S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 169–184 (2006) УДК 517.954
MSC 58J99

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Данг Хань Хой

Abstract. We study the time-periodic solutions of a linear operator-differential equation and describe the structure of the set of periods, for which our problem admits a unique solution. Applications are given for some systems of integro-differential equations over a sphere.

1. Введение

Пусть H – сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$ – линейный оператор в H. Оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ будем называть M-оператором (модельным оператором, см. [1, с. 40]), если у него существует система собственных векторов $\{f_k\}$, $k = (k_1, k_2, ..., k_s) \in \mathbb{Z}^s$, образующих базис Рисса в H. Соответствующие собственные значения обозначим λ_k, $\lambda_k \in \mathbb{C}$. При этом мы считаем, что $\{f_k\}$ есть ортонормированный базис в H, $|\lambda_k| \to \infty$ при $|k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + ... + k_s^2} \to \infty$ и для каждого значения $|k|$ имеется не более двух разных значений λ_k.

Мы рассмотрим задачу о периодических решениях для уравнения

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \widetilde{\mathcal{A}} - \lambda\right) u(t) = \nu G(u - f), \tag{1}$$

с условием периодичности по t :

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}. \tag{2}$$

Здесь λ, ν - заданные комплексные числа.

Dang Khanh Hoi, Periodic solutions of some linear systems of differential equations.

Поступила 24 января 2006 г., опубликована 11 мая 2006 г.

Заменой $t = b\tau$ наша задача сводится к задаче с фиксированным периодом, но для нового уравнения, в котором коэффициент при производной по τ есть $\dfrac{1}{b}$:

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{b\partial\tau} + \widetilde{\mathcal{A}} - \lambda\right) u(b\tau) = \nu G(u(b\tau) - f(b\tau)).$$

2. Общая схема исследования периодических решений

Пусть $\tilde{H} = L_2([0,1], H)$ и $\mathcal{D}(L)$ – подпространство пространства $\tilde{H}$, состоящее из таких элементов, у которых при разложении в ряд

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^s} u_k(t) f_k, \tag{3}$$

коэффициенты $u_k(t)$ абсолютно непрерывны, удовлетворяют условию периодичности

$$u_k(0) = u_k(1)$$

и выполнены условия

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^s} \int_0^1 |\frac{1}{ib}u_k'(t) + \lambda_k u_k(t)|^2 dt < \infty.$$

Рассматривается задача о периодических решениях для уравнения

$$(L-\lambda)u \equiv \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{b\partial t} + \widetilde{\mathcal{A}} - \lambda\right) u(t) = \nu G(u - f), \tag{4}$$

с фиксированным условием периодичности по t :

$$u|_{t=0} = u|_{t=1}. \tag{5}$$

Здесь G - непрерывный линейный оператор на пространстве $\widetilde{H}$.

Лемма 1. *Векторы $e_{km} = e^{i2\pi mt} f_k$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^s$ есть собственные векторы оператора $L = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{b\partial t} + \widetilde{\mathcal{A}}$ с соответствующими собственными значениями*

$$\lambda_{km} = \left(\frac{2m\pi}{b} + \lambda_k\right) \tag{6}$$

на пространстве $\widetilde{H}$. Эти векторы образуют ортонормированный базис в указанном пространстве. Область определения оператора L есть $\mathcal{D}(L)$, причем это пространство может быть описано как

$$\mathcal{D}(L) = \{\, u = \sum u_{km} e_{km} \in \widetilde{H} \mid \sum |\lambda_{km} u_{km}|^2 < \infty \,\}.$$

Спектр $\sigma(L)$ оператора L есть замыкание множества $\{\lambda_{km}\}$.

Мы не приводим доказательство Леммы 1 ввиду его очевидности.

Пусть $\widetilde{\mathcal{B}}$ – M-оператор в H, у которого $\{f_k\}$ есть система собственных векторов и $\{\mu_k\}$ есть система соответствующих собственных значений:

$$\widetilde{\mathcal{B}} f_k = \mu_k f_k.$$

Здесь мы считаем, что $|\mu_k| \to \infty$ при $|k| \to \infty$ и $|\mu_k| \geq 1$ при $\mu_k \neq 0$. Последнее условие не нарушает общности, так как оно всегда будет выполнено после умножения оператора $\widetilde{\mathcal{B}}$ на подходящую константу.

Пусть $\widetilde{\mathcal{B}}^*$ - оператор, сопряженный к $\widetilde{\mathcal{B}}$ в гильбертовом пространстве H. Предположим, что оператор $\widetilde{\mathcal{B}}^* \circ G$ ограничен и $M = \max\{||\widetilde{\mathcal{B}}^* \circ G||, ||G||\}$.

Лемма 2. *Пусть* $v = Gu = \sum v_{km} e_{km}$, *тогда*

$$|v_{km}|^2 \le \frac{4M^2}{(|\mu_k|+1)^2} ||u||^2.$$

При этом, если $\mu_k \ne 0$, *то*

$$|v_{km}|^2 \le \frac{4|\alpha_{km}|^2}{(|\mu_k|+1)^2}, \tag{7}$$

где $\alpha_{km} = \langle \widetilde{\mathcal{B}}^* \circ Gu, e_{km} \rangle = \int_0^1 (\widetilde{\mathcal{B}}^* \circ Gu, e_{km}) dt$.

Доказательство. Имеем

$$\alpha_{km} = \langle \widetilde{\mathcal{B}}^* \circ Gu, e_{km} \rangle = \int_0^1 (\widetilde{\mathcal{B}}^* \circ Gu, e_{km}) dt = \int_0^1 (Gu, \widetilde{\mathcal{B}} e_{km}) dt =$$

$$\int_0^1 (Gu, \mu_k e_{km}) dt = \overline{\mu_k} \int_0^1 (Gu, e_{km}) dt = \overline{\mu_k} \langle Gu, e_{km} \rangle = \overline{\mu_k} v_{km}.$$

Отсюда следует, что при $\mu_k \ne 0$ (значит $|\mu_k| \ge 1$):

$$|v_{km}|^2 \le \frac{4|\alpha_{km}|^2}{(|\mu_k|+1)^2}.$$

Из равенства Парсеваля $\sum |\alpha_{km}|^2 = ||\widetilde{\mathcal{B}}^* \circ Gu||^2 \le M^2 ||u||^2$ следует, что

$$|v_{km}|^2 \le \frac{4M^2||u||^2}{(|\mu_k|+1)^2}.$$

Снова по равенству Парсеваля

$$\sum |v_{km}|^2 = ||Gu||^2$$

имеем, что при $\mu_k = 0$

$$|v_{km}|^2 \le ||G||^2 ||u||^2 \le 4||G||^2 ||u||^2 \le \frac{4M^2}{(|\mu_k|+1)^2} ||u||^2.$$

Лемма доказана.

