S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 185–196 (2006) УДК 510.67

MSC 03C64

БИНАРНОСТЬ $\aleph_0$–КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ РАНГА ВЫПУКЛОСТИ 1

Б.Ш. Кулпешов

Abstract. We prove that $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1 are binary.

1. Введение

Пусть L — счетный язык первого порядка. Повсюду в этой статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется в этих структурах как линейный порядок. Для произвольных подмножеств A, B структуры M мы пишем $A < B$, если $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Если $A \subset M$ и $x \in M$, то мы пишем $A < x$, если $A < \{x\}$. Для любого подмножества A структуры M $A^+ := \{b \in M \mid A < b\}$ и $A^- := \{b \in M \mid b < A\}$. Для произвольного полного 1-типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M. Через $<_{lex}$ обозначаем отношение лексикографического упорядочения. Для произвольного кортежа $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ длины n через $\bar{b}_i$ обозначаем кортеж $\langle b_1, b_2, \ldots, b_i \rangle$ для каждого $1 \leq i \leq n-1$. Подмножество A структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.

Данная статья касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в совместной работе Д. Макферсона, Д. Маркера и Ч. Стейнхорна [1]. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым

Kulpeshov, B.Sh., Binarity for $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1.

The research described in this publication was made possible in part by Award No. KZM1-2620-AL-04 of the U.S. Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF).

Поступила 16 февраля 2006 г., опубликована 30 мая 2006 г.

кольцом нормирования [2] обеспечивают важный пример слабо о-минимальных структур. *Слабо о-минимальная структура* есть линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Ранг выпуклости формулы с одной свободной переменной введен в [3]. В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов. Очевидно что о-минимальная теория имеет ранг выпуклости 1. А. Пиллэй и Ч. Стейнхорн полностью описали $\aleph_0$–категоричные о-минимальные теории [4]. Из их описания следует бинарность этих теорий. В настоящей работе мы доказываем бинарность $\aleph_0$–категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1.

Введем необходимые определения и некоторые предварительные результаты.

Пусть $Y \subset M^{n+1}$ — $\emptyset$–определимо, $\pi : M^{n+1} \to M^n$ — проекция, отбрасывающая последнюю координату, $Z := \pi(Y)$, и для $\bar{a} \in Z$ $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на M^n следующим образом: множество $M^n \setminus Z$ является одним $\sim$-классом, и для $\bar{a}, \bar{b} \in Z$ $\bar{a} \sim \bar{b}$ тогда и только тогда, когда $\sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}$. Пусть $\overline{Z} := Z/\sim$, и для каждого $\bar{x}$ пусть $[\bar{x}]$ обозначает $\sim$-класс кортежа $\bar{x}$. Существует естественный $\emptyset$–определимый линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$, определенный следующим образом: если $\bar{a} \notin Z$, тогда $[\bar{a}] < x$ для всех $x \in M$; если $\bar{a} \in Z$ и $x \in M$, тогда $[\bar{a}] < x$ тогда и только тогда, когда $w < x$ для любого $w \in Y_{\bar{a}}$. Ясно что если $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, тогда существует $x \in M$, такой что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, поэтому мы получаем линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$. Мы называем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* в $\overline{M}$ (в данном случае, $\emptyset$–определимым сортом), где через $\overline{M}$ обозначается объединение всех сортов. Аналогично мы можем получить сорт в $\overline{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Пусть $A, D \subseteq M$, D бесконечно, $Z \subseteq \overline{M}$ — A–определимый сорт и $f : D \to Z$ — A–определимая функция. Говорят, что f является *локально возрастающей* (*локально убывающей, локально константой*) на D, если для любого $a \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий a, так что f является строго монотонно возрастающей (строго монотонно убывающей, константой) на J; также говорят что f — *локально монотонная* на D, если она локально возрастающая или локально убывающая на D.

Лемма 1. *Пусть T — слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $Z \subseteq \overline{M}$ — A–определимый сорт и $f : M \to Z$ — A–определимая частичная функция. Тогда f является строго монотонной или константой на $p(M)$.*

Доказательство Леммы 1.

В силу теоремы из [5] (или Теоремы 3.3 [1]) и 1-неразличимости $p(M)$ над A f является локально монотонной или локально константой на $p(M)$. Не умаляя общности, предположим что f локально константа на $p(M)$ (случай локально монотонной функции рассматривается аналогично). Рассмотрим следующую формулу:

$$E(x,y) := \exists z[f(x)=z \wedge f(y)=z \wedge (x<y \rightarrow \forall t[x<t<y \rightarrow f(t)=z] \wedge$$
$$(x>y \rightarrow \forall t[x>t>y \rightarrow f(t)=z])]$$

Очевидно что E является A–определимым отношением эквивалентности на $p(M)$. Если не существует разбиения $p(M)$ на конечное число выпуклых множеств, так что f является константой на каждом их них, то E разбивает $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, противореча тому что T имеет ранг выпуклости 1. Если существует такое конечное разбиение $p(M)$ на n выпуклых множеств, то в силу 1-неразличимости $p(M)$ над A $n=1$. □

Лемма 2. ([3], Следствие 5.5) *Пусть T — слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1. Тогда в T выполняется Принцип Замены для алгебраического замыкания.*

Определение 1. (Байжанов Б.С., [6]) Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p,q \in S_1(A)$ — неалгебраические.
(1) Будем говорить что A-определимая формула $H(x,y)$ является *p–стабильной*, если существуют $\alpha,\gamma_1,\gamma_2 \in p(M)$ такие что $H(M,\alpha)\setminus\{\alpha\}\neq\emptyset$ и $\gamma_1 < H(M,\alpha) < \gamma_2$.
(2) Будем говорить что тип p является *неодиночным*, если существует p–стабильная формула.
(3) Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1,\beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.

Лемма 3. ([6], Следствие 34 (iii)) *Отношение не слабой ортогональности является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

Пусть $\bar{a} = \langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle \in M^n$. Будем говорить что кортеж $\bar{a}$ *возрастающий*, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Пусть $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $n \in \omega$. Будем говорить что $p(M)$ *n–неразличимо над A*, если для любых возрастающих n–кортежей $\bar{a} = \langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle, \bar{a}' = \langle a'_1,a'_2,\ldots,a'_n\rangle \in [p(M)]^n$ $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}'/A)$; будем также говорить что $p(M)$ *неразличимо над A*, если для каждого $n \in \omega$ $p(M)$ n–неразличимо над A.

