S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 153–154 (2006) УДК 510.51+519.716.35
Краткие сообщения MSC 03D05, 03D45, 03C57

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА КЛАССОВ АВТОМАТНЫХ СТРУКТУР

Н.С. ВИНОКУРОВ

Abstract. We find levels of index sets in arithmetical and analytical hierarchies for some classes of automatic structures.

В данной статье изучаются индексные множества классов однородных, автоматно однородных и универсальных моделей. Мы покажем, что однородность является довольно простым свойством для распознавания, а универсальность, наоборот, крайне сложным. Мы также оценим сложность проблем существования вычислимого изоморфизма и вычислимого вложения.

Понятие автоматной модели было введено Хусаиновым и Нероудом в [1]. С этим определением и основными свойствами автоматных моделей можно познакомиться по работе [4].

Зафиксируем некоторую геделеву нумерацию $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\omega}$ всех автоматных структур, т.е. такую нумерацию, что по автоматному представлению структуры можно эффективно вычислить ее номер и, наоборот, по любому номеру можно эффективно построить конечные автоматы, задающие данную структуру.

Напомним, что счетная модель $\mathfrak{A}$ называется *однородной*, если для любых кортежей $\bar a$ и $\bar b$, условие $(\mathfrak{A},\bar a)\equiv(\mathfrak{A},\bar b)$ влечет существование автоморфизма модели $\mathfrak{A}$, поэлементно переводящего $\bar a$ в $\bar b$. Дадим определение *автоматной однородности*, являющееся некоторым естественным усилением однородности для автоматных моделей.

Определение 1. *Модель $\mathfrak{A}$ называется автоматно однородной, если для любых кортежей $\bar a$ и $\bar b$, условие $(\mathfrak{A},\bar a)\equiv(\mathfrak{A},\bar b)$ влечет существование автоматного автоморфизма модели $\mathfrak{A}$, поэлементно переводящего $\bar a$ в $\bar b$.*

Vinokurov, N.S., Index sets of classes of automatic structures.

Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации «Ведущие научные школы» (грант НШ-4413.2006.1).

Поступила 10 апреля 2006 г., опубликована 18 апреля 2006 г.

Автором получены следующие результаты:

Теорема 1. *Множество* Hom $= \{n \mid \mathfrak{A}_n$ *однородна* $\}$ Π^0_3*–полно.*

Теорема 2. *Множество* AHom $= \{n \mid \mathfrak{A}_n$ *автоматно однородна* $\}$ Π^0_2*–полно.*

Напомним, что модель $\mathfrak{A}$ называется *универсальной,* если для любой модели $\mathfrak{B}$, мощность которой не превосходит мощности $\mathfrak{A}$ и такой, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, существует элементарное вложение из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$. По аналогии с этим определением мы определим универсальность в классе автоматных моделей следующим образом:

Определение 2. *Автоматная модель* $\mathfrak{A}$ *называется универсальной в классе автоматных моделей, если для любой автоматной модели* $\mathfrak{B}$ *такой, что* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$*, существует элементарное вложение из* $\mathfrak{B}$ *в* $\mathfrak{A}$*.*

Теорема 3. *Множество* Un $= \{n \mid \mathfrak{A}_n$ *универсальна в классе автоматных моделей*$\}$ Σ^1_1*–полно.*

Следствие 1. *Множество номеров всех универсальных автоматных структур не менее, чем* Σ^1_1*–полно.*

Следствие 2. *Множество номеров всех универсальных вычислимых структур не менее, чем* Σ^1_1*–полно.*

Теперь мы приведем оценку проблем существования вычислимого изоморфизма и вложения для автоматных структур. Заметим, что для вычислимых структур оценки соответствующих проблем такие же. Пусть $(v^m_n)_{n\in\omega}$ — некоторая эффективная геделева нумерация всех слов из языка $|\mathfrak{A}_m|$.

Теорема 4. *Множество* $\mathtt{Aut}_c = \{(m,n,l) \mid$ *существует вычислимый автоморфизм* f *модели* $\mathfrak{A}_m$*, такой, что* $f(v^m_n) = v^m_l\}$ Σ^0_3*–полно.*

Следствие 3. *Множество* $\mathtt{Iso}_c = \{(m,n) \mid \mathfrak{A}_m \cong_c \mathfrak{A}_n\}$ Σ^0_3*–полно.*

Следствие 4. *Множество* $\mathtt{Emb}_c = \{(m,n) \mid \mathfrak{A}_m \hookrightarrow_c \mathfrak{A}_n\}$ Σ^0_3*–полно.*

Во всех указанных результатах оценка сверху легко получается по алгоритму Тарского–Куратовского, а доказательство оценки снизу использует технику построения автоматных моделей с помощью графов конфигураций машин Тьюринга, развитую в работах [4, 2, 3], а также некоторые теоретико–модельные методы.

Список литературы

[1] B. Khoussainov, A. Nerode, *Automatic presentations of structures*, Lecture Notes in Computer Science, **960** (1995), 367-392.

[2] B. Khoussainov, A. Nies, S. Rubin, F. Stephan, *Automatic structures: richness and limitations*, Proc. 19th IEEE Symp. on Logic in Computer Science, 2004, Turku (Finland), 44–53.

[3] B. Khoussainov, S. Rubin, H. Ishihara, *On isomorphism invariants of some automatic structures*, Proc. 17th IEEE Symp. on Logic in Computer Science, 2002, Copenhagen (Denmark), 43–53.

[4] S. Rubin, *Automata structures*, PhD thesis, University of Auckland, 2004 (см. `http://www.cs.auckland.ac.nz/~bmk/Sasha/SashaPhDthesis.pdf`).

Винокуров Никита Сергеевич
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `vinokurov@gorodok.net`