Теперь мы также предположим, что $\lambda \ne \lambda_{km}\ \forall\ k \in \mathbb{Z}^s,\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$ и $\sigma(L) \ne \{\lambda_{km}\}$. Тогда определен обратный оператор $(L-\lambda)^{-1}$, но этот оператор не ограничен, если $\lambda \in \sigma(L) = Cl\{\lambda_{km}\}$. Возможны следующие случаи:

a) $\lambda \notin \sigma(L)$. Тогда норма обратного оператора $(L-\lambda)^{-1}$ оценивается сверху через величину $\delta = \min_{k,\,m} |\lambda_{km} - \lambda|$.

b) $\lambda \in \sigma(L)$. Тогда в выражении для обратного оператора $(L-\lambda)^{-1}$ появляются малые знаменатели:

$$(L-\lambda)^{-1} v = \sum \frac{v_{km}}{\lambda_{km} - \lambda} e_{km}, \tag{8}$$

где v_{km} есть коэффициенты Фурье ряда

$$v = \sum v_{km} e_{km}.$$

Для положительных чисел σ и C через $A_\sigma(C)$ обозначим множество таких положительных чисел b, для которых при всех m и k выполнено неравенство

$$|\lambda_{km} - \lambda| \geq \frac{C}{(|k|+1)^{1+\sigma}}. \tag{9}$$

Как видно из определения, множества $A_\sigma(C)$ увеличиваются при уменьшении C и при увеличении σ. Поэтому в дальнейшем для получения утверждений о непустоте такого множества или его части возникает требование, чтобы C было достаточно малым, а σ - достаточно большим. Через A_σ обозначим объединение по $C > 0$ множеств $A_\sigma(C)$.

Если неравенство (9) выполнено для некоторого b при всех m, k, то оно выполнено при $m = 0$, откуда получаем необходимое условие непустоты множества $A_\sigma(C)$:

$$C \leq (|k|+1)^{1+\sigma}|\lambda_k - \lambda| \quad \forall \ k \in \mathbb{Z}^s. \tag{10}$$

Так как $|\lambda_k| \to \infty$, при $|k| \to \infty$, то существует k_0 такое, что

$$(|k|+1)^{1+\sigma}|\lambda_k - \lambda| \geq (|k_0|+1)^{1+\sigma}|\lambda_{k_0} - \lambda|$$

для любого $k \in \mathbb{Z}^s$.

Обозначим $d = (|k_0|+1)^{1+\sigma}|\lambda_{k_0} - \lambda| = min_{k\in\mathbb{Z}^s}(|k|+1)^{1+\sigma}|\lambda_k - \lambda| > 0$. Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G - ограниченный оператор на $\widetilde{H}$ такой, что $\widetilde{\mathcal{B}}^* \circ G$ непрерывен на $\widetilde{H}$, $\quad b \in A_\sigma(C)$, $\sigma > 0$. Пусть*

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{(|k|+1)^{2+2\sigma}}{(|\mu_k|+1)^2} = 0.$$

Тогда определен обратный оператор $(L-\lambda)^{-1}$ и произведение $(L-\lambda)^{-1} \circ G$ является компактным оператором.

Доказательство. Так как $b \in A_\sigma(C)$, то $\lambda_{km} \neq \lambda \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^s$, $m \in \mathbb{Z}$ и определен обратный оператор $(L-\lambda)^{-1}$, его выражение имеет вид (8). Заметим, что $\lim \dfrac{(|k|+1)^{2+2\sigma}}{(|\mu_k|+1)^2} = 0$ при $|k| \to \infty$, $\lim|\mu_k| = \infty$ при $|k| \to \infty$ и $|\mu_k| \geq 1$ при $\mu_k \neq 0$. Поэтому для заданного положительного числа $\varepsilon > 0$, существует k_0 такое, что для всех $|k| > |k_0|$

$$\frac{(|k|+1)^{2+2\sigma}}{(|\mu_k|+1)^2} < \frac{(\varepsilon C)^2}{(2M)^2} \quad \text{и} \quad \mu_k \neq 0.$$

Обозначим

$$(L-\lambda)^{-1}v(x,t) = Q_{k_01}v + Q_{k_02}v, \quad v = Gu.$$

Здесь

$$Q_{k_01}v = \sum_{|k|\leq|k_0|} \frac{v_{km}}{\lambda_{km} - \lambda} e_{km}, \quad Q_{k_02}v = \sum_{|k|>|k_0|} \frac{v_{km}}{\lambda_{km} - \lambda} e_{km}.$$

Заметим, что при $|k| \leq |k_0|$

$$\lim_{|m|\to\infty} \frac{1}{|\dfrac{2m\pi}{b} + \lambda_k - \lambda|^2} = 0.$$

Поэтому существует положительное целое m_0 такое, что для любого m, $|m| > m_0$ для всех k, $|k| \le |k_0|$

$$\frac{1}{|\lambda_{km} - \lambda|^2} < \left(\frac{\varepsilon}{MC(k_0)}\right)^2, \quad C^2(k_0) = max_{|k|\le|k_0|}\frac{4}{(|\mu_k|+1)^2}.$$

Рассмотрим оператор $Q_{k_0 1}v = Q_{k_0 1'}v + Q_{k_0 1''}v$. Здесь

$$Q_{k_0 1'}v = \sum_{|k|\le|k_0|,|m|\le m_0} \frac{v_{km}}{\lambda_{km} - \lambda} e_{km}$$

$$Q_{k_0 1''}v = \sum_{|k|\le|k_0|,|m|> m_0} \frac{v_{km}}{\lambda_{km} - \lambda} e_{km}.$$

Имеем

$$||Q_{k_0 1''}v||^2 = ||Q_{k_0 1''} \circ Gu||^2 = \sum_{|k|\le|k_0|,|m|> m_0} \frac{|v_{km}|^2}{|\lambda_{km} - \lambda|^2} \le$$

$$\sum_{|k|\le|k_0|,|m|> m_0} \frac{4|\alpha_{km}|^2}{(|\mu_k|+1)^2}\frac{1}{|\lambda_{km} - \lambda|^2} \le C^2(k_0)\sum |\alpha_{km}|^2 \frac{1}{|\lambda_{km} - \lambda|^2}$$

$$\le C^2(k_0) M^2 ||u||^2 \left(\frac{\varepsilon}{MC(k_0)}\right)^2 = \varepsilon^2 ||u||^2$$

Итак $||Q_{k_0 1'' \circ G}|| \le \varepsilon$.