Теорема 1. ([7], Следствие 3.8) *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) T имеет ранг выпуклости 1.

(2) Для любой модели $M \models T$ для любого $A \subseteq M$ каждый неалгебраический тип $p \in S_1(A)$ является одиночным.

(3) Для любой модели $M \models T$ для любого $A \subseteq M$ для любого неалгебраического типа $p \in S_1(A)$ $p(M)$ неразличимо над A.

Пусть $A \subseteq B \subseteq M$, B — конечно, $p_1,p_2,\ldots,p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические, причем $p_1(M) < p_2(M) < \ldots < p_s(M)$. Будем говорить что семейство 1-типов $\{p_1,p_2,\ldots,p_s\}$ *слабо ортогонально над B*, если каждый s–кортеж $\langle a_1,a_2,\ldots,a_s\rangle \in p_1(M)\times p_2(M)\times\ldots\times p_s(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над B. Будем говорить что семейство 1-типов $\{p_1,p_2,\ldots,p_s\}$ *ортогонально над B*, если для любой последовательности $(n_1,n_2,\ldots,n_s) \in \omega^s$ каждый возрастающий $(n_1+n_2+\ldots+n_s)$–кортеж $\langle a_1^1,a_1^2,\ldots,a_1^{n_1};\ldots;\ a_2^1,\ a_2^2,\ldots,a_2^{n_2};$

$\ldots; a_s^1, a_s^2, \ldots, a_s^{n_s}\rangle \in (p_1(M))^{n_1} \times (p_2(M))^{n_2} \times \ldots \times (p_s(M))^{n_s}$ удовлетворяет одному и тому же типу над B.
Если $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ и $p_1 \perp^w p_2$, то очевидно что $\{p_1, p_2\}$ слабо ортогонально над A.

2. Основная теорема

Теорема 2. *Любая $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1 является бинарной.*

Докажем ряд утверждений, которые потребуются для доказательства Теоремы 2.

Лемма 4. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические. Предположим что $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ слабо ортогонально над A. Тогда оно ортогонально над A.*

Доказательство Леммы 4.
Будем доказывать индукцией по $s \geq 1$. Случай $s = 1$ следует из Теоремы 1. Предположим что заключение леммы установлено для семейств из s 1-типов, и докажем это для семейств из $s+1$ типа $\{p_1, p_2, \ldots, p_s, p_{s+1}\}$. Возьмем произвольный s–кортеж $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s\rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times \ldots \times p_s(M)$. В силу слабой ортогональности $\{p_1, p_2, \ldots, p_s, p_{s+1}\}$ $p_{s+1}(M)$ 1-неразличимо над $A \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, и следовательно в силу Теоремы 1 $p_{s+1}(M)$ n–неразличимо над $A \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ для каждого $n \in \omega$. Возьмем произвольный $n_{s+1} < \omega$ и произвольный возрастающий n_{s+1}–кортеж $\bar{a}_{s+1} = \langle a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}}\rangle \in [p_{s+1}(M)]^{n_{s+1}}$ и докажем что $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ слабо ортогонально над $A \cup \{a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}}\}$. Если это не так, то существуют $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_s\rangle, \bar{a}' = \langle a_1', a_2', \ldots, a_s'\rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times \ldots \times p_s(M)$ такие что $tp(\bar{a}/A \cup \{\bar{a}_{s+1}\}) \neq tp(\bar{a}'/A \cup \{\bar{a}_{s+1}\})$. Тогда существует A–определимая формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ так что $M \models \phi(\bar{a}, \bar{a}_{s+1}) \wedge \neg\phi(\bar{a}', \bar{a}_{s+1})$. Поймем что существует возрастающий $\bar{a}_{s+1}' = \langle (a_{s+1}^1)', (a_{s+1}^2)', \ldots, (a_{s+1}^{n_{s+1}})'\rangle \in [p_{s+1}(M)]^{n_{s+1}}$ с условием $\neg\phi(\bar{a}, \bar{a}_{s+1}')$. Если такого кортежа не существует, то $M \models \theta(\bar{a})$, где

$$\theta(\bar{x}) := \forall y_1 \ldots \forall y_{n_{s+1}}[y_1 < \ldots < y_{n_{s+1}} \wedge \wedge_{j=1}^{n_{s+1}} U_{s+1}(y_j) \rightarrow \phi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_{n_{s+1}})]$$

и $U_{s+1}(y)$ — A–определимая формула, изолирующая тип p_{s+1}. Так как $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ слабо ортогонально над A, то $M \models \theta(\bar{a}')$, противореча нашему допущению. Следовательно, $M \models \phi(\bar{a}, \bar{a}_{s+1}) \wedge \neg\phi(\bar{a}, \bar{a}_{s+1}')$, противореча n_{s+1}–неразличимости $p_{s+1}(M)$ над $A \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$. Таким образом, $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ слабо ортогонально над $A \cup \{a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}}\}$, и по индукционному предположению, примененному к структуре $M' = \langle M, a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}}\rangle$, полученной обогащением M константами для $a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}}$ и остающейся $\aleph_0$–категоричной слабо о-минимальной структурой ранга выпуклости 1, $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ ортогонально над $A \cup \{a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}}\}$. В силу произвольности $\bar{a}_{s+1} = \langle a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}}\rangle \in [p_{s+1}(M)]^{n_{s+1}}$ заключаем что $\{p_1, p_2, \ldots, p_s, p_{s+1}\}$ ортогонально над A. □

Лемма 5. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда $\{p_1, \ldots, p_s\}$ слабо ортогонально над A.*

Доказательство Леммы 5.

