v, w) \geq \delta > 0$. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in D$, то*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta}\left\{\log\frac{\varepsilon_0}{|x - x_0|}\right\}^{-\beta_0} \tag{48}$$

для $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, при некотором ε_0 с $\varepsilon_0 < dist\,(x_0, \partial D)$, где α_n зависит только от n и $\beta_0 > 0$ зависит только от функции Q.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 < \min\{1,\ dist\,(x_0, \partial D)\}$. Предположим, что функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в области D. Тогда на основании Леммы 4, для функции $\psi(t) = \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$ будем иметь, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\; dm(x) \;=\; \int\limits_{\varepsilon\,<\,|t|\,<\varepsilon_0} Q(t+x_0)\psi^n\,(|t|)\; dm(t) \;=$$

$$= \int\limits_{\varepsilon\,<\,|t|\,<\varepsilon_0} \frac{Q(t+x_0)}{\left(|t|\,\log\frac{1}{|t|}\right)^n}\, dm(t) \;=\; O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{49}$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция $Q_1(t) := Q(t + x_0)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0.

Заметим также, что

$$I(\varepsilon) \;:=\; \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \;=\; \log\left(c\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \;=\; O\left(loglog\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{50}$$

где $c = -\log\varepsilon_0$. На основании соотношений (49) и (50) теперь получаем, что для выбранной функции ψ в точности выполнено соотношение (19) с $p = 1$. Оставшаяся часть утверждения следует теперь из Леммы 3.

$\square$

6. О нормальных семействах Q-гомеоморфизмов

Обозначим через $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ класс всех Q-гомеоморфизмов $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \delta > 0$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Если $Q \in FMO$, то класс $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений.*

Следствие 11. *Семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ нормально, если для каждого $x_0 \in D$,*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x) \quad dm(x) < \infty. \tag{51}$$

Следствие 12. *Класс $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений, если каждая точка $x_0 \in D$ является точкой Лебега функции $Q(x)$.*

Теорема 5. *Семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ нормально, елси условие расходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)} = \infty \tag{52}$$

выполняется при некотором $\beta \geq 1/(n-1)$ и, в частности, при $\beta = 1$ в каждой точке $x_0 \in D$.

Здесь всюду $\delta(x_0) = dist(x_0, \partial D)$ и $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$. В виду Замечания 3, имеем следующее утверждение:

Следствие 13. *Класс $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(D)$ нормален, если $Q(x)$ имеет особенности логарифмического типа порядка не выше, чем $n-1$ в каждой точке $x \in D$.*

Замечание 4. *В частности, все результаты, сформулированные в Разделах 3-6 справедливы для гомеоморфизмов f класса Соболева $W^{1,n}_{loc}$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{loc}$ при условии, что*

$$K_I(x,f) \leq Q(x) \ \ a.e. \tag{53}$$

где $K_I(x,f)$ так называемая внутренняя дилатация отображения f в точке $x \in D$, см., напр., Теоремы 4.6 и 6.10 в [29]. Заметим, что гомеоморфизмы класса $f \in W^{1,n}_{loc}$ с $K_I \in L^1_{loc}$, f^{-1} принадлежат классу $W^{1,n}_{loc}$, см. Следствие 1 в [22].

Список литературы

[1] K. Astala, T. Iwaniec, P. Koskela and G. Martin, *Mappings of BMO-bounded distortion,* Math. Annalen, **317** (2000), 703–726.

[2] K. Astala, *A remark on quasiconformal mappings and BMO–functions,* Michigan Math. J., **30** (1983), 209–212.

[3] K. Astala and F.W. Gehring, *Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmuller space,* J. Anal. Math., **46** (1986), 16–57.

[4] J. Dugundji, *Topology,* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[5] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры,* Москва, Наука, 1987.

[6] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion,* Acta Math., **98** (1957), 171–219.

[7] F.W. Gehring, *Quasiconformal mappings, in Complex Analysis and its Applications,* V. 2., International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[8] F.W. Gehring, *Characteristic Properities of Quasidisk, Les prosses de l'Universite de Montreal,* Montreal, 1982.

[9] F.W. Gehring and T. Iwaniec, *The limit of mappings with finite distortion,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **24** (1999), 253–264.

[10] J. Heinonen and P. Koskela, *Sobolev mappings with integrable dilatations,* Arch. Rational Mech. Anal., **125** (1993), 81–97.

[11] T. Iwaniec and G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non–linear Analysis,* Clarendon Press, Oxford, 2001.