Рассмотрим оператор $Q_{k_0 2} \circ G$. В силу леммы 2 и (9) мы имеем

$$||Q_{k_0 2}v||^2 = ||Q_{k_0 2} \circ Gu||^2 = \sum_{|k|>|k_0|} \frac{|v_{km}|^2}{|\lambda_{km} - \lambda|^2} \le$$

$$\sum_{|k|>|k_0|} \frac{4\alpha_{km}^2}{(|\mu_k|+1)^2}\frac{(|k|+1)^{2+2\sigma}}{C^2} \le (\frac{1}{C})^2 (\frac{\varepsilon C}{2M})^2 \sum_{|k|>|k_0|} 4|\alpha_{km}|^2 \le \varepsilon^2 ||u||^2.$$

Это значит, что $||Q_{k_0 2} \circ G|| \le \varepsilon$.

В силу того, что оператор $Q_{k_0 1'} \circ G$ имеет конечномерный образ, он компактен. Далее

$$||(L-\lambda)^{-1} \circ G - Q_{k_0 1'} \circ G|| = ||(Q_{k_0 1''} + Q_{k_0 2}) \circ G|| \le ||Q_{k_0 1''} \circ G|| + ||Q_{k_0 2} \circ G|| < 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, оператор $(L-\lambda)^{-1} \circ G$ есть предел последовательности компактных операторов и поэтому этот оператор компактен. Теорема доказана.

Обозначим $K = K_b = (L-\lambda)^{-1} \circ G$. Верна

Теорема 2. *Пусть $b \in A_\sigma(C)$. Тогда задача (1),(2) имеет единственное периодическое решение с периодом b для всех $\nu \in \mathbb{C}$, за исключением не более чем счетного дискретного множества значений.*

Доказательство. Уравнение (1) сводится к уравнению вида

$$((L-\lambda)^{-1} \circ G - \frac{1}{\nu})u = (L-\lambda)^{-1} \circ G(f).$$

Обозначим $(L-\lambda)^{-1} \circ G - \frac{1}{\nu} = K - \frac{1}{\nu}$.

Так как $K = (L-\lambda)^{-1} \circ G$ – компактный оператор, его спектр $\sigma(K)$ не более чем счетен, а единственной возможной предельной точкой этого множества является нуль. Поэтому множество $S = \{\nu \neq 0 \mid \frac{1}{\nu} \in \sigma(K)\}$ не более чем счетно и дискретно и для всех $\nu \neq 0,\ \nu \notin S$ оператор $(K - \frac{1}{\nu})$ обратим , то есть уравнение (1) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Мы будем считать, что $\sigma > 1$ при $k = (k_1, ..., k_s)$, $s > 1$ и $\sigma > 0$ при $s = 1$.

Теорема 3. *Множества $A_\sigma(C)$, A_σ - борелевские. При этом, A_σ является множеством полной меры, т.е. его дополнение на полупрямой $\mathbb{R}^+$ имеет нулевую меру.*

Доказательство. Очевидно, что множества $A_\sigma(C)$ замкнуты в $\mathbb{R}^+$. Далее, множество $A_\sigma = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_\sigma(1/r)$ - борелевское, как счетное объединение замкнутых множеств.

Покажем, что A_σ имеет полную меру на $\mathbb{R}^+$. Предположим, что $b,\ l > 0,\quad C \leq \frac{d}{2}$ и рассмотрим дополнение $(0, l)\backslash A_\sigma(C)$. Это множество состоит из положительных чисел b, для которых существуют такие m, k, что

$$|\lambda_{km} - \lambda| < \frac{C}{(|k|+1)^{1+\sigma}}. \tag{11}$$

Решая это неравенство относительно b, получаем, что при фиксированных m, k эти числа образуют интервал вида $I_{km} = (m\alpha_k, m\beta_k)$, где $m = 1, 2, 3, ...$,

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{|\lambda_k - \lambda| + \dfrac{C}{(|k|+1)^{1+\sigma}}},$$

$$\beta_k = \frac{2\pi}{|\lambda_k - \lambda| - \dfrac{C}{(|k|+1)^{1+\sigma}}}.$$

Заметим, что для каждого значения $|k|$ имеется не более двух разных интервалов I_{km} и поэтому каждое значение $|k|$ учитывается не более двух раз. Длина найденного интервала есть $m\delta_k$, где

$$\delta_k = \frac{4\pi C(|k|+1)^{-1-\sigma}}{|\lambda_k - \lambda|^2 - C^2(|k|+1)^{-2-2\sigma}}.$$

В силу предположения $C \leq \frac{d}{2}$ имеем

$$\delta_k \leq \frac{16\pi C}{3(|k|+1)^{1+\sigma}|\lambda_k - \lambda|^2}. \tag{12}$$

При фиксированном k и разных m существует конечное число указанных выше интервалов I_{km}, пересекающихся с заданным отрезком $(0, l)$.

