S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр.15–59 (2006) УДК 512.55
MSC 16Pxx

ЛОКАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА ПОРЯДКА p^6 С 4-НИЛЬПОТЕНТНЫМ РАДИКАЛОМ ДЖЕКОБСОНА

Е.В. ЖУРАВЛЕВ

Abstract. The structure and classification up to isomorphism of all finite local rings of order p^6 with characteristics p and 4-nilpotent Jacobson radical are determined.

1. Введение

Одной из актуальных проблем современной алгебры является задача описания и классификации конечных колец малых порядков. В работах [7, 8] классифицированы с точностью до изоморфизма все конечные кольца порядков p, p^2, p^3, p^4, p^5. В решении этой проблемы важная роль отводилась локальным кольцам, то есть кольцам с условием $R/J(R) = F$, где F — поле. Техника доказательства указанных работ существенным образом опирается на следующее утверждение:

Пусть R — конечное локальное ассоциативное кольцо с единицей, $|R| = p^n$ и $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R, $R/J(R) = GF(p^r) = F$. Рассмотрим последовательность $R = J^0 \supset J \supset J^2 \supset \ldots$. Если $s_i = \dim_F J^i/J^{i+1}$, то $r\sum\limits_{i=0}^{\infty} s_i = n$.

Следовательно, необходимо перебрать все возможные комбинации значений s_0, s_1, s_2, $s_3 \ldots$ для рассматриваемого числа n и описать кольца, соответствующие каждому из определенных таким образом случаев.

Радикал Джекобсона конечного кольца R является нильпотентным, более точно, $J(R)^{\sum\limits_{i=0}^{\infty} s_i} = 0$. Поэтому естественным образом возникает необходимость в описании локальных колец с радикалом Джекобсона индекса нильпотентности $2, 3$ и 4.

В работах [1, 5] указано строение конечных локальных колец, индекс нильпотентности радикала Джекобсона которых не более трех. Эти результаты сыграли важную роль в классификации колец порядка p^5 (см. [7, 8]). Цель

Zhuravlev E.V., Local rings of order p^6 with 4-nilpotent radical of Jacobson.

Поступила 23 ноября 2005 г., опубликована 17 февраля 2006 г.

данной работы — указать строение локальных колец характеристики p с радикалом Джекобсона индекса нильпотентности 4 и в дальнейшем применить полученные сведения для классификации колец порядка p^6.

2. Предварительные сведения

Все кольца, рассматриваемые в данной работе, являются ассоциативными и содержат единицу. Далее нам потребуются следующие хорошо известные результаты из теории конечных колец (см. [1, 4, 7, 8]).

Предложение 1. *Пусть R — конечное кольцо, в котором все делители нуля образуют идеал M. Тогда существует простое число p и натуральные числа n, r, такие, что*

(1) $|R| = p^{nr}$;
(2) $M = J(R)$ — *радикал Джекобсона кольца R и $M^n = 0$;*
(3) $|M| = p^{(n-1)r}$;
(4) $R/M \cong GF(p^r)$;
(5) $char\ R = p^k$, *где* $1 \leq k \leq n$.
(6) *если $n = k$, то R является кольцом Галуа и обозначается $GR(p^{kr}, p^k)$. В частности, $M = pR$, $Aut(R) \cong Aut(R/pR)$ и $R = Z_{p^k}[b]$, где b — элемент R мультипликативного порядка $p^r - 1$;*
(7) *если $char(R) = p^k$, то R содержит максимальное подкольцо Галуа $R_0 = GR(p^{kr}, p^k) = Z_{p^k}[b]$, и если R_0' — другое максимальное подкольцо Галуа кольца R, то существует обратимый элемент $x \in R$, такой, что $R_0' = xR_0x^{-1}$. Пусть $K_0 =< b > \cup\{0\}$. Тогда каждый элемент кольца R_0 может быть записан единственным образом в виде $\sum\limits_{i=0}^{k-1} p^i\lambda_i$, где $\lambda_i \in K_0$;*
(8) *если $m \in M$ и p^t является аддитивным порядком элемента m для некоторого положительного целого $t \leq k$, то $R_0m \cong R_0/p^tR_0$ и $|R_0m| = p^{tr}$;*
(9) *существуют элементы $m_1, \ldots, m_h \in M$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_h \in Aut(R_0)$, такие, что R раскладывается в прямую сумму левых R_0-модулей*

$$R = R_0 \oplus R_0m_1 \oplus \ldots \oplus R_0m_h,$$

где $m_ir_0 = r_0^{\sigma_i}m_i$ для всех $i = 1, \ldots, h$ и для любого элемента $r_0 \in R_0$. Отсюда, в частности следует, что

$$M = pR_0 \oplus R_0m_1 \oplus \ldots \oplus R_0m_h.$$

Далее, будем всегда предполагать, что R является конечным ассоциативным кольцом, $J(R)^4 = 0, J(R)^3 \neq 0$ и $F = R/J(R)$ — конечное поле $GF(p^r)$.

Предложение 2. *Предположим, что*

$$\dim_F J(R)/J(R)^2 = s_1 \quad и \quad \dim_F J(R)^2/J(R)^3 = s_2.$$

Тогда верны следующие неравенства:

(1) $\dim_F(J(R)^2) \leq s_1^2 + s_1s_2$;
(2) $\dim_F(J(R)^2/J(R)^3) \leq s_1^2$;
(3) $\dim_F(J(R)^3) \leq s_1s_2$.

3. Теорема о классификации конечных локальных колец характеристики p

В этом случае $R_0 = F$, где $F = GF(p^r) = R/J(R)$ — конечное поле порядка p^r. Пусть $r \in R$. Тогда в силу предложения 1, $r = \alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{h} \alpha_i m_i$ ($\alpha_0,\ \alpha_i \in F$). Так как $J(R)^4 = 0,\ J(R)^3 \neq 0$, то мы можем переобозначить базис $J(R)$ следующим образом:

$$\{m_1, \dots, m_h\} = \{x_1, \dots, x_{s_1}, \underbrace{y_1, \dots, y_{s_2}, \overbrace{z_1, \dots, z_{s_3}}^{J(R)^3}}_{J(R)^2}\},$$

где $x_1, \dots, x_{s_1} \in J(R) \setminus J(R)^2,\ y_1, \dots, y_{s_2} \in J(R)^2 \setminus J(R)^3,\ z_1, \dots, z_{s_3} \in J(R)^3$, $s_1 + s_2 + s_3 = h$. Далее, переобозначим соответствующие автоморфизмы:

$$\{\sigma_1, \dots, \sigma_h\} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{s_1}, \theta_1, \dots, \theta_{s_2}, \tau_1, \dots, \tau_{s_3}\}.$$

Так как $x_i x_j \in J(R)^2$ и $x_i y_j,\ y_i x_j \in J(R)^3$, то

$$x_i x_j = \sum_{k=1}^{s_2} a_{ij}^k y_k + \sum_{k=1}^{s_3} b_{ij}^k z_k, \quad \text{где} \quad a_{ij}^k, b_{ij}^k \in F,\ i,j = \overline{1, s_1},$$

$$x_i y_j = \sum_{k=1}^{s_3} c_{ij}^k z_k, \quad y_j x_i = \sum_{k=1}^{s_3} d_{ij}^k z_k, \quad \text{где} \quad c_{ij}^k,\ d_{ij}^k \in F, \quad i = \overline{1, s_1},\ j = \overline{1, s_2}.$$

Рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{11}^2 & \dots & a_{11}^{s_2} \\ a_{12}^1 & a_{12}^2 & \dots & a_{12}^{s_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s_1 s_1}^1 & a_{s_1 s_1}^2 & \dots & a_{s_1 s_1}^{s_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{11}^2 & \dots & b_{11}^{s_3} \\ b_{12}^1 & b_{12}^2 & \dots & b_{12}^{s_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s_1 s_1}^1 & b_{s_1 s_1}^2 & \dots & b_{s_1 s_1}^{s_3} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{11}^2 & \dots & c_{11}^{s_3} \\ c_{12}^1 & c_{12}^2 & \dots & c_{12}^{s_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s_1 s_2}^1 & c_{s_1 s_2}^2 & \dots & c_{s_1 s_2}^{s_3} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11}^1 & d_{11}^2 & \dots & d_{11}^{s_3} \\ d_{12}^1 & d_{12}^2 & \dots & d_{12}^{s_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{s_1 s_2}^1 & d_{s_1 s_2}^2 & \dots & d_{s_1 s_2}^{s_3} \end{pmatrix}.$$

Так как элементы $x_i x_j + J(R)^3$ ($i,j = \overline{1, s_1}$) порождают $J(R)^2/J(R)^3$, то матрица A имеет ранг s_2 (максимальное число линейно независимых строк). Следовательно, матрицы (a_{ij}^k) ($k = \overline{1, s_2}$), образованные столбцами матрицы A, линейно независимы. Аналогично, так как элементы $x_i y_j$ (соответственно $y_j x_i$) порождают $J(R)^3$, то матрицы C и D имеют ранг s_3. Следовательно, матрицы (c_{ij}^k) (соответственно (d_{ij}^k)), $k = \overline{1, s_3},\ i = \overline{1, s_1},\ j = \overline{1, s_2}$, образованные соответствующими столбцами матрицы C (соответственно D), линейно независимы.

Далее, так как кольцо R является ассоциативным, то $(x_\alpha x_\beta) x_\gamma = x_\alpha (x_\beta x_\gamma)$, для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, s_1\}$. Следовательно,

$$(x_\alpha x_\beta) x_\gamma = \left(\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k y_k + \sum_{k=1}^{s_3} b_{\alpha\beta}^k z_k \right) x_\gamma = \sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k \left(\sum_{m=1}^{s_3} d_{\gamma k}^m z_m \right),$$

$$x_\alpha (x_\beta x_\gamma) = x_\alpha \left(\sum_{k=1}^{s_2} a_{\beta\gamma}^k y_k + \sum_{k=1}^{s_3} b_{\beta\gamma}^k z_k \right) = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k \right)^{\sigma_\alpha} x_\alpha y_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k \right)^{\sigma_\alpha} \left(\sum_{m=1}^{s_3} c_{\alpha k}^m z_m \right),$$

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k \left(\sum_{m=1}^{s_3} d_{\gamma k}^m z_m \right) = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k \right)^{\sigma_\alpha} \left(\sum_{m=1}^{s_3} c_{\alpha k}^m z_m \right).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k d_{\gamma k}^m = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k \right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^m,$$

для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, s_1\}$ и любого числа $m \in \{1, \dots, s_3\}$.

Далее, пусть b — примитивный элемент поля F. В силу ассоциативности R имеем

$$(x_i x_j)b = x_i(x_j b), \ i, j = \overline{1, s_1}.$$

Отсюда

$$(x_i x_j)b = \sum_{k_1=1}^{s_2} a_{ij}^{k_1} b^{\theta_{k_1}} y_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{s_3} b_{ij}^{k_2} b^{\tau_{k_2}} z_{k_2} = (b^{\sigma_j})^{\sigma_i} x_i x_j =$$

$$= b^{\sigma_i \sigma_j} \left(\sum_{k_1=1}^{s_2} a_{ij}^{k_1} y_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{s_3} b_{ij}^{k_2} z_{k_2} \right).$$

Следовательно,

$$\sum_{k_1=1}^{s_2} a_{ij}^{k_1} (b^{\theta_{k_1}} - b^{\sigma_i \sigma_j}) y_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{s_3} b_{ij}^{k_2} (b^{\tau_{k_2}} - b^{\sigma_i \sigma_j}) z_{k_2} = 0.$$

Так как элементы $y_{k_1}, \ z_{k_2}$ линейно независимы, то

$$a_{ij}^{k_1} (b^{\theta_{k_1}} - b^{\sigma_i \sigma_j}) = 0, \ b_{ij}^{k_2} (b^{\tau_{k_2}} - b^{\sigma_i \sigma_j}) = 0,$$

для всех $k_1 = \overline{1, s_2}, \ k_2 = \overline{1, s_3}$. Матрицы $(a_{ij}^{k_1})$ линейно независимы, а значит, отличны от нуля. Следовательно,

(1) для каждого $k \in \{1, \dots, s_2\}$ существуют некоторые $i, j \in \{1, \dots, s_1\}$, такие, что $a_{ij}^k \neq 0$ и, следовательно, $b^{\theta_k} = b^{\sigma_i \sigma_j}$, $\theta_k = \sigma_i \sigma_j$;
(2) если матрица B содержит ненулевой столбец с номером $k \in \{1, \dots, s_3\}$, то существуют некоторые $i, j \in \{1, \dots, s_1\}$, такие, что $\tau_k = \sigma_i \sigma_j$.

Аналогично, из равенств

$$(x_i y_j)b = x_i(y_j b) \text{ и } (y_j x_i)b = y_j(x_i b), \ i = \overline{1, s_1}, \ j = \overline{1, s_2}$$

следует, что

$$\sum_{k=1}^{s_3} c_{ij}^k b^{\tau_k} z_k = (b^{\theta_j})^{\sigma_i} x_i y_j = b^{\theta_j \sigma_i} \sum_{k=1}^{s_3} c_{ij}^k z_k;$$

$$\sum_{k=1}^{s_3} d_{ij}^k b^{\tau_k} z_k = (b^{\sigma_i})^{\theta_j} y_j x_i = b^{\sigma_i \theta_j} \sum_{k=1}^{s_3} d_{ij}^k z_k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{s_3} c_{ij}^k (b^{\tau_k} - b^{\theta_j \sigma_i}) z_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{s_3} d_{ij}^k (b^{\tau_k} - b^{\theta_j \sigma_i}) z_k,$$

и так как z_k линейно независимы, то

$$c_{ij}^k (b^{\tau_k} - b^{\theta_j \sigma_i}) = 0, \quad d_{ij}^k (b^{\tau_k} - b^{\theta_j \sigma_i}) = 0$$

для всех $k \in \{1, \dots, s_3\}$. Матрицы (c_{ij}^k) (сответственно (d_{ij}^k)) являются линейно независимыми, поэтому для каждого $k = 1, \dots, s_3$ существуют соответствующие числа i и j, такие, что $c_{ij}^k \neq 0$ (соответственно $d_{ij}^k \neq 0$). Следовательно, $b^{\tau_k} = b^{\theta_j \sigma_i}$, и так как b — примитивный элемент F, то $\tau_k = \theta_j \sigma_i$.

Таким образом, автоморфизмы $\{\theta_1, \dots, \theta_{s_2}, \tau_1, \dots, \tau_{s_3}\}$ выражаются через автоморфизмы $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{s_1}\}$.

Окончательно получаем, что умножение на кольце R удовлетворяет равенству

$$\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{s_1}\alpha_k x_k+\sum_{k=1}^{s_2}\beta_k y_k+\sum_{k=1}^{s_3}\gamma_k z_k\right)\cdot\left(\alpha_0'+\sum_{k=1}^{s_1}\alpha_k' x_k+\sum_{k=1}^{s_2}\beta_k' y_k+\sum_{k=1}^{s_3}\gamma_k' z_k\right)=$$

$$\alpha_0\alpha_0'+\sum_{k=1}^{s_1}\left(\alpha_0\alpha_k'+\alpha_k(\alpha_0')^{\sigma_k}\right)x_k+\sum_{k=1}^{s_2}\left(\alpha_0\beta_k'+\beta_k(\alpha_0')^{\theta_k}+\sum_{i,j=1}^{s_1}a_{ij}^k\alpha_i(\alpha_j')^{\sigma_i}\right)y_k+$$

$$\sum_{k=1}^{s_3}\left(\alpha_0\gamma_k'+\gamma_k(\alpha_0')^{\tau_k}+\sum_{i,j=1}^{s_1}b_{ij}^k\alpha_i(\alpha_j')^{\sigma_i}+\sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}\left(c_{ij}^k\alpha_i(\beta_j')^{\sigma_i}+d_{ij}^k\beta_j(\alpha_i')^{\theta_j}\right)\right)z_k,$$

где $\alpha_0,\ \alpha_0',\ \alpha_k,\ \alpha_k',\ \beta_k,\ \beta_k',\ \gamma_k,\ \gamma_k'\in F$.