Будем доказывать индукцией по $s \geq 2$. Шаг $s = 2$ является тривиальным. Предположим тогда, что заключение леммы установлено для множеств из s типов, и докажем это для множеств из $s+1$ типа, $\{p_1, \ldots, p_s, p_{s+1}\}$. Допустим противное: предположим что $\{p_1, \ldots, p_{s+1}\}$ не является слабо ортогональным над A. Тогда существуют $s+1$-кортежи $\langle a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}\rangle, \langle a_1', \ldots, a_s', a_{s+1}'\rangle \in p_1(M) \times \ldots \times p_s(M) \times p_{s+1}(M)$ такие что

$$tp(\langle a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}\rangle/A) \neq tp(\langle a_1', \ldots, a_s', a_{s+1}'\rangle/A)$$

Следовательно, существует A–определимая формула $\phi(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1})$ такая что

$$M \models \phi(a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}) \wedge \neg\phi(a_1', \ldots, a_s', a_{s+1}')$$

Поймем что существует $a_{s+1}'' \in p_{s+1}(M)$ такой что $M \models \neg\phi(a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}'')$. Допустим противное, т.е. $M \models \forall y[U_{s+1}(y) \rightarrow \phi(a_1, \ldots, a_s, y)]$, где $U_{s+1}(y)$ — A–определимая формула, изолирующая тип p_{s+1}. Но по индукционному предположению $tp(\langle a_1, \ldots, a_s\rangle/A) = tp(\langle a_1', \ldots, a_s'\rangle/A)$, противореча нашему допущению. Таким образом, существует s-кортеж $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_s\rangle \in p_1(M)\times\ldots\times p_s(M)$ и существуют $a_{s+1}', a_{s+1}'' \in p_{s+1}(M)$ такие что

$$M \models \phi(\bar{a}, a_{s+1}') \wedge \neg\phi(\bar{a}, a_{s+1}'')$$

Пусть $M' = \langle M, a_1, \ldots, a_{s-2}\rangle$. Очевидно что M' — $\aleph_0$–категоричная структура ранга выпуклости 1. Индукционное предположение гарантирует что $p_{s-1}(M)$, $p_s(M)$ и $p_{s+1}(M)$ остаются 1-неразличимыми в M', т.е. p_{s-1}, p_s и p_{s+1} имеют единственные расширения p_{s-1}', p_s' и p_{s+1}' соответственно до 1-типов над $A \cup \{a_1, \ldots, a_{s-2}\}$, а также то, что p_{s-1}', p_s' и p_{s+1}' попарно слабо ортогональны. Далее для удобства обозначений переименуем p_{s-1}', p_s' и p_{s+1}' через p_1, p_2 и p_3 соответственно, формулу $\phi(a_1, \ldots, a_{s-2}, x_{s-1}, x_s, x_{s+1})$ переименуем через $\phi(x_1, x_2, x_3)$; константы a_{s-1}, a_s, a_{s+1}' и a_{s+1}'' через a_1, a_2, a_3' и a_3'' соответственно. Таким образом, имеем $M \models \phi(a_1, a_2, a_3') \wedge \neg\phi(a_1, a_2, a_3'')$, где $a_1 \in p_1(M), a_2 \in p_2(M), a_3', a_3'' \in p_3(M)$. Не умаляя общности, будем считать что $\phi(a_1, a_2, M)$ выпукло, $\phi(a_1, a_2, M) \subset p_3(M)$ и $\phi(a_1, a_2, M)^- = p_3(M)^-$, откуда, в частности, следует $a_3' < a_3''$.

Пусть $f_{a_1}(y) := \sup\phi(a_1, y, M)$, $g_{a_2}(x) := \sup\phi(x, a_2, M)$. Так как $p_2(M)$ остается 1-неразличимым над $A \cup \{a_1\}$, то $f_{a_1}(y)$ не меняет своего поведения на всем $p_2(M)$, и поэтому должна быть либо строго монотонно возрастающей, либо строго монотонно убывающей, либо константой на всем $p_2(M)$. Если $f_{a_1}(y)$ была бы константой, тогда бы типы p_1 и p_2 не были слабо ортогональны. Аналогично те же рассуждения для $p_1(M)$ и $g_{a_2}(x)$. Так как $p_1(M)$ — 1-неразличимо над A в M', то если $f_{a_1}(y)$ строго монотонно возрастающая на $p_2(M)$, то и для любого $a_1' \in p_1(M)$ $f_{a_1'}(y)$ строго монотонно возрастающая на $p_2(M)$.

Случай 1. $f_{a_1}(y)$ — строго монотонно возрастающая на $p_2(M)$, $g_{a_2}(x)$ — строго монотонно возрастающая на $p_1(M)$.

Пусть $U_2(y)$ — A–определимая формула, изолирующая тип p_2. Возьмем $b_1 \in p_1(M)$ такой что $a_1 < b_1$ и рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(y) := U_2(y) \wedge \forall z[\phi(a_1, a_2, z) \rightarrow \phi(b_1, y, z)]$$

$$\Phi_2(y) := U_2(y) \wedge \forall y_1 \forall z[\neg\Phi_1(y_1) \wedge U_2(y_1) \wedge \phi(a_1, y_1, z) \rightarrow \phi(b_1, y, z)]$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\Phi_n(y) := U_2(y) \wedge \forall y_1 \forall z[\neg\Phi_{n-1}(y_1) \wedge U_2(y_1) \wedge \phi(a_1, y_1, z) \rightarrow \phi(b_1, y, z)]$$

$\dots \quad \dots \quad \dots$

Докажем что $\Phi_1(M) \subset \Phi_2(M) \subset \dots \subset \Phi_n(M) \subset \dots$ $(*)$. Действительно, поймем вначале что $\Phi_1(M) \subset \Phi_2(M)$. По определению формулы $\Phi_1(y)$ имеем: $\sup\{f_{b_1}(a_2')|a_2' \in \neg\Phi_1(M) \cap U_2(M)\} = f_{a_1}(a_2)$. С другой стороны, так как существует $a_0 \in \Phi_1(M)$ с условием $a_0 < a_2$, то имеем: $\sup\{f_{a_1}(a_2')|a_2' \in \neg\Phi_1(M) \cap U_2(M)\} < f_{a_1}(a_2)$. Следовательно, существует $a_2'' \in \neg\Phi_1(M) \cap U_2(M)$ такой что $\sup\{f_{a_1}(a_2')|a_2' \in \neg\Phi_1(M) \cap U_2(M)\} \leq f_{b_1}(a_2'')$. Таким образом, получаем что $\Phi_1(M) \subset \Phi_2(M)$. Предположим теперь что для любого $i \leq n$ $\Phi_{i-1}(M) \subset \Phi_i(M)$ и покажем что $\Phi_n(M) \subset \Phi_{n+1}(M)$. По определению формулы $\Phi_n(y)$ имеем:

$$\sup\{f_{b_1}(a_2')|a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M)\} = \sup\{f_{a_1}(a_2'')|a_2'' \in \neg\Phi_{n-1}(M) \cap U_2(M)\}$$