Такие интервалы получаем при тех значениях $m = 1, 2...$, для которых выполнены неравенства $m\alpha_k < l$, т.е. выполнено двойное неравенство

$$0 < m < \frac{l}{2\pi}(|\lambda_k - \lambda| + C(|k|+1)^{-1-\sigma}).$$

Учитывая, что $C(|k|+1)^{-1-\sigma} \le \frac{1}{2}|\lambda_k-\lambda|$, получаем более простые ограничения для указанных значений m :

$$0 < m < \frac{l}{2\pi}\frac{3}{2}|\lambda_k - \lambda|,$$

$$0 < m < \frac{l}{\pi}|\lambda_k - \lambda|. \tag{13}$$

Мера объединения указанных интервалов (при фиксированном k) оценивается сверху числом $\delta_k \tilde{S}_k$, где $\tilde{S}_k = \tilde{S}_k(l)$ есть сумма натуральных чисел m, для которых выполнены неравенства (11). По формуле суммы арифметической прогрессии, имеем

$$\tilde{S}_k \le \frac{l}{2\pi^2}|\lambda_k - \lambda|\{l|\lambda_k - \lambda| + \pi\}. \tag{14}$$

Рассмотрев объединение указанных интервалов по k и по m, получаем с учетом (10), что

$$\mu((0,l)\backslash A_\sigma(C)) \le \sum_{|k|} \delta_k \widetilde{S}_k \le CS(l),$$

где

$$S = S(l) = \sum_{|k|} \frac{8l\{l|\lambda_k - \lambda| + \pi\}}{3\pi(|k|+1)^{1+\sigma}|\lambda_k - \lambda|}.$$

Величина

$$\frac{l|\lambda_k - \lambda| + \pi}{\pi|\lambda_k - \lambda|}$$

ограничена сверху некоторой постоянной D. Тогда, с учетом того, что при фиксированном $|k|$ ряд в выражении для $S(l)$ содержит не более двух слагаемых, выводим оценку

$$S(l) \le \frac{16}{3} lD \sum_{|k|} \frac{1}{(|k|+1)^{1+\sigma}} < \infty.$$

Здесь существенно, что возникающий ряд сходится, поскольку общий член ряда убывает, как $(|k|+1)^{1+\sigma}$. В случае $s = 1$, $\sigma > 0$ это очевидно. В случае же $s > 1$ заметим, что множество разных значений величины $|k|^2$ есть подмножество множества натуральных чисел $N = \{0, 1, 2, ...\}$. Отсюда вытекает, что при $s > 1,\ \sigma > 1$

$$\sum_{|k|} \frac{1}{(|k|+1)^{1+\sigma}} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j^{1/2+\sigma/2}} < \infty.$$

Итак, $S(l) < \infty$. Имеем

$$\mu((0,l) \setminus A_\sigma) \le \mu((0,l) \setminus A_\sigma(C)) \le CS(l) \quad \forall\ C > 0.$$

Отсюда следует, что $\mu((0,l) \setminus A_\sigma) = 0 \quad \forall\ l > 0$. Поэтому $\mu((0,\infty) \setminus A_\sigma) = 0$ и A_σ- множество полной меры. Теорема доказана.

Исследуем вопрос о разрешимости задачи (1), (2) при фиксированном значении параметра ν. Для этого нам будет нужно изучить структуру плоского множества $E \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, состоящее из пар (ν, b) таких, что $\nu \ne 0$ и $\frac{1}{\nu} \notin \sigma(K_b)$, где $K_b = (L-\lambda)^{-1} \circ G$. Справедлива

Теорема 4. *Множество E - измеримое множество полной меры на $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$.*

Для доказательства нам потребуются ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Для любого положительного ε существует натуральное число k_0 такое, что $||K_b - \widetilde{K_b}|| < \varepsilon$ при любых $b \in A_\sigma(\frac{1}{r})$, где $r = 1, 2, ...,$*

$$K_b u = (L_b - \lambda)^{-1} \circ Gu = \sum \frac{v_{km}}{\lambda_{km}(b) - \lambda} e_{km}, \ \widetilde{K_b} u = \sum_{|k| \le |k_0|} \frac{v_{km}}{\lambda_{km}(b) - \lambda} e_{km}.$$

Доказательство: Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}^s$ такое, что $\frac{(|k|+1)^{2+2\sigma}}{(|\mu_k|+1)^2} \le (\frac{\varepsilon}{2rM})^2$ при $|k| > |k_0|$. Имеем, с учетом Леммы 2

$$(K_b - \widetilde{K_b})u = K_{k_0 b} u = \sum_{|k| > |k_0|} \frac{v_{km}}{\lambda_{km}(b) - \lambda} e_{km}$$

$$||(K_b - \widetilde{K_b})u||^2 = ||K_{k_0 b} u||^2 = \sum_{|k| > |k_0|} |\frac{v_{km}}{\lambda_{km}(b) - \lambda}|^2 \le$$

$$\sum_{|k| > |k_0|} \frac{4r^2 \alpha_{km}^2 (|k|+1)^{2+2\sigma}}{(|\mu_k|+1)^2} \le$$

$$r^2 (\frac{\varepsilon}{2rM})^2 4 \sum_{|k| > |k_0|} |\alpha_{km}|^2 \le r^2 (\frac{\varepsilon}{2rM})^2 4M^2 ||u||^2 = \varepsilon^2 ||u||^2.$$

Итак, $||K_b - \widetilde{K_b}|| = ||K_{k_0 b}|| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Операторная функция K_b непрерывна по $b \in A_\sigma(\frac{1}{r})$.*

Доказательство: Пусть заданы $b, b + \Delta b \in A_\sigma(\frac{1}{r})$ и $\varepsilon > 0$. По лемме 3 существует k_0 такое, что $||K_b - \widetilde{K_b}|| = ||K_{k_0 b}|| < \varepsilon$ и $||K_{b+\Delta b} - \widetilde{K_{b+\Delta b}}|| = ||K_{k_0(b+\Delta b)}|| < \varepsilon$. Имеем

$$K_{b+\Delta b} - K_b = (\widetilde{K_{b+\Delta b}} + K_{k_0(b+\Delta b)}) - (\widetilde{K_b} + K_{k_0 b}),$$

откуда следует, что

$$||K_{b+\Delta b} - K_b|| \le ||\widetilde{K_{b+\Delta b}} - \widetilde{K_b}|| + ||K_{k_0(b+\Delta b)}|| + ||K_{k_0 b}||.$$

Рассмотрим операторы $\widetilde{K_{b+\Delta b}}, \widetilde{K_b}$. Поскольку

$$(\widetilde{K_{b+\Delta b}} - \widetilde{K_b})u = \sum_{|k| \le |k_0|} (\frac{1}{\lambda_{km}(b+\Delta b) - \lambda} - \frac{1}{\lambda_{km}(b) - \lambda}) v_{km} e_{km},$$

справедливо равенство

$$(15) \quad ||\widetilde{K_b} u - \widetilde{K_{b+\Delta b}} u||^2 = \frac{|\Delta b|^2}{|b(b+\Delta b)|^2} \sum_{|k| \le |k_0|} \frac{|v_{km}|^2}{|\lambda_{km}(b+\Delta b) - \lambda|^2} \frac{4m^2\pi^2}{|\lambda_{km}(b) - \lambda|^2}.$$