По аналогии с работами [1, 5] рассмотрим следующую конструкцию

Конструкция A

Пусть

(1) $F=GF(p^r)$;

(2) некоторые натуральные числа $s_1,\ s_2,\ s_3$ удовлетворяют условиям: $s_2\le s_1^2$, $s_3\le s_1s_2$;

(3) $U,\ V,\ W$ — соответственно $s_1,\ s_2,\ s_3$-мерные векторные пространства над полем F;

(4) $\{\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1}\},\ \{\theta_1\dots,\theta_{s_2}\},\ \{\tau_1\dots,\tau_{s_3}\}$ — автоморфизмы поля F, а

$$(a_{ij}^{k_1})_{s_1\times s_1},\ (b_{ij}^{k_2})_{s_1\times s_1},\ (c_{ij}^{k_2})_{s_1\times s_2},\ (d_{ij}^{k_2})_{s_1\times s_2},\ (k_1=\overline{1,s_2},\ k_2=\overline{1,s_3})$$

— матрицы над полем F, удовлетворяющие следующим условиям:

(a) множества $\left\{(a_{ij}^{k_1})\right\},\ \left\{(c_{ij}^{k_2})\right\},\ \left\{(d_{ij}^{k_2})\right\}$ являются множествами линейно независимых матриц;

(b) для любых чисел $\alpha,\beta,\gamma\in\{1,\dots,s_1\}$ и любого числа $m\in\{1,\dots,s_3\}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{s_2}a_{\alpha\beta}^k d_{\gamma k}^m=\sum_{k=1}^{s_2}\left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha}c_{\alpha k}^m;$$

(c) если $a_{ij}^k\ne 0$ для некоторого $1\le k\le s_2$, то $\theta_k=\sigma_i\sigma_j$;

(d) если $b_{ij}^k\ne 0$ для некоторого $1\le k\le s_3$, то $\tau_k=\sigma_i\sigma_j$;

(e) если $c_{ij}^k\ne 0$ для некоторого $1\le k\le s_3$, то $\tau_k=\sigma_i\theta_j$;

(f) если $d_{ij}^k\ne 0$ для некоторого $1\le k\le s_3$, то $\tau_k=\sigma_i\theta_j$.

Матрицы $\{(a_{ij})\},\{(c_{ij})\},\{(d_{ij})\}$ будем в дальнейшем называть совместными матрицами конструкции A.

Рассмотрим прямую сумму

$$R=F\oplus U\oplus V\oplus W$$

и множества $\{u_i\},\ \{v_i\},\ \{w_i\}$, являющиеся базисами соответственно U, V и W. Определим умножение на R по правилу

$$\left(\alpha_0,\ \sum_{k=1}^{s_1}\alpha_k u_k,\ \sum_{k=1}^{s_2}\beta_k v_k,\ \sum_{k=1}^{s_3}\gamma_k w_k\right)\cdot\left(\alpha_0',\ \sum_{k=1}^{s_1}\alpha_k' u_k,\ \sum_{k=1}^{s_2}\beta_k' v_k,\ \sum_{k=1}^{s_3}\gamma_k' w_k\right)=$$

$$\left(\alpha_0\alpha_0',\ \sum_{k=1}^{s_1}\left(\alpha_0\alpha_k'+\alpha_k(\alpha_0')^{\sigma_k}\right)u_k,\ \sum_{k=1}^{s_2}\left(\alpha_0\beta_k'+\beta_k(\alpha_0')^{\theta_k}+\sum_{i,j=1}^{s_1}a_{ij}^k\alpha_i(\alpha_j')^{\sigma_i}\right)v_k,\right.$$

$$\sum_{k=1}^{s_3}\left(\alpha_0\gamma'_k+\gamma_k(\alpha'_0)^{\tau_k}+\sum_{i,j=1}^{s_1} b_{ij}^k\alpha_i(\alpha'_j)^{\sigma_i}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}\left(c_{ij}^k\alpha_i(\beta'_j)^{\sigma_i}+d_{ij}^k\beta_j(\alpha'_i)^{\theta_j}\right)\right) w_k\Bigg),$$

где $\alpha_0,\ \alpha'_0,\ \alpha_k,\ \alpha'_k,\ \beta_k,\ \beta'_k,\ \gamma_k,\ \gamma'_k\in F$. Относительно введенного умножения, как показывает следующая теорема, R превращается в ассоциативное кольцо.

Теорема 1. *Векторное пространство R конструкции A является конечным локальным кольцом характеристики p, радикал Джекобсона которого имеет индекс нильпотентности четыре. Обратно, каждое такое кольцо изоморфно одному из колец конструкции A.*

Доказательство. По условию R является абелевой группой. Легко проверяется дистрибутивность и ассоциативность. Также заметим, что элемент $(1,0,0,0)$ является единицей R. Итак, R — ассоциативное кольцо с единицей.

Далее, $|R|=|U|\cdot|V|\cdot|W|=p^r\cdot p^{rs_1}\cdot p^{rs_2}\cdot p^{rs_3}=p^{(1+s_1+s_2+s_3)r}=p^{nr}$, где $n=1+s_1+s_2+s_3$ и $char\ R=p$.

Осталось показать, что кольцо R является локальным и имеет радикал Джекобсона индекса нильпотентности четыре. Очевидно, что U, V и W можно рассматривать как подмножества R. Пусть $M=U\oplus V\oplus W$. Из определения умножения на R следует, что $M^2\subseteq V\oplus W$, $M^3\subseteq W$ и $MW=WM=0$. Следовательно, $M^4=0$. Аналогично получаем, что $RM=MR\subseteq M$, то есть M является идеалом R.

Далее, $M\subseteq J(R)$. Следовательно, каждый элемент множества

$$F^*+M=\{f(1+f^{-1}m)\mid f\in F^*,\ m\in M\}$$

является обратимым. Так как $|M|=p^{r(s_1+s_2+s_3)}$ и $|F^*+M|=(p^r-1)p^{r(s_1+s_2+s_3)}$, то $F^*+M=R\setminus M$. Следовательно, $R/M\cong GF(p^r)$. Итак, R является локальным кольцом и $J(R)^4=0,\ J(R)^3\neq 0$.

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

Предложение 3. *Пусть R — кольцо конструкции A. Поле F лежит в центре R тогда и только тогда, когда автоморфизмы*

$$\{\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1},\ \theta_1,\ldots,\theta_{s_2},\ \tau_1,\ldots,\tau_{s_3}\}$$

являются тождественными.

Доказательство. Пусть $F\subseteq Z(R)$ и b является примитивным элементом F. Тогда

$$(0,\ u_i,\ v_j,\ w_k)\cdot(b,0,0,0)=(b,0,0,0)\cdot(0,\ u_i,\ v_j,\ w_k)\,.$$

Следовательно,

$$\left(0,\ b^{\sigma_i}u_i,\ b^{\theta_j}v_j,\ b^{\tau_k}w_k\right)=(0,\ bu_i,\ bv_j,\ bw_k)\,,$$

где $i=\overline{1,s_1},\ j=\overline{1,s_2},\ k=\overline{1,s_3}$. Отсюда следует, что $b^{\sigma_i}=b^{\theta_j}=b^{\tau_k}=b$, то есть автоморфизмы $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1},\ \theta_1,\ldots,\theta_{s_2},\ \tau_1,\ldots,\tau_{s_3}\}$ являются тождественными.