Так как $\Phi_{n-1}(M) \subset \Phi_n(M)$, то

$$\sup\{f_{a_1}(a_2')|a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M)\} < \sup\{f_{a_1}(a_2'')|a_2'' \in \neg\Phi_{n-1}(M) \cap U_2(M)\}$$

Следовательно, существует $a_2''' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M)$ такой что

$$\sup\{f_{a_1}(a_2')|a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M)\} \leq f_{b_1}(a_2''')$$

Таким образом, получаем что $\Phi_n(M) \subset \Phi_{n+1}(M)$. Мы доказали $(*)$, откуда получаем противоречие со счетной категоричностью теории T.
Случай 2. $f_{a_1}(y)$ — строго монотонно возрастающая на $p_2(M)$, $g_{a_2}(x)$ — строго монотонно убывающая на $p_1(M)$.
Рассматривая те же самые формулы, как в случае 1, будем иметь:

$$\Phi_1(M) \supset \Phi_2(M) \supset \dots \supset \Phi_n(M) \supset \dots$$

Опять получаем противоречие со счетной категоричностью теории T. $\square$

Пусть $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические. Будем говорить что A–определимая формула $\phi(x,y)$ является (p_1,p_2)–*секатором*, если существует $a \in p_1(M)$ такой что $\phi(a,M) \subset p_2(M)$, $\phi(a,M)$ выпукло и $\phi(a,M)^- = p_2(M)^-$. Очевидно что если $p_1 \not\perp^w p_2$, то существует хотя бы один (p_1,p_2)–секатор. Действительно, из условия $p_1 \not\perp^w p_2$ следует существование A–определимой формулы $H(x,y)$, $\alpha \in p_1(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in p_2(M)$ таких что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$. Не умаляя общности, предположим что $\beta_1 < \beta_2$. В силу слабой о-минимальности $H(M,\alpha)$ есть объединение конечного числа $A \cup \{\alpha\}$–определимых выпуклых множеств, и пусть $H_0(x,\alpha)$ определяет выпуклое множество, содержащее $\{\beta_1\}$. Тогда формула $\phi(x,y) := U_2(y) \wedge \exists t[H_0(t,x) \wedge y \leq t]$ является (p_1,p_2)–секатором.
Пусть $\phi_1(x,y)$, $\phi_2(x,y)$ — (p_1,p_2)–секаторы. Будем говорить, что $\phi_1(x,y)$ *меньше чем* $\phi_2(x,y)$, если существует $a \in p_1(M)$ такой что $\phi_1(a,M) \subset \phi_2(a,M)$. Очевидно что множество всех (p_1,p_2)–секаторов линейно упорядочено.

Лемма 6. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда*
1) Если существует $a \in p_1(M)$ такой что $dcl(A \cup \{a\}) \cap p_2(M) = \emptyset$, то (p_1,p_2)–секатор единственен.
2) Если существует $a \in p_1(M)$ такой что $dcl(A \cup \{a\}) \cap p_2(M) \neq \emptyset$, то существуют в точности два (p_1,p_2)–секатора $\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)$ так что $\phi_1(x,y)$ меньше чем $\phi_2(x,y)$ и $|\phi_2(a,M) \setminus \phi_1(a,M)| = 1$ для любого $a \in M$.

Доказательство Леммы 6.
1) В силу Следствия 2 [8].
2) Пусть $b \in dcl(A \cup \{a\}) \cap p_2(M)$. Существует A–определимая формула $\phi(x, y)$ такая что $M \models \phi(a, b) \wedge \exists! y \phi(a, y)$. Тогда определим функцию $f(x) := y \Leftrightarrow \phi(x, y)$. Тогда $f : p_1(M) \to p_2(M)$ есть биективное отображение, причем f строго монотонная на $p_1(M)$ в силу Леммы 1. Рассмотрим следующие формулы:

$$\phi_1(a, y) := y < f(a) \wedge U_2(y), \quad \phi_2(a, y) := y \leq f(a) \wedge U_2(y)$$

Очевидно что $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ — (p_1, p_2)–секаторы, причем $\phi_2(a, M) \setminus \phi_1(a, M) = \{b\}$. Также в силу Следствия 2 [8] других (p_1, p_2)–секаторов нет. □

Лемма 7. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1, p_2, p_3 \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p_1 \not\perp^w p_2$, $p_2 \not\perp^w p_3$. Тогда для любых $a, a' \in p_1(M)$, $b, b' \in p_2(M)$, $c, c' \in p_3(M)$, таких что $tp(\langle a, b\rangle/A) = tp(\langle a', b'\rangle/A)$, $tp(\langle a, c\rangle/A) = tp(\langle a', c'\rangle/A)$, $tp(\langle b, c\rangle/A) = tp(\langle b', c'\rangle/A)$ следует что $tp(\langle a, b, c\rangle/A) = tp(\langle a', b', c'\rangle/A)$.*