При $b + \Delta b \in A_\sigma(\frac{1}{r})$ имеем

$$\frac{|v_{km}|^2}{|\lambda_{km}(b+\Delta b) - \lambda|^2} \le r^2 (|k|+1)^{2+2\sigma} |v_{km}|^2 \le r^2 (|k_0|+1)^4 |v_{km}|^2.$$

В силу предельного соотношения $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{4m^2\pi^2}{|\lambda_{km}(b)-\lambda|^2} = b^2$ и условия $|k| \le |k_0|$ величина

$$\frac{4m^2\pi^2}{|\lambda_{km}(b)-\lambda|^2} = \frac{4m^2\pi^2}{|\dfrac{2m\pi}{b} + \mu_k - \lambda|^2}$$

ограничена постоянной $C(k_0)$, зависящей от k_0. Поэтому

$$\frac{|\Delta b|^2}{|b(b+\Delta b)|^2} \sum_{|k|\le|k_0|} \frac{|v_{km}|^2}{|\lambda_{km}(b+\Delta b)-\lambda|^2} \frac{4m^2\pi^2}{|\lambda_{km}(b)-\lambda|^2} \le$$

$$\frac{|\Delta b|^2}{|b(b+\Delta b)|^2} \sum_{|k|\le|k_0|} r^2(|k_0|+1)^4 C(k_0)|v_{km}|^2 \le$$

$$\frac{|\Delta b|^2}{|b(b+\Delta b)|^2} r^2 C(k_0)(|k_0|+1)^4 \sum |v_{km}|^2 \le$$

$$\frac{|\Delta b|^2}{|b(b+\Delta b)|^2} r^2 C(k_0)(|k_0|+1)^4 M^2 ||u||^2.$$

Отсюда следует, что

$$||\widetilde{K_{b+\Delta b}} - \widetilde{K_b}||^2 \le \frac{|\Delta b|^2}{|b(b+\Delta b)|^2} M^2 r^2 (|k_0|+1)^4 C(k_0).$$

Возьмем Δb так, что выполнено следующее условие

$$\frac{|\Delta b|^2}{|b(b+\Delta b)|^2} M^2 r^2 (|k_0|+1)^4 C(k_0) < \varepsilon.$$

Тогда $||K_{b+\Delta b} - K_b|| < 3\varepsilon$. Это значит, что операторная функция K_b непрерывна по b на $A_\sigma(\dfrac{1}{r})$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Спектр $\sigma(K)$ компактного оператора K непрерывно зависит от K в пространстве $Comp(\mathcal{H})$ компактных операторов на $\mathcal{H}$ в том смысле, что для любого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для всех компактных (и даже ограниченных) операторов B таких, что $\|B-K\| < \delta$ верны включения*

$$\sigma(B) \subset \sigma(K) + V_\varepsilon(0), \quad \sigma(K) \subset \sigma(B) + V_\varepsilon(0). \tag{16}$$

Здесь $V_\varepsilon(0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < \varepsilon\}$ - ε-окрестность нуля в $\mathbb{C}$.

Доказательство: Пусть K - компактный оператор, $\varepsilon > 0$. Из структуры спектра $\sigma(K)$ компактного оператора K следует, что можно выбрать $\varepsilon_1 < \varepsilon/2$ так, что $\varepsilon_1 \ne |\lambda|$ для всех $\lambda \in \sigma(K)$ и окрестности $V_{\varepsilon_1}(0)$, $V_{\varepsilon_1}(\lambda)$, где λ - пробегает конечное множество $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ точек спектра с $|\lambda| > \varepsilon_1$, попарно не пересекаются. Пусть $V = \bigcup\limits_{\lambda\in S\cup\{0\}} V_{\varepsilon_1}(\lambda)$. Тогда V является окрестностью спектра $\sigma(K)$ и $V \subset \sigma(K) + V_\varepsilon(0)$. По известному свойству спектров (см., например, [6], Теорема 10.20) найдется такое $\delta > 0$, что $\sigma(B) \subset V$ для всех ограниченных операторов B, $\|B-K\| < \delta$. При этом, (см., например, Упражнение 20 на стр. 293 в [6]) величину $\delta > 0$ можно выбрать так, что $\sigma(B) \cap V_{\varepsilon_1}(\lambda) \ne \emptyset \;\forall\; \lambda \in S\cup\{0\}$. Тогда для всех ограниченных операторов B таких, что $\|B-K\| < \delta$, верны требуемые включения $\sigma(K) \subset \sigma(B) + V_{2\varepsilon_1}(0) \subset \sigma(B) + V_\varepsilon(0)$ и $\sigma(B) \subset V \subset \sigma(K) + V_\varepsilon(0)$. Лемма доказана.

Из леммы 5 легко вытекает следующее

Предложение 1. *Функция $\rho(\lambda, K) = dist(\lambda, \sigma(K))$ непрерывна на $\mathbb{C}\times Comp(\mathcal{H})$.*

Доказательство: Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $K \in Comp(\mathcal{H})$ и $\varepsilon > 0$. По Лемме 5 существует положительное число δ такое, что для любого оператора H, лежащего в δ- окрестности $||H - K|| < \delta$, выполнены включения (16), из которых непосредственно вытекает оценка $|\rho(\lambda, K) - \rho(\lambda, H)| < \varepsilon$. Тогда для всех $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu - \lambda| < \varepsilon$ и H, $||H - K|| < \delta$

$$|\rho(\mu, K) - \rho(\lambda, H)| \leq |\rho(\mu, K) - \rho(\lambda, K)| + |\rho(\lambda, K) - \rho(\lambda, H)| < |\mu - \lambda| + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, следует непрерывность функции $\rho(\lambda, K)$. Предложение доказано.

Из доказанного предложения и Леммы 5 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Функция $\rho(\lambda, b) = dist(\lambda, \sigma(K_b))$ непрерывна по $(\lambda, b) \in \mathbb{C} \times A_\sigma(\frac{1}{r})$.*

Мы готовы приступить к доказательству Теоремы 4.