Обратно, если автоморфизмы $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1},\ \theta_1,\ldots,\theta_{s_2},\ \tau_1,\ldots,\tau_{s_3}\}$ являются тождественными, то поле F лежит в центре R в силу определенного в конструкции A умножения. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть R кольцо конструкции A. Тогда R является коммутативным тогда и только тогда, когда*

(1) *все автоморфизмы*

$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{s_1},\ \theta_1, \ldots, \theta_{s_2},\ \tau_1, \ldots, \tau_{s_3}\}$$

тождественные;

(2) *матрицы* $(a_{ij}^{k_1})$, $(b_{ij}^{k_2})$, $i,j = \overline{1,s_1}$, $k_1 = \overline{1,s_2}$, $k_2 = \overline{1,s_3}$ *являются симметрическими;*

(3) *матрицы* (c_{ij}^k) *и* (d_{ij}^k), $i = \overline{1,s_1}$, $j = \overline{1,s_2}$ *равны для каждого* $k = \overline{1,s_3}$.

Назовем целые числа r, s_1, s_2, s_3 **инвариантами** кольца R (так как они сохраняются при изоморфизме). Если $A = (a_{ij})$ — матрица над полем F, а σ — автоморфизм поля F, то в дальнейшем символом A^σ, будем обозначать матрицу $(\sigma(a_{ij}))$. Пусть A и B — матрицы над полем F размерностей $m \times n$ и $n \times k$ соответственно, и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in Aut(F)$, $n, m, k \in N$. Обозначим через $[A, B]_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}$ матрицу $= (c_{ij})_{m\times k}$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j}^{\alpha_i} + a_{i2}b_{2j}^{\alpha_i} + \ldots + a_{in}b_{nj}^{\alpha_i}$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}$. Если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = \alpha$, то $[A, B]_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} = AB^\alpha$. Пусть

$$A_k = (a_{ij}^k),\ B_k = (b_{ij}^k),\ C_k = (c_{ij}^k),\ D_k = (d_{ij}^k),$$

$$A = \left\{(a_{ij}^k) \mid k = 1, \ldots, s_2\right\}, \quad B = \left\{(b_{ij}^k) \mid k = 1, \ldots, s_3\right\},$$

$$C = \left\{(c_{ij}^k) \mid k = 1, \ldots, s_3\right\}, \quad D = \left\{(d_{ij}^k) \mid k = 1, \ldots, s_3\right\}.$$

Обозначим через $R(A, B, C, D, \sigma_i, \theta_j, \tau_k)$ и $R(A', B', C', D', \sigma_i', \theta_j', \tau_k')$ два кольца конструкции A (с одинаковыми инвариантами). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.

$$R(A, B, C, D, \sigma_i, \theta_j, \tau_k) \cong R(A', B', C', D', \sigma_i', \theta_j', \tau_k')$$

тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{s_1\times s_1}$, $R = (r_{ij})_{s_2\times s_2}$, $T = (t_{ij})_{s_3\times s_3}$, *некоторые матрицы* $Q = (q_{ij})_{s_2\times s_1}$, $S = (s_{ij})_{s_3\times s_2}$ *и автоморфизм* ρ *поля* F, *такие, что*

$$P^T \cdot [A_k', P]_{(\sigma_1',\ldots,\sigma_{s_1}')} = \sum_{i=1}^{s_2} r_{ki} A_i^\rho, \quad k = \overline{1,s_2}, \tag{1}$$

$$P^T \cdot [B_k', P]_{(\sigma_1',\ldots,\sigma_{s_1}')} + P^T \cdot [C_k', Q]_{(\sigma_1',\ldots,\sigma_{s_1}')} + Q^T \cdot [D_k'^T, P]_{(\theta_1',\ldots,\theta_{s_2}')} =$$
$$= \sum_{i=1}^{s_2} s_{ki} A_i^\rho + \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki} B_i^\rho, \quad k = \overline{1,s_3}, \tag{2}$$

$$P^T \cdot [C_k', R]_{(\sigma_1',\ldots,\sigma_{s_1}')} = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki} C_i^\rho, \quad k = \overline{1,s_3}, \tag{3}$$

$$R^T \cdot [{D'}_k^T, P]_{(\theta_1',\ldots,\theta_{s_2}')} = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki} \left(D_i^T\right)^\rho, \quad k = \overline{1,s_3} \tag{4}$$

и $\sigma_i = \sigma_j'$, *если* $p_{ji} \neq 0$, $\theta_i = \theta_j'$, *если* $r_{ji} \neq 0$, $\tau_i = \tau_j'$, *если* $t_{ji} \neq 0$, $\sigma_i = \theta_j'$, *если* $q_{ji} \neq 0$, $\theta_i = \tau_j'$, *если* $s_{ji} \neq 0$.

Доказательство. Предположим, что существует изоморфизм

$$\psi : R = R(A, B, C, D, \sigma_i, \theta_j, \tau_k) \to R' = R(A', B', C', D', \sigma_i', \theta_j', \tau_k').$$

Тогда $\psi(F)$ является максимальным подполем Галуа кольца R'. В силу предложения 1 найдется обратимый элемент $x \in R'$ такой, что $x\psi(F)x^{-1} = F$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi : R(A, B, C, D, \sigma_i, \theta_j, \tau_k) \to R(A', B', C', D', \sigma_i', \theta_j', \tau_k'),$$

определяемое по правилу $r \to x\psi(r)x^{-1}$. Очевидно, что φ является изоморфизмом, оставляющим F на месте. Более того, $\varphi(\alpha) = \alpha^\rho$ для любого $\alpha \in F$ и некоторого $\rho \in Aut(F)$.

Далее, пусть

$$\varphi(0, u_i, 0, 0) = \left(0, \sum_{j=1}^{s_1} p_{ji}u'_j, \sum_{j=1}^{s_2} q_{ji}v'_j, \sum_{j=1}^{s_3} n_{ji}w'_j\right), \text{ где } i = \overline{1, s_1},$$

$$\varphi(0, 0, v_i, 0) = \left(0, 0, \sum_{j=1}^{s_2} r_{ji}v'_j, \sum_{j=1}^{s_3} s_{ji}w'_j\right), \text{ где } i = \overline{1, s_2},$$

$$\varphi(0, 0, 0, w_i) = \left(0, 0, 0, \sum_{j=1}^{s_3} t_{ji}w'_j\right), \text{ где } i = \overline{1, s_3}.$$

Тогда для произвольного $\alpha \in F$ имеем

$$\varphi(0, u_i\alpha, 0, 0) = \varphi(0, \alpha^{\sigma_i}u_i, 0, 0) = \varphi(\alpha^{\sigma_i}, 0, 0, 0)\,\varphi(0, u_i, 0, 0) =$$
$$\left(0, \sum_{j=1}^{s_1}(\alpha^{\sigma_i})^\rho p_{ji}u'_j, \sum_{j=1}^{s_2}(\alpha^{\sigma_i})^\rho q_{ji}v'_j, \sum_{j=1}^{s_3}(\alpha^{\sigma_i})^\rho n_{ji}w'_j\right),$$
$$\varphi(0, u_i\alpha, 0, 0) = \varphi(0, u_i, 0, 0)\varphi(\alpha, 0, 0, 0) =$$
$$\left(0, \sum_{j=1}^{s_1} p_{ji}u'_j\alpha^\rho, \sum_{j=1}^{s_2} q_{ji}v'_j\alpha^\rho, \sum_{j=1}^{s_3} n_{ji}w'_j\alpha^\rho\right) =$$
$$\left(0, \sum_{j=1}^{s_1}(\alpha^\rho)^{\sigma'_j}p_{ji}u'_j, \sum_{j=1}^{s_2}(\alpha^\rho)^{\theta'_j}q_{ji}v'_j, \sum_{j=1}^{s_3}(\alpha^\rho)^{\tau'_j}n_{ji}w'_j\right).$$