[12] A. Ignat'ev and V. Ryazanov, *Finite mean oscillation in the mapping theory,* 2002, 17 pp., Preprint of Department of Mathematics, University of Helsinki, 2002.332.

[13] А. Игнатьев и В. Рязанов, *К теории устранимых особенностей пространственных отображений,* Труды ИПММ НАН Украины, **8** (2002), 25–38.

[14] A. Ignat'ev and V. Ryazanov, *On the boundary behavior of space mappings,* 2003, 11 pp., Preprint of Department of Mathematics, University of Helsinki, 2003.350.

[15] A. Ignat'ev and V. Ryazanov, *Boundary behavior of Q−homeomorphisms,* Proc. Inst. Appl. Math. Mech. NASU, **9** (2004), 89–101.

[16] А. Игнатьев и В. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений,* Укр. матем. вестник, **2** no. 3 (2005), 395–417.

[17] T. Iwaniec and V. Šverák, *On mappings with integrable dilatation,* Proc. Amer. Math. Soc., **118** (1993), 181–188.

[18] F. John, and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation,* Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 415–426.

[19] P.M. Jones, *Extension theorems for BMO,* Indiana Univ. Math. J., **29** (1980), 41–66.

[20] J. Kauhanen, P. Koskela and J. Maly, *Mappings of finite distortion: discreteness and openness,* Arch. Rational Mech. Anal., **160** (2001), 135–151.

[21] J. Kauhanen, P. Koskela and J. Maly, *Mappings of finite distortion: condition N,* Michigan Math. J., **49** (2001), 169–181.

[22] P. Koskela and J. Onninen, *Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities*, 2002, 32 pp., Preprint Dept. Math. Stat., University of Jyväskylä, 257.2002.

[23] К. Куратовский, *Топология,* Т.1, Москва, Мир, 1966.

[24] O. Lehto and K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane,* Springer, New York etc., 1973.

[25] V. Maz'ya, *Sobolev classes,* Springer, Berlin–New York, 1985.

[26] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *BMO–quasiconformal mappings and Q-homeomorphisms in space,* 2001, 24 pp., Preprint of Department of Mathematics, University of Helsinki, 2001.288.

[27] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *To the theory of Q-homeomorphisms,* Dokl. Akad. Nauk Rossii, **381** no. 1 (2001), 20–22.

[28] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *On the boundary behavior of Q-homeomorphisms,* 2002, 12 pp. Preprint of Department of Mathematics, University of Helsinki, 2002.318.

[29] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion,* J. D. Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[30] O. Martio, V. Ryazanov and M. Vuorinen, *BMO and Injectivity of Space Quasiregular Mappings,* Math. Nachr., **205** (1999), 149–161.

[31] J.J. Manfredi and E. Villamor, *Mappings with integrable dilatation in higher dimensions,* Bull. Amer. Math. Soc., **32** no. 2 (1995), 235–240.
[32] J.J. Manfredi and E. Villamor, *An extension of Reshetnyak's theorem,* Indiana Univ. Math. J., **47** no. 3 (1998), 1131–1145.
[33] J. Maly and W.P. Ziemer, *Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations,* Math. Surveys and Monographs 51, AMS, 1997.
[34] H.M. Reimann, *Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings,* Comment. Math. Helv., **49** (1974), 260–276.
[35] H.M. Reimann and T. Rychener, *Funktionen Beschr„nkter Mittlerer Oscillation,* Springer, Berlin etc., 1975.
[36] V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *BMO–quasiconformal mappings,* 1997, 22 pp., Preprint of Department of Mathematics, University of Helsinki, 1997.155.
[37] V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *On the theory of BMO-quasiregular mappings,* Dokl. Akad. Nauk Rossii, **369** no. 1 (1999), 13–15.
[38] V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *BMO-quasiconformal mappings,* J. d'Analyse Math., **83** (2001), 1–20.
[39] V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation,* Sib. Adv. in Math., **11** no. 2 (2001), 94–130.
[40] S. Saks, *Theory of the Integral*, New York, Dover Publ. Inc., 1964.
[41] J. Vaisala, *Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings,* Lecture Notes in Math. **229.** Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.
[42] M. Vuorinen, *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings,* Lecture Notes in Math. **1319.** Berlin etc., Springer–Verlag, 1988.

Рязанов Владимир Ильич, Севостьянов Евгений Александрович
Институт прикладной математики и механики,
Национальная Академия Наук Украины
ул. Розы Люксембург, д. 74
83114, Донецк, Украина
E-mail address: sevostyanov@skif.net, ryaz@iamm.ac.donetsk.ua