Доказательство Леммы 7.
Допустим что заключение леммы неверно. Тогда существуют $a, a' \in p_1(M)$, $b, b' \in p_2(M)$, $c, c' \in p_3(M)$, удовлетворяющие условиям леммы, и A–определимая формула $R(x, y, z)$ так что $M \models R(a, b, c) \wedge \neg R(a', b', c')$. Поймем что элементы a, b и c попарно алгебраически независимы над A. Действительно, если например $b \in dcl(A \cup \{a\})$, тогда существует A–определимая формула $\theta(x, y)$ так что $M \models \theta(a, b) \wedge \exists! y \theta(a, y)$. Рассмотрим следующую формулу: $R'(x, z) := \forall y[\theta(x, y) \to R(x, y, z)]$. Тогда $M \models R'(a, c) \wedge \neg R'(a', c')$, противореча тому что $tp(\langle a, c\rangle/A) = tp(\langle a', c'\rangle/A)$.
Пусть $U_3(y), A(x, y)$ и $B(x, y)$ — A–определимые формулы, изолирующие p_3, $tp(\langle a, c\rangle/A)$ и $tp(\langle b, c\rangle/A)$ соответственно. Поймем что существует $c'' \in p_3(M)$ такой что $M \models A(a, c'') \wedge B(b, c'') \wedge \neg R(a, b, c'')$. Если это не так, то $M \models D(a, b)$, где $D(a, b) := \forall y[U_3(y) \wedge A(a, y) \wedge B(b, y) \to R(a, b, y)]$. Но тогда $M \models D(a', b')$, противореча нашему допущению. Таким образом, имеем: $M \models R(a, b, c) \wedge \neg R(a, b, c'')$. Преобразуя если необходимо, можно считать что $R(a, b, M)$ выпукло, $R(a, b, M) \subset p_3(M)$ и $R(a, b, M)^- = p_3(M)^-$.
Пусть $\phi_{13}(x, y)$ — (p_1, p_3)–секатор, ϕ_{23} — (p_2, p_3)–секатор. Тогда либо $\phi_{13}(a, M) \subseteq \phi_{23}(b, M)$, либо $\phi_{23}(b, M) \subset \phi_{13}(a, M)$. Если $\phi_{13}(a, M) = \phi_{23}(b, M)$, то в силу строгой монотонности функции $\mu_{23}(x) := \sup \phi_{23}(x, M)$ на $p_2(M)$ получаем что $b \in dcl(A \cup \{a\})$, противореча нашему предположению. Если $|\phi_{23}(b, M) \setminus \phi_{13}(a, M)| = 1$ или $|\phi_{13}(a, M) \setminus \phi_{23}(b, M)| = 1$, то также можно понять что $b \in dcl(A \cup \{a\})$. Предположим что $\phi_{13}(a, M) \subset \phi_{23}(b, M)$. Тогда $|\phi_{23}(b, M) \setminus \phi_{13}(a, M)| > 1$. Так как $tp(\langle a, c\rangle/A) = tp(\langle a, c''\rangle/A)$, то либо $c, c'' \in \phi_{13}(a, M)$, либо $c, c'' \in \neg\phi_{13}(a, M)$. Не умаляя общности, предположим первое. Пусть $p_1' := tp(a/A \cup \{b\})$, $p_3' := tp(c/A \cup \{b\})$. Очевидно что $p_1' \not\perp^w p_3'$ и $R(x, b, z)$, $\phi_{13}(x, z)$ — (p_1', p_3')–секаторы, причем $|\phi_{13}(a, M) \setminus R(a, b, M)| > 1$, противореча Лемме 6. Аналогично рассматривается случай $\phi_{23}(b, M) \subset \phi_{13}(a, M)$. □

Лемма 8. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1, p_2, p_3 \in S_1(A)$ — неалгебраические. Тогда для любых $a, a' \in p_1(M)$, $b, b' \in p_2(M)$, $c, c' \in p_3(M)$ таких что $tp(\langle a, b\rangle/A) = tp(\langle a', b'\rangle/A)$, $tp(\langle a, c\rangle/A) = tp(\langle a', c'\rangle/A)$, $tp(\langle b, c\rangle/A) = tp(\langle b', c'\rangle/A)$ следует что $tp(\langle a, b, c\rangle/A) = tp(\langle a', b', c'\rangle/A)$.*

Доказательство Леммы 8.
Если типы p_1, p_2, p_3 попарно слабо ортогональны, то заключение леммы следует из Леммы 5. Если же типы p_1, p_2, p_3 попарно не слабо ортогональны, то это следует из Леммы 7. Поэтому предположим что $p_1 \perp^w p_2$, но $p_2 \not\perp^w p_3$. Тогда $p_1 \perp^w p_3$, иначе в силу Леммы 3 получим что $p_1 \not\perp^w p_2$. Допустим что заключение леммы неверно, и следовательно существуют $a, a' \in p_1(M)$, $b, b' \in p_2(M)$, $c, c' \in p_3(M)$, удовлетворяющие условиям леммы, и A–определимая формула $R(x, y, z)$ такая что $M \models R(a, b, c) \wedge \neg R(a', b', c')$. Аналогично Лемме 7 можно понять что элементы a, b и c попарно алгебраически независимы над A. Пусть $U_3(y)$, $A(x, y)$ и $B(y, z)$ изолируют типы p_3, $tp(\langle a, c\rangle/A)$ и $tp(\langle b, c\rangle/A)$ соответственно. Поймем что существует $c'' \in p_3(M)$ такой что $M \models A(a, c'') \wedge B(b, c'')\neg R(a, b, c'')$. Если это неверно, то $M \models \theta(a, b)$, где

$$\theta(a, b) := \forall y[U_3(y) \wedge A(a, y) \wedge B(b, y) \to R(a, b, y)]$$

Так как $tp(\langle a, b\rangle/A) = tp(\langle a', b'\rangle/A)$, то $M \models \theta(a', b')$, противореча нашему допущению. Таким образом, имеем: $M \models R(a, b, c) \wedge \neg R(a, b, c'')$. Не умаляя общности, предположим что $c < c''$. Преобразуя если необходимо, можно считать что $R(a, b, M)$ выпукло, $R(a, b, M) \subset p_3(M)$ и $R(a, b, M)^- = p_3(M)^-$. Пусть $p_2' := tp(b/A \cup \{a\})$, $p_3' := tp(c/A \cup \{a\})$. Тогда $p_2(M) = p_2'(M)$, $p_3(M) = p_3'(M)$ и, следовательно, $R(a, y, z)$ является (p_2', p_3')–секатором. Так как $p_2 \not\perp^w p_3$, то существует (p_2, p_3)–секатор $\phi_{23}(x, y)$. Очевидно что он также является (p_2', p_3')–секатором. В силу того что $tp(\langle b, c\rangle/A) = tp(\langle b, c''\rangle/A)$ мы имеем что либо $c, c'' \in \phi_{23}(b, M)$, либо $c, c'' \in \neg\phi_{23}(b, M)$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда $R(a, b, M) \subset \phi_{23}(b, M)$, причем $|\phi_{23}(b, M) \setminus R(a, b, M)| > 1$, противореча Лемме 6. Аналогично рассматривается случай когда $p_1 \not\perp^w p_2$, $p_2 \perp^w p_3$.
□

Лемма 9. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда для любых $a, a' \in p_1(M)$, $b_1 < b_2, b_1' < b_2' \in p_2(M)$ таких что $tp(\langle a, b_1\rangle/A) = tp(\langle a', b_1'\rangle/A)$, $tp(\langle a, b_2\rangle/A) = tp(\langle a', b_2'\rangle/A)$ следует что $tp(\langle a, b_1, b_2\rangle/A) = tp(\langle a', b_1', b_2'\rangle/A)$.*