Отсюда $(\alpha^{\sigma_i})^\rho p_{ji} = (\alpha^\rho)^{\sigma'_j}p_{ji}$, $(\alpha^{\sigma_i})^\rho q_{ji} = (\alpha^\rho)^{\theta'_j}q_{ji}$. Аналогично,

$$\varphi(0, 0, v_i\alpha, 0) = \varphi(0, 0, \alpha^{\theta_i}v_i, 0) = \varphi(\alpha^{\theta_i}, 0, 0, 0)\varphi(0, 0, v_i, 0) =$$
$$\left(0, 0, \sum_{j=1}^{s_2}(\alpha^{\theta_i})^\rho r_{ji}v'_j, \sum_{j=1}^{s_3}(\alpha^{\theta_i})^\rho s_{ji}w'_j\right),$$
$$\varphi(0, 0, v_i\alpha, 0) = \varphi(0, 0, v_i, 0)\varphi(\alpha, 0, 0, 0) = \left(0, 0, \sum_{j=1}^{s_2} r_{ji}v'_j\alpha^\rho, \sum_{j=1}^{s_3} s_{ji}w'_j\alpha^\rho\right) =$$
$$\left(0, 0, \sum_{j=1}^{s_2}(\alpha^\rho)^{\theta'_j}r_{ji}v'_j, \sum_{j=1}^{s_3}(\alpha^\rho)^{\tau'_j}s_{ji}w'_j\right)$$

и

$$\varphi(0, 0, 0, w_i\alpha) = \varphi(0, 0, 0, \alpha^{\tau_i}w_i) =$$
$$\varphi(\alpha^{\tau_i}, 0, 0, 0)\varphi(0, 0, 0, w_i) = \left(0, 0, 0, \sum_{j=1}^{s_3}(\alpha^{\tau_i})^\rho t_{ji}w'_j\right),$$
$$\varphi(0, 0, 0, w_i\alpha) = \varphi(0, 0, 0, w_i)\varphi(\alpha, 0, 0, 0) =$$
$$\left(0, 0, 0, \sum_{j=1}^{s_3} t_{ji}w'_j\alpha^\rho\right) = \left(0, 0, 0, \sum_{j=1}^{s_3}(\alpha^\rho)^{\tau'_j}t_{ji}w'_j\right).$$

Отсюда $(\alpha^{\theta_i})^\rho r_{ji} = (\alpha^\rho)^{\theta'_j}r_{ji}, (\alpha^{\theta_i})^\rho s_{ji} = (\alpha^\rho)^{\tau'_j}s_{ji}$ и $(\alpha^{\tau_i})^\rho t_{ji} = (\alpha^\rho)^{\tau'_j}t_{ji}$.

Далее,

$$\varphi(0,u_i,0,0)\cdot\varphi(0,u_j,0,0)=$$

$$\left(0,\sum_{k=1}^{s_1}p_{ki}u'_k,\sum_{k=1}^{s_2}q_{ki}v'_k,\sum_{k=1}^{s_3}n_{ki}w'_k\right)\cdot\left(0,\sum_{k=1}^{s_1}p_{kj}u'_k,\sum_{k=1}^{s_2}q_{kj}v'_k,\sum_{k=1}^{s_3}n_{kj}w'_k\right)=$$

$$\left(0,0,\sum_{k=1}^{s_2}\left(\sum_{\nu,\mu=1}^{s_1}p_{\nu i}p_{\mu j}^{\sigma'_\nu}a'^k_{\nu\mu}\right)v'_k,\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu,\mu=1}^{s_1}p_{\nu i}p_{\mu j}^{\sigma'_\nu}b'^k_{\nu\mu}+\sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2}\left(p_{\nu i}q_{\mu j}^{\sigma'_\nu}c'^k_{\nu\mu}+q_{\mu i}p_{\nu j}^{\theta'_\mu}d'_{\nu\mu}\right)\right)w'_k\right).$$

С другой стороны,

$$\varphi((0,u_i,0,0)\cdot(0,u_j,0,0))=\varphi\left(0,0,\sum_{\nu=1}^{s_2}a_{ij}^\nu v_\nu,\sum_{\nu=1}^{s_3}b_{ij}^\nu w_\nu\right)=$$

$$\left(0,0,\sum_{\nu=1}^{s_2}\varphi\left(a_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=1}^{s_2}r_{k\nu}v'_k\right),\right.$$

$$\left.\sum_{\nu=1}^{s_2}\varphi\left(a_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=1}^{s_3}s_{k\nu}w'_k\right)+\sum_{\nu=1}^{s_3}\varphi\left(b_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=1}^{s_3}t_{k\nu}w'_k\right)\right)=$$

$$\left(0,0,\sum_{k=1}^{s_2}\sum_{\nu=1}^{s_2}\left(a_{ij}^\nu\right)^\rho r_{k\nu}v'_k,\sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_2}\left(a_{ij}^\nu\right)^\rho s_{k\nu}+\sum_{\nu=1}^{s_3}\left(b_{ij}^\nu\right)^\rho t_{k\nu}\right)w'_k\right).$$

Следовательно,

$$P^T\cdot[A'_k,P]_{(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_{s_1})}=\sum_{i=1}^{s_2}r_{ki}A_i^\rho,$$

$$P^T\cdot[B'_k,P]_{(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_{s_1})}+P^T\cdot[C'_k,Q]_{(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_{s_1})}+Q^T\cdot[D'^T_k,P]_{(\theta'_1,\ldots,\theta'_{s_2})}=$$

$$=\sum_{i=1}^{s_2}s_{ki}A_i^\rho+\sum_{i=1}^{s_3}t_{ki}B_i^\rho.$$

Далее,

$$\varphi(0,u_i,0,0)\cdot\varphi(0,0,v_j,0)=$$

$$\left(0,\sum_{k=1}^{s_1}p_{ki}u'_k,\sum_{k=1}^{s_2}q_{ki}v'_k,\sum_{k=1}^{s_3}n_{ki}w'_k\right)\cdot\left(0,0,\sum_{k=1}^{s_2}r_{kj}v'_k,\sum_{k=1}^{s_3}s_{kj}w'_k\right)=$$

$$\left(0,0,0,\sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2}p_{\nu i}r_{\mu j}^{\sigma'_\nu}c'^k_{\nu\mu}\right)w'_k\right)$$

и

$$\varphi((0,u_i,0,0)\cdot(0,0,v_j,0))=\varphi\left(0,0,0,\sum_{\nu=1}^{s_3}c_{ij}^\nu w_\nu\right)=$$

$$\left(0,0,0,\sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_3}\left(c_{ij}^\nu\right)^\rho t_{k\nu}\right)w'_k\right).$$

Следовательно,

$$P^T\cdot[C'_k,R]_{(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_{s_1})}=\sum_{i=1}^{s_3}t_{ki}C_i^\rho.$$

Аналогично,

$$\varphi(0,0,v_j,0)\cdot\varphi(0,u_i,0,0)=$$

$$\left(0,0,\sum_{k=1}^{s_2} r_{kj}v'_k,\sum_{k=1}^{s_3} s_{kj}w'_k\right)\cdot\left(0,\sum_{k=1}^{s_1} p_{ki}u'_k,\sum_{k=1}^{s_2} q_{ki}v'_k,\sum_{k=1}^{s_3} n_{ki}w'_k\right)=$$
$$\left(0,0,0,\sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2} r_{\mu j}p_{\nu i}^{\theta'}d'^{k}_{\nu\mu}\right)w'_k\right)$$