Доказательство Теоремы 4: По следствию 1 функция $\rho(1/\nu, b)$ непрерывна по переменным $(\nu, b) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times A_\sigma(\frac{1}{r})$ и поэтому множество

$$B_r = \{(\nu, b) \quad | \quad \rho(1/\nu, b) \neq 0, \quad b \in A_\sigma(\frac{1}{r})\}$$

измеримо. Значит $B = \cup_r B_r$ измеримо. Ясно, что множество $B \subset E$ и $E = B \cup B_0$, где $B_0 = E \setminus B$. Очевидно, B_0 лежит в множестве нулевой меры $\mathbb{C}\times(\mathbb{R}^+ \setminus A_\sigma)$ (напомним, что по Теореме 3 множество A_σ имеет полную меру Лебега на $\mathbb{R}^+$) и, так как мера Лебега полна, множество B_0 измеримо. Итак, множество E измеримо, как объединение измеримых множеств. Далее по Теореме 3, для $b \in A_\sigma$ сечение $E^b = \{\nu \in \mathbb{C} \mid (\nu, b) \in E\}$ имеет полную меру, поскольку его дополнение $\{1/\nu \mid \nu \in \sigma(K_b)\}$ не более чем счетно. Поэтому множество E имеет полную плоскую меру Лебега. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает следующее важное

Следствие 2. *Для п.в. $\nu \in \mathbb{C}$ задача (1), (2) имеет единственное периодическое решение для почти всех значений периода $b \in \mathbb{R}^+$.*

Доказательство: Поскольку множество E измеримо и имеет полную меру Лебега, то для п.в. $\nu \in \mathbb{C}$ сечение $E_\nu = \{b \in \mathbb{R}^+ \mid (\nu, b) \in E\} = \{b \in \mathbb{R}^+ \mid 1/\nu \notin \sigma(K_b)\}$ имеет полную меру и, значит, задача (1), (2) имеет при таких b единственное периодическое решение с периодом b. Следствие доказано.

3. Периодические решения некоторых дифференциальных уравнений с естественным оператором на многомерной сфере.

Мы будем обозначать через $X = S^n$ сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$; $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, ||x|| = 1\}$, $\quad n \geq 2$ с римановой структурой, наследованной из евклидовой структуры на $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть

$$\xi = \oplus_{p=0}^{n} \xi^p = \oplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(T^* X) \otimes \mathbb{C}$$

есть комплексифицированное кокасательное расслоение многообразия $X, C^\infty(\xi)$, $H^k(\xi)$ - пространство гладких дифференциальных форм и пространство Соболева дифференциальных форм над X, соответственно (см. [4]). Через A будем обозначать оператор $i(d+\delta)$, так называемый естественный дифференциальный оператор на многообразии X, где d - внешний дифференциальный оператор, а $\delta = d^*$- его формально сопряженный относительно скалярного произведения в $C^\infty(\xi)$, индуцированного римановой структурой на X. Известно (см. [4, с. 69-79], [5]), что $d+\delta$ - эллиптический дифференциальный оператор первого порядка на X.

Собственные значения оператора Лапласа в пространстве функций на сфере известны (см. [3, с. 163]), они имеют вид

$$\lambda = -k(k+n-1), \quad k = 0, 1, 2...$$

Аналогичный результат верен и для пространства гладких дифференциальных форм:

Теорема 5. *На сфере S^n все собственные значения оператора A в пространстве гладких дифференциальных форм задаются формулой*

$$\widetilde{\lambda_k} = sign(k)i\sqrt{|k|(|k|+n-1)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство этой теоремы имеется в [7].

Эти формулы определяют взаимно однозначное соответствие между целыми числами и собственным значением оператора $A = i(d+\delta)$ на S^n.

Мы не указываем здесь собственные формы, соответствующие собственным значением оператора A на S^n, как и размерности собственных подпространств. Для нас существенно только то, что эти размерности конечны (то есть собственные числа оператора A имеют конечную кратность).

На сфере S^n рассмотрим задачу о периодических решениях для уравнения

$$(L-\lambda)u \equiv \left(\frac{1}{i}(\frac{\partial}{\partial t} + aA) - \lambda\right) u(x,t) = \nu G(u-f), \tag{17}$$

с условием периодичности по t :

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}, \tag{18}$$

Заменой $t = b\tau$ задача сводится к задаче о периодических решениях для уравнения

$$(L-\lambda)u \equiv \left(\frac{1}{i}(\frac{\partial}{b\partial t} + aA) - \lambda\right) u(x,t) = \nu G(u-f), \tag{19}$$

с фиксированным условием периодичности по t :

$$u|_{t=0} = u|_{t=1}. \tag{20}$$

здесь $u(x,t)$ - комплексная форма на сфере S^n с коэффициентами, зависящими от $t,\ t \in [0,1];\ \ a \neq 0, \lambda$ - заданные комплексные числа , $i^2 = -1$. Для любого $(x,y) \in S^n \times S^n$ рассмотрим линейное отображение

$$\begin{array}{cccc} g(x,y): & \wedge T_y^*(S^n) & \to & \wedge T_x^*(S^n) \\ & u & \to & g(x,y)u = \widetilde{u}(x,y,u) \end{array}$$

переводящее элемент u слоя $\wedge T_y^*(S^n)$ в элемент $\widetilde{u}(x,y,u)$ слоя $\wedge T_x^*(S^n)$. Тогда $\widetilde{u}(x,y,u)$ есть дифференциальная форма с коэффициентами, зависящими от $y \in S^n$ и $u \in \wedge T_y^*(S^n)$. Значение этой формы при $x \in S^n$ при фиксированных

y, u есть элемент слоя $\wedge T_x^*(S^n)$. Считаем, что $g(x,y) \in C^r$, если для любых координатных окрестностей U и V произвольных точек $x_0, y_0 \in S^n$, $g(x,y)$ записывается в координатной форме

$$(g(x,y)u) = \sum_{I_q} (g(x,y)u)_{I_q} dx^{I_q},$$

$$(g(x,y)u)_{Iq} = \sum_{I_p} g_{I_q I_p}(x,y) u_{I_p}.$$

Здесь

$$u = \sum_{I_p} u_{I_p} dy^{Ip},$$

$I_p = i_1 i_2 ... i_p, \quad 0 \leq p \leq n; \quad dy^{I_p} = dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge ... \wedge dy^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n.$ $\{dx^{Ip}\}$ и $\{dy^{Ip}\}$- канонические базисы в соответственных слоях $\wedge T_x^*(S^n)$ и $\wedge T_y^*(S^n)$, причем $g_{I_q I_p}(x,y) \in C^r(U \times V)$. Легко видеть, что данное определение не зависит от выбора координатных окрестностей. Мы можем интерпретировать $g(x,y)$ как тензорное поле на $S^n \times S^n$. Ясно, что наше определение C^r-гладкости $g(x,y)$ согласуется с известным понятием C^r-гладкости соответствующего тензорного поля. Определим интегральный оператор в $L_2([0,1], H^0(\xi))$, положив

$$(Gu)(x,t) = \int_{S^n} g(x,y) u(y,t) dy = \int_{S^n} \widetilde{u}(x,y,t) dy,$$