Доказательство Леммы 9.
Допустим противное: тогда существует A–определимая формула $R(x, y, z)$ такая что $M \models R(a, b_1, b_2) \wedge \neg R(a', b_1', b_2')$ для некоторых $a, a' \in p_1(M)$, $b_1 < b_2, b_1' < b_2' \in p_2(M)$ с условиями

$$tp(\langle a, b_1\rangle/A) = tp(\langle a', b_1'\rangle/A), \quad tp(\langle a, b_2\rangle/A) = tp(\langle a', b_2'\rangle/A)$$

Поймем вначале что если $b_1 \in dcl(A \cup \{a\})$, то $b_2 \notin dcl(A \cup \{a\})$. Действительно, если $b_1, b_2 \in dcl(A \cup \{a\})$, тогда в силу Леммы 2 $b_2 \in dcl(A \cup \{b_1\})$, откуда можно доказать что $dcl(A \cup \{b_1\})$ бесконечно, противореча $\aleph_0$–категоричности T. Предположим что $b_1 \in dcl(A \cup \{a\})$. Следовательно, существует A–определимая формула $\theta(x, y)$ такая, что $M \models \theta(a, b_1) \wedge \exists! y\theta(a, y)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$R'(x, z) := \forall y[\theta(x, y) \to R(x, y, z)]$$

Согласно нашему допущению получаем что $M \models R'(a, b_2) \wedge \neg R'(a', b_2')$, противореча тому что $tp(\langle a, b_2\rangle/A) = tp(\langle a', b_2'\rangle/A)$. Таким образом, можем считать что $b_1, b_2 \notin dcl(A \cup \{a\})$.

Пусть $A_2(x,y)$ — A–определимая формула, изолирующая тип $tp(\langle a,b_2\rangle/A)$. Поймем что существует $b_2''\in p_2(M)$ такой что

$$M\models b_1<b_2''\wedge A_2(a,b_2'')\wedge\neg R(a,b_1,b_2'')$$

Если это неверно, то $M\models\theta(a,b_1)$, где

$$\theta(a,b_1):=\forall y[b_1<y\wedge A_2(a,y)\to R(a,b_1,y)]$$

Так как $tp(\langle a,b_1\rangle/A)=tp(\langle a',b_1'\rangle/A)$, то $M\models\theta(a',b_1')$, противореча нашему допущению. Таким образом, имеем: $M\models R(a,b_1,b_2)\wedge\neg R(a,b_1,b_2'')$.

Случай 1. $tp(\langle a,b_1\rangle/A)=tp(\langle a,b_2\rangle/A)$.

Пусть $p_2'(y):=\{A_2(a,y)\}$. Тогда p_2' определяет тип над $A\cup\{a\}$, так как $A_2(a,M)$ 1-неразличимо над $A\cup\{a\}$. Не умаляя общности, предположим что $b_2<b_2''$. В силу слабой о-минимальности $R(a,b_1,M)$ есть объединение конечного числа $A\cup\{a,b_1\}$–определимых выпуклых множеств, и пусть $R_0(a,b_1,z)$ определяет выпуклое множество, содержащее $\{b_2\}$. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$H(a,b_1,z):=b_1\le z\wedge\exists t[R_0(a,b_1,t)\wedge z\le t]$$

Нетрудно понять что $H(a,y,z)$ — p_2'–стабильная формула, противореча одиночности типа p_2'.

Случай 2. $tp(\langle a,b_1\rangle/A)\neq tp(\langle a,b_2\rangle/A)$.

Так как $p_1\not\perp^w p_2$ и $b_1\notin dcl(A\cup\{a\})$, то существует (p_1,p_2)–секатор $\phi(x,y)$, такой что $\phi(a,M)$ 1-неразличимо над $A\cup\{a\}$ и $M\models\phi(a,b_1)\wedge\neg\phi(a,b_2)$. В силу того что $b_2\notin dcl(A\cup\{a\})$ и функция $\mu(x):=\sup\phi(x,M)$ строго монотонная на $p_1(M)$, существует $a_1\in p_1(M)$ такой что

$$M\models a<a_1\wedge\phi(a_1,b_1)\wedge\neg\phi(a_1,b_2)$$

Рассмотрим следующие функции: $f_a(y):=\sup R(a,y,M)$, $g_{b_1}(x):=\sup R(x,b_1,M)$.

Подслучай 2a. $f_a(y)$ и $g_{b_1}(x)$ — строго монотонно возрастающие на $\phi(a,M)$ и $\phi(M,b_1)$ соответственно.

Предположим что функция μ является строго монотонно убывающей на $p_1(M)$. Тогда $\phi(a_1,M)\subset\phi(a,M)$. Рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(y):=\phi(a_1,y)\wedge\forall z[R(a,b_1,z)\to R(a_1,y,z)]$$

$$\Phi_2(y):=\phi(a_1,y)\wedge\forall y_1\forall z[\neg\Phi_1(y_1)\wedge\phi(a_1,y_1)\wedge R(a,y_1,z)\to R(a_1,y,z)]$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$\Phi_n(y):=\phi(a_1,y)\wedge\forall y_1\forall z[\neg\Phi_{n-1}(y_1)\wedge\phi(a_1,y_1)\wedge R(a,y_1,z)\to R(a_1,y,z)]$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

Мы имеем $\Phi_1(M)\subset\Phi_2(M)\subset\ldots\subset\Phi_n(M)\subset\ldots$, противореча $\aleph_0$–категоричности теории T.

Предположим теперь что функция μ строго монотонно возрастающая на $p_1(M)$, т.е. $\phi(a,M)\subset\phi(a_1,M)$. Рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(y,a,a_1):=\phi(a,y)\wedge\forall z[R(a,b_1,z)\to R(a_1,y,z)]$$

$$\Phi_i(y,a,a_1):=\phi(a,y)\wedge\forall y_1\forall z[\neg\Phi_{i-1}(y_1,a,a_1)\wedge\phi(a,y_1)\wedge R(a,y_1,z)\to R(a_1,y,z)]\quad i\ge 2$$

Пусть для каждого $i\ge 1$

$$B_i(a,a_1,z):=\exists y_1[\neg\Phi_i(y_1,a,a_1)\wedge\phi(a,y_1)\wedge R(a,y_1,z)]$$

Предположим что мы уже доказали что

$$\Phi_1(M,a,a_1) \subset \Phi_2(M,a,a_1) \subset \ldots \subset \Phi_i(M,a,a_1)$$