и

$$\varphi((0,0,v_j,0)\cdot(0,u_i,0,0))=\varphi\left(0,0,0,\sum_{\nu=1}^{s_3} d_{ij}^{\nu}w_\nu\right)=$$
$$\left(0,0,0,\sum_{\nu=1}^{s_3}\varphi\left(d_{ij}^{\nu}\right)\left(\sum_{k=1}^{s_3} t_{k\nu}w'_k\right)\right)=\left(0,0,0,\sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_3}\left(d_{ij}^{\nu}\right)^{\rho}t_{k\nu}\right)w'_k\right).$$

Следовательно,

$$R^T\cdot[D'^T_k,P]_{(\theta'_1,\dots,\theta'_{s_2})}=\sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}\left(D_i^T\right)^{\rho},\quad k=\overline{1,s_3}.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть существуют невырожденные матрицы P,R,T,Q,S и $\rho\in Aut(F)$ (из условия теоремы), удовлетворяющие следующим равенствам:

$$P^T\cdot[A'_k,P]_{(\sigma'_1,\dots,\sigma'_{s_1})}=\sum_{i=1}^{s_2} r_{ki}A_i^{\rho},\quad k=\overline{1,s_2};$$

$$P^T\cdot[B'_k,P]_{(\sigma'_1,\dots,\sigma'_{s_1})}+P^T\cdot[C'_k,Q]_{(\sigma'_1,\dots,\sigma'_{s_1})}+Q^T\cdot[D'^T_k,P]_{(\theta'_1,\dots,\theta'_{s_2})}=$$
$$=\sum_{i=1}^{s_2} s_{ki}A_i^{\rho}+\sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}B_i^{\rho},\quad k=\overline{1,s_3};$$

$$P^T\cdot[C'_k,R]_{(\sigma'_1,\dots,\sigma'_{s_1})}=\sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}C_i^{\rho};\ R^T\cdot[D'^T_k,P]_{(\theta'_1,\dots,\theta'_{s_2})}=\sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}(D_i^T)^{\rho},\ k=\overline{1,s_3}$$

и $\sigma_i=\sigma'_j$, если $p_{ji}\neq 0$, $\theta_i=\theta'_j$, если $r_{ji}\neq 0$, $\tau_i=\tau'_j$, если $t_{ji}\neq 0$, $\sigma_i=\theta'_j$, если $q_{ji}\neq 0$, $\theta_i=\tau'_j$, если $s_{ji}\neq 0$.

Рассмотрим отображение $\varphi: R\to R'$, определяемое по правилу

$$\varphi\left(\alpha_0,\sum_{k=1}^{s_1}\alpha_k u_k,\sum_{k=1}^{s_2}\beta_k v_k,\sum_{k=1}^{s_3}\gamma_k w_k\right)=$$
$$\left(\alpha_0^{\rho},\sum_{k=1}^{s_1}\alpha_k^{\rho}\varphi(u_k),\sum_{k=1}^{s_2}\beta_k^{\rho}\varphi(v_k),\sum_{k=1}^{s_3}\gamma_k^{\rho}\varphi(w_k)\right);$$

$$\varphi(0,u_i,0,0)=\left(0,\sum_{j=1}^{s_1} p_{ji}u'_j,\sum_{j=1}^{s_2} q_{ji}v'_j,0\right),\ i=\overline{1,s_1};$$

$$\varphi(0,0,v_i,0)=\left(0,0,\sum_{j=1}^{s_2} r_{ji}v'_j,\sum_{j=1}^{s_3} s_{ji}w'_j\right),\ i=\overline{1,s_2};$$

$$\varphi(0,0,0,w_i)=\left(0,0,0,\sum_{j=1}^{s_3} t_{ji}w'_j\right),\ i=\overline{1,s_3}.$$

Легко проверить, что φ является изоморфизмом кольца $R(A,B,C,D,\sigma_i,\theta_j,\tau_k)$ на кольцо $R(A',B',C',D',\sigma'_i,\theta'_j,\tau'_k)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $R(A,B,C,D,\sigma_i,\theta_j,\tau_k)$ *и* $R(A',B',C',D',\sigma'_i,\theta'_j,\tau'_k)$ *— кольца конструкции A, центр которых содержит поле* $F = R/J(R)$.

$$R(A,B,C,D) \cong R(A',B',C',D')$$

тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{s_1\times s_1}$, $R = (r_{ij})_{s_2\times s_2}$, $T = (t_{ij})_{s_3\times s_3}$, *некоторые матрицы* $Q = (q_{ij})_{s_2\times s_1}$, $S = (s_{ij})_{s_3\times s_2}$ *и автоморфизм* ρ *поля* F *такие, что*

$$A'_k = \sum_{i=1}^{s_2} rr_{ki} P^T \cdot A_i^\rho \cdot P, \quad k = \overline{1,s_2};$$

$$B'_k = P^T \cdot \left(\sum_{i=1}^{s_2} s_{ki} A_i^\rho + \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}\left(B_i^\rho - C_i^\rho \cdot R \cdot Q - (D_i^\rho \cdot R \cdot Q)^T\right)\right) \cdot P, \quad k = \overline{1,s_3};$$

$$C'_k = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki} P^T \cdot C_i^\rho \cdot R, \quad k = \overline{1,s_3};$$

$$D'_k = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki} P^T \cdot D_i^\rho \cdot R, \quad k = \overline{1,s_3},$$

где $R^{-1} = (rr_{ij})_{s_2\times s_2}$.

Доказательство. Так как поле F содержится в центре каждого из колец, то все автоморфизмы $\sigma_i, \sigma'_i, \theta_j, \theta'_j, \tau_k, \tau'_k$, $i = \overline{1,s_1}, j = \overline{1,s_2}, k = \overline{1,s_3}$ являются тождественными. Отсюда, следуя ранее введенным обозначениям, получаем $[A,B]_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)} = AB$. Далее, выражаем из равенств (1)-(4) матрицы A'_k, B'_k, C'_k, D'_k и получаем искомые соотношения. Следствие доказано.

4. Классификация конечных локальных колец порядка p^6 конструкции A

В данной части работы мы найдем различные (с точностью до изоморфизма) типы колец в некоторых частных случаях. Рассмотрим последовательность $R = J^0 \supset J \supset J^2 \supset J^3 \supset \dots$. Если s_i является размерностью J^i/J^{i+1} над $R/J = GF(p^r)$, то $r\sum\limits_0^\infty s_i = n$, где $|R| = p^n$. Таким образом, если $|R| = p^6$, то необходимо последовательно рассмотреть следующие случаи:

(1) $s_1 = 3,\ s_2 = 1,\ s_3 = 1$ и $F = GF(p)$;
(2) $s_1 = 2,\ s_2 = 2,\ s_3 = 1$ и $F = GF(p)$;
(3) $s_1 = 2,\ s_2 = 1,\ s_3 = 2$ и $F = GF(p)$.

При этом, сразу заметим, что последний случай невозможен, так как не существует ассоциативных колец конструкции A с данными инвариантами.

4.1. Случай, когда $\dim_F J/J^2 = 3,\ \dim_F J^2/J^3 = 1,\ \dim_F J^3 = 1$

Пусть $F = GF(p^r)$. Рассмотрим множество X, состоящее из четверок матриц (A,B,C,D) таких, что:

(1) C и D — ненулевые матрицы размерности 3×1 над полем F, $A \in GL_3(F)$, $B \in M_3(F)$,
(2) для любых чисел $\alpha,\beta,\gamma \in \{1,2,3\}$ справедливо равенство $a_{\alpha\beta}d_{\gamma 1} = a_{\beta\gamma}c_{\alpha 1}$.