где dy - мера Лебега-Хаусдорфа на сфере S^n. Считаем, что операция $\dfrac{1}{i}(\dfrac{\partial}{b\partial t} + aA)$ задана на пространстве дифференциальных форм $u(x,t) \in C^\infty([0,1], C^\infty(\xi))$ таких, что его элементы удовлетворяют условию

$$u|_{t=0} = u|_{t=1}.$$

Обозначим через L замыкание операции $\dfrac{1}{i}(\dfrac{\partial}{b\partial t} + aA)$ в $\mathcal{H} = L_2([0,1], H^0(\xi))$. Итак, элемент $u \in \mathcal{H}$ принадлежит области определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L , если существует последовательность $\{u_j\} \subset C^\infty([0,1], C^\infty(\xi))$, $u_j|_{t=0} = u_j|_{t=1}$ такая, что $lim u_j = u$, $lim L u_j = Lu$ в $\mathcal{H}$.

Из общей леммы 1 непосредственно вытекает следующий результат.

Лемма 6. *Собственные значения оператора L на гильбертовом пространстве $L_2([0,1], H^0(\xi))$ имеют вид*

$$\lambda_{km} = \frac{2m\pi}{b} + sign(k)\, a \sqrt{|k|(|k|+n-1)} = \frac{2m\pi}{b} + \lambda_k.$$

Здесь $\lambda_k = sign(k)\, a \sqrt{|k|(|k|+n-1)}$ $\quad k, m \in \mathbb{Z}$. Соответствующие собственные формы e_{kjm}, $j \in J_k = \{1, 2...j_k\}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Область определения оператора L есть $\mathcal{D}(L) =$

$$\{\, u = \sum u_{kjm} e_{kjm} \in \mathcal{H} \quad | \quad \sum |\lambda_{km} u_{kjm}|^2 < \infty, \quad \sum |\lambda_k u_{kjm}|^2 < \infty \,\}.$$

Лемма 7. *Пусть $g(x,y) \in C^0$ на $S^n \times S^n$. Тогда*

$$||G||^2 \leq M_0^2 = \int_{S^n} \int_{S^n} ||g(x,y)||^2 \, dx\, dy.$$

Здесь $||g(x,y)||$- норма линейного отображения $g(x,y)$.

Доказательство. Имеем

$$||Gu(x,t)||^2 = || \int_{S^n} g(x,y)u(y,t)\,dy||^2 \leq$$

$$\left(\int_{S^n} ||g(x,y)u(y,t)||\,dy \right)^2 \leq \left(\int_{S^n} ||g(x,y)||.||u(y,t)||\,dy \right)^2 \leq$$

$$\int_{S^n} ||g(x,y)||^2 dy \int_{S^n} ||u(y,t)||^2 dy,$$

$$||Gu||^2 = \int_0^1 \int_{S^n} ||Gu(x,t)||^2 dxdt \leq$$

$$\int_0^1 \int_{S^n} \left(\int_{S^n} ||g(x,y)||^2 dy \int_{S^n} ||u(y,t)||^2 dy \right) dx\,dt \leq$$

$$\int_{S^n} \int_{S^n} ||g(x,y)||^2 dxdy \int_{S^n} \int_0^1 ||u(y,t)||^2 dydt$$

$$||Gu||^2 \leq M_0^2 ||u||^2.$$

Отсюда следует, что

$$||G|| \leq M_0.$$

Лемма доказана.

Заметим что оператор Лапласа $\Delta = -(d+\delta)^2$ является формально самосопряженным относительно скалярного произведения

$$(u,v) = \int_{S^n} (u(x), v(x))dx$$

на пространстве $C^\infty(\xi)$.

Пусть $y \in S^n,\ v \in \wedge T_y^*(S^n)$. Тогда $g(x,y)v$ есть C^r-гладкая форма по x на S^n и для нее определен оператор Лапласа $\Delta_x(g(x,y)v)$. При фиксированных x и y соответствие

$$v \to \Delta_x(g(x,y)v)$$

является линейным отображением слоя $\wedge T_y^*(S^n)$ в слой $\wedge T_x^*(S^n)$ то есть имеет такой же вид, как и $g(x,y)$. Это поле линейных отображений будем обозначать $\Delta_x g(x,y)$, так что

$$(\Delta_x g(x,y))v = \Delta_x(g(x,y)v)\ \forall\ y \in S^n,\ v \in \wedge T_y^*(S^n).$$

Мы будем предполагать, что $r \geq 2$. Тогда $\Delta_x g(x,y)$ является непрерывным (класса C^0) тензорным полем на $S^n \times S^n$. Произведение $\Delta_x \circ G = \Delta_x G$ есть интегральный оператор с ядром $\Delta_x g(x,\,y)$.

Действительно, имеем

$$\int_{S^n} ((\Delta_x \circ Gu)(x), v(x))\,dx = \int_{S^n} ((Gu)(x), \Delta_x v(x))\,dx =$$

$$\int_{S^n} \left(\int_{S^n} (g(x,y)u(y)dy, \Delta_x v(x) \right) dx =$$

$$\int_{S^n} \left(\int_{S^n} (g(x,y)u(y), \Delta_x v(x))dy \right) dx =$$

$$\int_{S^n} \left(\int_{S^n} (g(x,y)u(y), \Delta_x v(x))dx \right) dy =$$

$$\int_{S^n}\left(\int_{S^n}(\Delta_x(g(x,y)u(y)),v(x))dx\right)dy =$$
$$\int_{S^n}\left(\int_{S^n}(\Delta_x g(x,y)u(y),v(x))dx\right)dy =$$
$$\int_{S^n}\left(\int_{S^n}(\Delta_x g(x,y)u(y),v(x))dy\right)dx =$$
$$\int_{S^n}\left(\int_{S^n}\Delta_x g(x,y)u(y)dy,v(x)\right)dx.$$

Итак,

$$\int_{S^n}((\Delta_x \circ Gu)(x),v(x))\,dx = \int_{S^n}\left(\int_{S^n}(\Delta_x g(x,y))u(y)dy,v(x)\right)dx$$
$$\forall\ v(x)\in C^r(\wedge T^*(S^n)).$$

Отсюда

$$(\Delta_x \circ G)u(x) = \int_{S^n}(\Delta_x g(x,y))u(y)dy.$$

Итак, $\Delta_x \circ G$ есть интегральный оператор с ядром $\Delta_x g(x,y)$. Из леммы 7 следует, что

$$||\Delta_x \circ G|| \le \int_{S^n}\int_{S^n}||\Delta_x g(x,y)||\,dx\,dy.$$

Положим $M = \max\{||\Delta_x G||, ||G||\}$.