Шаг i. Рассмотрим $\sup B_i(a,a_1,M)$. Если $\sup B_i(a,a_1,M) > \sup \phi(a_1,M)$, тогда получаем что $\Phi_i(M,a,a_1) \subset \Phi_{i+1}(M,a,a_1)$ и переходим к шагу $i+1$. Предположим что $\sup B_i(a,a_1,M) \leq \sup \phi(a_1,M)$. Так как $\sup \phi(a,M) < \sup B_i(a,a_1,M)$, то в силу строгого монотонного возрастания μ существует $a_1^i \in p_1(M)$ такой что $a < a_1^i < a_1$ и $\sup \phi(a_1^i,M) < \sup B_i(a,a_1,M)$. Нетрудно понять что $\Phi_j(M,a,a_1^i) \subset \Phi_j(M,a,a_1)$ для каждого $1 \leq j \leq i$, т.е. $\inf \Phi_j(M,a,a_1^i) > \inf \Phi_j(M,a,a_1)$, и следовательно $\sup B_j(a,a_1^i,M) > \sup B_j(a,a_1,M)$ для каждого $1 \leq j \leq i$. Таким образом, мы имеем

$$\Phi_1(M,a,a_1^i) \subset \Phi_2(M,a,a_1^i) \subset \ldots \subset \Phi_{i+1}(M,a,a_1^i)$$

Переобозначаем a_1^i через a_1 и переходим к шагу $i+1$.
Таким образом для каждого $n \in \omega$ мы можем построить цепочку длины n:

$$\Phi_1(M,a,a_1) \subset \Phi_2(M,a,a_1) \subset \ldots \subset \Phi_n(M,a,a_1)$$

что противоречит $\aleph_0$–категоричности T.
Подслучай 2b. $f_a(y)$ — строго монотонно возрастающая на $\phi(a,M)$, а $g_{b_1}(x)$ — строго монотонно убывающая на $\phi(M,b_1)$.
Рассматривается аналогично подслучаю 2a. □

Лемма 10. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1,p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда для любых $n_1,n_2 < \omega$ и любых возрастающих кортежей $\bar{a} = \langle a_1,a_2,\ldots,a_{n_1}\rangle$, $\bar{a}' = \langle a_1',a_2',\ldots,a_{n_1}'\rangle \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar{b} = \langle b_1,b_2,\ldots,b_{n_2}\rangle$, $\bar{b}' = \langle b_1',b_2',\ldots,b_{n_2}'\rangle \in [p_2(M)]^{n_2}$ таких что для любых $i,j : 1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$ выполняется $tp(\langle a_i,b_j\rangle/A) = tp(\langle a_i',b_j'\rangle/A)$ следует что $tp(\langle\bar{a},\bar{b}\rangle/A) = tp(\langle\bar{a}',\bar{b}'\rangle/A)$.*

Доказательство Леммы 10.
Будем доказывать индукцией по $(n_1,n_2) \geq_{lex} (1,1)$. Шаг $(1,1)$ является тривиальным. Предположим что лемма установлена для всех (k_1,k_2) с условием $(k_1,k_2) <_{lex} (n_1,n_2)$. Докажем лемму для случая (n_1,n_2). Допустим противное: тогда существуют A–определимая формула $R(\bar{x},\bar{y})$ и возрастающие кортежи $\bar{a},\bar{a}' \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar{b},\bar{b}' \in [p_2(M)]^{n_2}$, удовлетворяющие условиям леммы, так что $M \models R(\bar{a},\bar{b}) \wedge \neg R(\bar{a}',\bar{b}')$. Аналогично как в доказательстве Леммы 9 можно понять что существует $b_{n_2}'' \in p_2(M)$ такой что $b_{n_2-1} < b_{n_2}''$, $tp(\langle a_i,b_{n_2}\rangle/A) = tp(\langle a_i,b_{n_2}''\rangle/A)$, $1 \leq i \leq n_1$ и

$$M \models R(\bar{a},\bar{b}_{n_2-1},b_{n_2}) \wedge \neg R(\bar{a},\bar{b}_{n_2-1},b_{n_2}'')$$

Пусть $B := A \cup \{\bar{a}_{n_1-1},\bar{b}_{n_2-2}\}$. По индукционному предположению

$$tp(\langle b_{n_2-1},b_{n_2}\rangle/B) = tp(\langle b_{n_2-1},b_{n_2}''\rangle/B), \quad tp(\langle a_{n_1},b_{n_2}\rangle/B) = tp(\langle a_{n_1},b_{n_2}''\rangle/B)$$

Если $tp(b_{n_2-1}/B) = tp(b_{n_2}/B)$, то по Лемме 9 мы имеем

$$tp(\langle a_{n_1},b_{n_2-1},b_{n_2}\rangle/B) = tp(\langle a_{n_1},b_{n_2-1},b_{n_2}''\rangle/B)$$

что противоречит нашему допущению. Если $tp(b_{n_2-1}/B) \neq tp(b_{n_2}/B)$, то по Лемме 8 мы также имеем $tp(\langle a_{n_1},b_{n_2-1},b_{n_2}\rangle/B) = tp(\langle a_{n_1},b_{n_2-1},b_{n_2}''\rangle/B)$. □

Доказательство Теоремы 2.
В силу $\aleph_0$–категоричности существует лишь конечное число неалгебраических 1-типов над пустым множеством. Пусть $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ — полный список неалгебраических 1-типов из $S_1(\emptyset)$. Докажем индукцией по $s \geq 2$ что для любых $n_1, n_2, \ldots, n_s < \omega$, для любых возрастающих $\bar{a}_{n_1}, \bar{a}'_{n_1} \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar{a}_{n_2}, \bar{a}'_{n_2} \in [p_2(M)]^{n_2}$, …, $\bar{a}_{n_s}, \bar{a}'_{n_s} \in [p_s(M)]^{n_s}$, таких что для любых $i_1, i_2, j, k : 1 \leq i_1 < i_2 \leq s$, $1 \leq j \leq n_{i_1}$, $1 \leq k \leq n_{i_2}$ $tp(\langle a^j_{n_{i_1}}, a^k_{n_{i_2}}\rangle/\emptyset) = tp(\langle (a^j_{n_{i_1}})', (a^k_{n_{i_2}})'\rangle/\emptyset)$, следует что

$$tp(\langle \bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \ldots, \bar{a}_{n_s}\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_{n_1}, \bar{a}'_{n_2}, \ldots, \bar{a}'_{n_s}\rangle/\emptyset) \qquad (*)$$