Определим на множестве X отношение эквивалентости " $\sim$ " следующим образом:

$$\Pi = (A, B, C, D) \sim \Pi' = (A', B', C', D'),$$

если существуют невырожденные матрицы

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} r_{11} \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} t_{11} \end{pmatrix}$$

и некоторые матрицы $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \end{pmatrix},\ S = (s_{11})$, такие, что

$$A' = r_{11}^{-1} \cdot P^T \cdot A \cdot P; \tag{1}$$

$$B' = P^T \cdot \big(s_{11} \cdot A + t_{11} \cdot B - r_{11} \cdot t_{11} \cdot \big(C \cdot Q + (D \cdot Q)^T\big)\big) \cdot P; \tag{2}$$

$$C' = r_{11} \cdot t_{11} \cdot P^T \cdot C; \tag{3}$$

$$D' = r_{11} \cdot t_{11} \cdot P^T \cdot D. \tag{4}$$

Пусть $(A, B, C, D),\ (A, B', C, D)$ — некоторые фиксированные элементы множества X. На множестве $M_2(F)$ определим с помощью матриц A, C, D вспомогательное отношение эквивалентности по правилу: $B \sim B'$, если $(A, B, C, D) \sim (A, B', C, D)$.

Наша цель — перечислить представителей всех классов эквивалентности, определенной на четверках матриц (A, B, C, D). Как будет показано в дальнейшем, эти сведения помогут нам классифицировать локальные кольца с определенными выше условиями.

Рассмотрим четверку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix} \right],$$

где $a_{i,j}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in F,\ \Pi \in X$.

Заметим, что

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d'_{11} \\ d'_{21} \\ d'_{31} \end{pmatrix} \right],$$

где $a'_{i,j}, b'_{ij}, c'_{ij}, d'_{ij} \in F$. Действительно, если $c_{11} \neq 0$, то эквивалентность осуществляется матрицами $P = \frac{1}{c_{11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_{21} & 1 & 0 \\ -c_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $T = R = E,\ Q = 0,\ S = 0$. Если $c_{21} \neq 0$, то $P = \frac{1}{c_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -_{11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c_{31} & 1 \end{pmatrix}$ и $T = R = E,\ Q = 0,\ S = 0$. Наконец, если $c_{31} \neq 0$, то $P = \frac{1}{c_{31}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -_{11} \\ 0 & 1 & c_{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $T = R = E,\ Q = 0,\ S = 0$.

Далее, для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$ справедливо равенство $a'_{\alpha\beta} d'_{\gamma 1} = a'_{\beta\gamma} c'_{\alpha 1}$, где $c'_{11} = 1,\ c'_{21} = 0,\ c'_{31} = 0$. Решая соответствующую систему уравнений, получаем, что $a'_{12} = a'_{13} = a'_{21} = a'_{22} = a'_{23} = a'_{31} = a'_{32} = a'_{33} = 0,\ d'_{21} = d'_{31} = 0,\ d'_{11} = 1$. То есть

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],\ \text{где } a'_{11}, b'_{ij} \in F.$$

Далее, пусть $P = E$ (E — единичная матрица), $r_{11} = a'_{11}$, $t_{11} = \dfrac{1}{a'_{11}}$, $S = 0$, $Q = 0$. Тогда

$$\Pi' \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b''_{11} & b''_{12} & b''_{13} \\ b''_{21} & b''_{22} & b''_{23} \\ b''_{31} & b''_{32} & b''_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

где b''_{ij} — некоторые элементы поля F.

Найдем дополнительные условия на матрицы P, R, T, при которых справедливо $(A, B, C, D) \sim (A, B', C, D)$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r_{11}^{-1} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= r_{11}^{-1} \begin{pmatrix} p_{11}^2 & p_{11}p_{12} & p_{11}p_{13} \\ p_{11}p_{12} & p_{12}^2 & p_{12}p_{13} \\ p_{11}p_{13} & p_{12}p_{13} & p_{13}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r_{11}t_{11} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r_{11}t_{11} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $p_{12} = p_{13} = 0$, $p_{11} \neq 0$ (т. к. иначе $det(P) = 0$) и $r_{11}t_{11}p_{11} = 1$, $r_{11}^{-1}p_{11}^2 = 1$. То есть

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \ t_{11} = \frac{1}{p_{11}^3}, \ r_{11} = p_{11}^2.$$

Далее, пусть $P = E, t_{11} = r_{11} = 1$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \end{pmatrix}$, $s_{11} = -b_{11}$. Тогда

$$B = \begin{pmatrix} b''_{11} & b''_{12} & b''_{13} \\ b''_{21} & b''_{22} & b''_{23} \\ b''_{31} & b''_{32} & b''_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} + b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} + b_{13} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы можем считать, что матрица B имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, где $b_{ij} \in F$. Найдем дополнительные условия на матрицы S и Q, при которых матрица B эквивалентна матрице B', с нулевой первой строкой, то есть сохраняет свой вид. Пусть $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \end{pmatrix}$, $S = (s_{11})$. Тогда

$$\begin{aligned} B'(1,1) &= (p_{11}^5 s_{11} - 2p_{11}^4 q_{11} + p_{11}p_{21}b_{21} - 2p_{21}q_{12}p_{11}^3 + p_{11}p_{31}b_{31} - \\ &\quad 2p_{31}q_{13}p_{11}^3 + p_{21}^2 b_{22} + p_{21}p_{31}b_{32} + p_{31}p_{21}b_{23} + p_{31}^2 b_{33})/p_{11}^3 = 0; \\ B'(1,2) &= -(p_{22}q_{12}p_{11}^3 - p_{21}p_{22}b_{22} - p_{22}p_{31}b_{32} + p_{32}q_{13}p_{11}^3 - p_{32}p_{21}b_{23} - \\ &\quad p_{31}p_{32}b_{33})/p_{11}^3 = 0; \\ B'(1,3) &= -(p_{23}q_{12}p_{11}^3 - p_{21}p_{23}b_{22} - p_{23}p_{31}b_{32} + p_{33}q_{13}p_{11}^3 - p_{33}p_{21}b_{23} - \\ &\quad p_{31}p_{33}b_{33})/p_{11}^3 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$q_{11} = q_{11}, \quad q_{12} = \frac{p_{21}b_{22} + p_{31}b_{32}}{p_{11}^3}, \quad q_{13} = \frac{p_{21}b_{23} + p_{31}b_{33}}{p_{11}^3},$$

$$s_{11} = \frac{-p_{11}p_{31}b_{31} + 2p_{11}^4 q_{11} - p_{11}p_{21}b_{21} + p_{21}^2 b_{22} + p_{21}p_{31}b_{32} + p_{31}p_{21}b_{23} + p_{31}^2 b_{33}}{p_{11}^5}.$$

Итак, элементы t_{11}, r_{11}, q_{12}, q_{13}, s_{11} единственным образом выражаются через элементы матрицы P, а q_{11} является произвольным элементом поля. В связи с этим всюду далее мы будем говорить, что матрица B эквивалентна матрице B' относительно матрицы P, учитывая при этом, что R, T, S, Q

определяются указанными выше равенствами. Итак, если $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, то равенство (2):

$$B' = P^T \cdot \big(s_{11} \cdot A + t_{11} \cdot B - r_{11} \cdot t_{11} \cdot \big(C \cdot Q + (D \cdot Q)^T\big)\big) \cdot P$$