Лемма 8. *Пусть* $v = Gu = \sum v_{kjm}e_{kjm}$, *тогда*

$$|v_{kjm}|^2 \le \frac{4M^2}{(|k|(|k|+n-1)+1)^2}||u||^2.$$

При этом, если $k \neq 0$

$$|v_{kjm}|^2 \le \frac{4|\alpha_{kjm}|^2}{(|k|(|k|+n-1)+1)^2}, \tag{21}$$

где $\quad \alpha_{kjm} = \langle \Delta_x Gu, e_{kjm}\rangle = \int_0^1(\Delta_x Gu, e_{kjm})dt.$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить лемму 2 с оператором $\widetilde{\mathcal{B}} = \Delta_x$, для которого $|\mu_k| = |k|(|k|+n-1)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Мы предположим, что a, λ вещественные числа. Тогда по лемме 6 спектр $\sigma(L)$ оператора L лежит на вещественной оси.

Наиболее типичным является случай, когда $ab/(2\pi)$ - иррациональное число. В этом случае, множество чисел λ_{km} всюду плотно на вещественной оси и $\sigma(L) = \mathbb{R}$ (см. [2, с. 151]). Теперь мы также предположим, что $\lambda \neq \lambda_{km} \quad \forall\ k,\, m\in\mathbb{Z}$, тогда определен обратный оператор $(L-\lambda)^{-1}$, но этот оператор не ограничен. В выражении для обратного оператора $(L-\lambda)^{-1}$ появляются малые знаменатели.

$$(L-\lambda)^{-1}v(x,t) = \sum\frac{v_{kjm}}{\lambda_{km}-\lambda}e_{kjm}, \tag{22}$$

где v_{kjm} есть коэффициенты Фурье ряда

$$v(x,t) = \sum_{k,\,m\in\mathbb{Z},\ j\in J_k} v_{kjm}e_{kjm}.$$

В соответствии с первой частью работы для положительных чисел σ и C через $A_\sigma(C)$ обозначим множество таких положительных чисел b, для которых при всех целых m и k выполнено неравенство

$$|\lambda_{km} - \lambda| = |\frac{2m\pi}{b} + sign(k)a\sqrt{|k|(|k|+n-1)} - \lambda| \geq \frac{C}{(|k|+1)^{1+\sigma}}. \tag{23}$$

Через A_σ обозначим объединение по $C > 0$ множеств $A_\sigma(C)$.

Теорема 6. *Множества $A_\sigma(C)$, A_σ - борелевские. При этом, A_σ является множеством полной меры, т.е. его дополнение на полупрямой $\mathbb{R}^+$ имеет нулевую меру.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 3. Здесь $\lambda_{km} = \dfrac{2m\pi}{b} + sign(k)a\sqrt{|k|(|k|+n-1)},\ k \in \mathbb{Z},\ s = 1.$

Верна следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть поле линейных отображений $g(x, y)$ задано на $S^n \times S^n$ и таково, что $\Delta_x g(x, y)$ непрерывен на $S^n \times S^n$, $\quad 0 < \sigma,\ b \in A_\sigma(C)$.*

Тогда определен обратный оператор $(L - \lambda)^{-1}$ и произведение $(L - \lambda)^{-1} \circ G$ есть компактный оператор.

Для доказательства применим теорему 1 с $\widetilde{\mathcal{B}} = \Delta$.

Следующая теорема непосредственно следует из Теоремы 2.

Теорема 8. *Пусть $b \in A_\sigma(C)$. Тогда задача (17),(18) имеет единственное периодическое решение с периодом b для всех $\nu \in \mathbb{C}$, за исключением не более чем счетного дискретного множества значений.*

Исследуем вопрос о разрешимости задачи (17), (18) при фиксированном значении параметра ν. Для этого нам нужно изучить структуру плоского множества $E \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, состоящее из пар (ν, b) таких, что $\nu \neq 0$ и $\dfrac{1}{\nu} \notin \sigma(K_b)$, где $K_b = (L - \lambda)^{-1} \circ G$.

Из теоремы 4 и следствия 2 вытекают следующие результаты.

Теорема 9. *Множество E - измеримое множество полной меры на $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, откуда следует, что для п.в. $\nu \in \mathbb{C}$ задача (17), (18) имеет единственное периодическое решение для почти всех значений периода $b \in \mathbb{R}^+$.*

Пользуясь случаем, автор выражает свою искреннюю благодарность профессору Панову Е.Ю. за внимание к работе.

Список литературы

[1] А.А. Дезин, *Общие вопросы теории граничных задач*, Наука, Москва, 1980.
[2] И.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, Я.Г. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, Москва, 1980.
[3] Я.Г. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, Москва, 1978.
[4] Р. Пале, *Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе*, Мир, Москва, 1970.
[5] Фам Нгок Тхао, *Естественные дифференциальные операторы на компактных многообразиях*, Дифференциальные уравнения, **5**, No. 1 (1969), 186–198.
[6] У. Рудин *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1975.

[7] Данг Хань Хой. *Периодические решения эволюционных систем естественных уравнений на римановых многообразиях (II)*, University of Hanoi, Faculty of Mathematics, Mechacics and Informatics, Hanoi, (1987), 5–13.

Данг Хань Хой
Новгородский государственный университет,
Кафедра математического анализа,
ул. Б.С.-Петербургская, 41,
173003 г.Великий Новгород
E-mail address: dangkhanhhoi@yahoo.com