Шаг $s = 2$. Если $p_1 \perp^w p_2$, то в силу Лемм 4 и 5 $\{p_1, p_2\}$ ортогонально над $\emptyset$, т.е. выполняется $(*)$. Если же $p_1 \not\perp^w p_2$, то $(*)$ следует из Леммы 10.
Предположим что $(*)$ установлено для всех $k \leq s-1$. Докажем для s. Рассмотрим случай $n_1 = 1, n_2 = 1, \ldots, n_s = 1$. Допустим противное: тогда существуют $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s\rangle, \langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_s\rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times \ldots \times p_s(M)$, такие что $tp(\langle a_i, a_j\rangle/A) = tp(\langle a'_i, a'_j\rangle/A)$ для всех $1 \leq i < j \leq s$, и $\emptyset$–определимая формула $R(\bar{x})$ такая что $M \models R(a_1, a_2, \ldots, a_s) \wedge \neg R(a'_1, a'_2, \ldots, a'_s)$. Тогда существует $a''_s \in p_s(M)$ такой что $tp(\langle a_i, a''_s\rangle/\emptyset) = tp(\langle a_i, a_s\rangle/\emptyset)$ для всех $1 \leq i \leq s-1$ и $M \models \neg R(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a''_s)$. Пусть $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_{s-3}\}$ и рассмотрим $p'_{s-2} := tp(a_{s-2}/A)$, $p'_{s-1} := tp(a_{s-1}/A)$, $p'_s := tp(a_s/A)$. По индукционному предположению

$$tp(\langle a_{s-2}, a_s\rangle/A) = tp(\langle a_{s-2}, a''_s\rangle/A), \quad tp(\langle a_{s-1}, a_s\rangle/A) = tp(\langle a_{s-1}, a''_s\rangle/A)$$

Тогда по Лемме 8 $tp(\langle a_{s-2}, a_{s-1}, a_s\rangle/A) = tp(\langle a_{s-2}, a_{s-1}, a''_s\rangle/A)$, противореча нашему допущению. Случай $n_1 = 1, n_2 = 1, \ldots, n_s = 1$ доказан.
Предположим что $(*)$ установлено для всех $(k_1, k_2, \ldots, k_s) <_{lex} (n_1, n_2, \ldots, n_s)$ и докажем это для $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$. Допустим противное: существуют возрастающие $\bar{a}_{n_1}, \bar{a}'_{n_1} \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar{a}_{n_2}, \bar{a}'_{n_2} \in [p_2(M)]^{n_2}$, …, $\bar{a}_{n_s}, \bar{a}'_{n_s} \in [p_s(M)]^{n_s}$ такие что для любых $i_1, i_2, j, k : 1 \leq i_1 < i_2 \leq s$, $1 \leq j \leq n_{i_1}$, $1 \leq k \leq n_{i_2}$ $tp(\langle a^j_{n_{i_1}}, a^k_{n_{i_2}}\rangle/\emptyset) = tp(\langle (a^j_{n_{i_1}})', (a^k_{n_{i_2}})'\rangle/\emptyset)$ и существует $\emptyset$–определимая формула $R(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_2}, \ldots, \bar{x}_{n_s})$ так что

$$M \models R(\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \ldots, \bar{a}_{n_s}) \wedge \neg R(\bar{a}'_{n_1}, \bar{a}'_{n_2}, \ldots, \bar{a}'_{n_s})$$

Тогда можно понять что существует $(a^{n_s}_{n_s})'' \in p_s(M)$ такой что $a^{n_s-1}_{n_s} < a^{n_s}_{n_s}$, $tp(\langle a^j_{n_i}, a^{n_s}_{n_s}\rangle/A) = tp(\langle a^j_{n_i}, (a^{n_s}_{n_s})''\rangle/A)$ для любых $1 \leq i \leq s-1$ и $1 \leq j \leq n_i$ и $M \models \neg R(\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \ldots, \bar{a}_{n_{s-1}}, \bar{a}_{n_s-1}, (a^{n_s}_{n_s})'')$. Пусть $B := \{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \ldots, \bar{a}_{n_{s-3}}, \bar{a}_{n_{s-2}-1}, \bar{a}_{n_{s-1}-1}, \bar{a}_{n_s-1}\}$, и рассмотрим $p'_{s-2} := tp(a_{n_{s-2}}/B)$, $p'_{s-1} := tp(a_{n_{s-1}}/B)$, $p'_s := tp(a_{n_s}/B)$. По индукционному предположению

$$tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_s}\rangle/B) = tp(\langle a_{n_{s-2}}, a''_{n_s}\rangle/B)$$

$$tp(\langle a_{n_{s-1}}, a_{n_s}\rangle/B) = tp(\langle a_{n_{s-1}}, a''_{n_s}\rangle/B)$$

Тогда по Лемме 8 $tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a_{n_s}\rangle/B) = tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a''_{n_s}\rangle/B)$, противореча нашему допущению. □

Автор выражает глубокую признательность Байжанову Б.С. за полезное обсуждение, побудившее к написанию данной работы

Список литературы

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, Transactions of The American Mathematical Society, **352** (2000), 5435–5483.
[2] M. Dickmann, *Elimination of quantifiers for ordered valuation rings*, The Journal of Symbolic Logic, **52** (1987), 116–128.
[3] B.Sh. Kulpeshov, *Weakly o-minimal structures and some of their properties*, The Journal of Symbolic Logic, **63** (1998),1511–1528.
[4] A. Pillay, C. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures I*, Transactions of the American Mathematical Society, **295** (1986), 565–592.
[5] Р.Д. Арефьев, *О свойстве монотонности слабо o-минимальных моделей*, Algebra and Model Theory, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk, 1997, 8–15.
[6] B.S. Baizhanov, *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates*, The Journal of Symbolic Logic, **66** (2001), 1382–1414.
[7] B.Sh. Kulpeshov, *Some properties of $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories*, Algebra and Model Theory, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk, 1997, 78–98.
[8] Б.Ш. Кулпешов, *О бинарности $\aleph_0$–категоричных слабо o-минимальных теорий*, Алгебра и Логика, **44** (2005), 459–473.

Бейбут Шайыкович Кулпешов
ДГП "Институт проблем информатики и управления"РГП "ЦФМИ"МОН РК,
ул. Пушкина 125,
050010, Алматы, Казахстан
E-mail address: kbsh@ipic.kz