равносильно системе

$$\begin{cases} B'(1,1) = 0; \quad B'(1,2) = 0; \quad B'(1,3) = 0; \\ B'(2,1) = (p_{11}p_{22}b_{21} - p_{22}p_{31}b_{32} + p_{11}p_{32}b_{31} - p_{32}p_{21}b_{23} + p_{21}p_{32}b_{32} + \\ p_{31}p_{22}b_{23})/p_{11}^3; \\ B'(2,2) = (p_{22}^2b_{22} + p_{22}p_{32}b_{32} + p_{32}p_{22}b_{23} + p_{32}^2b_{33})/p_{11}^3; \\ B'(2,3) = (p_{22}p_{23}b_{22} + p_{23}p_{32}b_{32} + p_{33}p_{22}b_{23} + p_{32}p_{33}b_{33})/p_{11}^3; \\ B'(3,1) = (p_{11}p_{23}b_{21} - p_{23}p_{31}b_{32} + p_{11}p_{33}b_{31} - p_{33}p_{21}b_{23} + p_{21}p_{33}b_{32} + \\ p_{31}p_{23}b_{23})/p_{11}^3; \\ B'(3,2) = (p_{22}p_{23}b_{22} + p_{22}p_{33}b_{32} + p_{32}p_{23}b_{23} + p_{32}p_{33}b_{33})/p_{11}^3; \\ B'(3,3) = (p_{23}^2b_{22} + p_{23}p_{33}b_{32} + p_{33}p_{23}b_{23} + p_{33}^2b_{33})/p_{11}^3. \end{cases}$$

Пусть $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{b_{31}}{b_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{31}^2b_{22} - b_{31}b_{32}b_{21} - b_{31}b_{23}b_{21} + b_{33}b_{21}^2}{b_{21}^2} & \dfrac{b_{32}b_{21} - b_{31}b_{22}}{b_{21}} \\ b_{21} & \dfrac{b_{23}b_{21} - b_{31}b_{22}}{b_{21}} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то есть матрица B эквивалентна матрице вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{21} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

На первом месте каждого пункта нижеприведенного списка указан вид матрицы B и условия на ее коэффициенты, на втором месте указана матрица B', эквивалентная матрице B, и наконец, на третьем расположена невырожденная матрица P, относительно которой осуществляется эквивалентность. Эквивалентность проверяется непосредственно, исходя из равенств вышеприведенной системы.

Случай, когда матрица B не является симметрической:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \dfrac{1}{b_{23}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{33}b_{32} & 0 \\ 0 & b_{33}(b_{23} - b_{32}) & b_{33}b_{23} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{b_{33}}{b_{23}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

где $b_{23} \neq 0,\ b_{32} \neq 0, b_{33} \neq 0$;

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim \dfrac{1}{b_{32}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{22}b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{22}(b_{23} - b_{32}) & b_{22}b_{32} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\dfrac{b_{22}}{b_{32}} & 0 \end{pmatrix}$,

где $b_{22} \neq 0,\ b_{23} \neq 0,\ b_{32} \neq 0$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & b_{23} & b_{22} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & b_{23} & b_{22} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{b_{31}}{b_{23}} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $b_{23} \neq 0$;

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{b_{31}}{b_{32}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $b_{32} \neq 0$;

6.a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim \dfrac{1}{b_{23}^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_{32}+b_{23})b_{23} & 0 \\ 0 & b_{23}^2 - b_{32}^2 & -b_{32}(b_{32}+b_{23}) \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{b_{23}} & -\dfrac{b_{32}}{b_{23}^2} \end{pmatrix}$, где $b_{23} \neq 0,\ b_{32} \neq -b_{23},\ det(P) = -\dfrac{b_{32}+b_{23}}{b_{23}^2} \neq 0$;

6.b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b_{23}} \end{pmatrix}$,

где $b_{23} \neq 0, b_{32} = -b_{23}$;

7.a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ -\dfrac{b_{22}b_{31}}{b_{23}} & 0 & \dfrac{b_{22}(b_{33}b_{22} - b_{32}b_{23})}{b_{23}^2} \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{b_{22}}{b_{23}} \end{pmatrix}$, где $b_{22} \neq 0, b_{23} \neq 0, b_{23} = b_{32}$;

7.b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{22}(b_{23} - b_{32})}{b_{23}} & \dfrac{b_{22}(b_{22}b_{33} - b_{32}b_{23})}{b_{23}^2} \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{b_{31}}{(b_{23} - b_{32})} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{b_{22}}{b_{23}} \end{pmatrix}$, где $b_{22} \neq 0, b_{23} \neq 0, b_{23} \neq b_{32}$;

8.a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{31}}{b_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b_{31}} \end{pmatrix}$,

где $b_{23} \neq 0, b_{31} \neq 0,\ b_{23} = b_{32}$;

8.b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim \dfrac{b_{23}(b_{32}+b_{23})}{(b_{23} - b_{32})^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{23} & 0 \\ 0 & b_{32} - b_{23} & b_{32} \end{pmatrix}$,

$P = \dfrac{1}{b_{23}} \begin{pmatrix} b_{32} - b_{23} & 0 & 0 \\ -b_{31} & b_{31} & b_{31} \\ 0 & \dfrac{b_{23}}{b_{31}} & -\dfrac{b_{32}}{b_{31}} \end{pmatrix}$, где $b_{23} \neq 0, b_{31} \neq 0,\ b_{32} \neq -b_{23}$ и $b_{32} \neq b_{23}$;

8.c) если $char\ F \neq 2$, то $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{b_{31}}{2b_{32}} & -\dfrac{b_{31}}{b_{32}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b_{31}} \end{pmatrix}$, где $b_{31} \neq 0,\ b_{32} \neq 0,\ b_{32} = -b_{23}$;

9.a) если $char\ F = 2$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{31}^2}{b_{33}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{31}^3}{b_{23}b_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{b_{31}^3}{b_{33}^2} \end{pmatrix},$$

где $b_{23} \neq 0,\ b_{33} \neq 0,\ b_{32} = b_{23}$;

9.b) если $char\ F \neq 2$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{31}^2}{b_{33}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{31}^3}{b_{23}b_{33}} & -\dfrac{b_{31}^3}{2b_{23}b_{33}} \\ 0 & 0 & \dfrac{b_{31}^3}{b_{33}^2} \end{pmatrix},$$

где $b_{23} \neq 0,\ b_{33} \neq 0,\ b_{32} = b_{23}$;

9.c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{32}^2}{(b_{23}-b_{32})^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{b_{32}}{b_{23}} & -\dfrac{b_{32}}{b_{23}} \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} b_{33} & 0 & 0 \\ \dfrac{b_{33}b_{31}}{(b_{23}-b_{32})} & \dfrac{b_{33}^2}{b_{23}} & \dfrac{b_{33}^2}{b_{23}} \\ 0 & \dfrac{b_{23}b_{33}}{b_{32}-b_{23}} & -b_{33} \end{pmatrix}$,

где $b_{23} \neq 0, b_{31} \neq 0,\ b_{32} \neq 0,\ b_{33} \neq 0,\ b_{32} \neq b_{23}$;

10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{33}(b_{33}b_{22}-b_{32}b_{23})}{b_{23}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{33}(b_{23}-b_{32})}{b_{23}} & b_{33} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{b_{33}}{b_{23}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

где $b_{23} \neq 0,\ b_{33} \neq 0,\ b_{23} \neq b_{32}$.

Случай, когда матрица B является симметрической:

11) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{33}(b_{33}b_{22}-b_{23}^2)}{b_{23}^2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{b_{33}}{b_{23}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

где $b_{23} \neq 0, b_{33} \neq 0, b_{23} = b_{32}$;

12) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{23}\\ 0 & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{b_{33}^2}{b_{23}^2}\end{pmatrix},\ P = \dfrac{b_{23}^2}{b_{33}^2}\begin{pmatrix}-b_{33} & 0 & 0\\ 0 & -b_{33} & 0\\ 0 & b_{23} & -b_{33}\end{pmatrix},$

где $b_{23} \neq 0, b_{33} \neq 0, b_{23} = b_{32}$;

13) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & b_{23}\\ 0 & b_{32} & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{b_{23}^2}{b_{22}^2}\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}b_{22} & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & -b_{23}\\ 0 & 0 & b_{22}\end{pmatrix},$

где $b_{22} \neq 0, b_{23} = b_{32}$;

14.a) если $char\ F \neq 2$, то

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{23}\\ 0 & b_{32} & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2b_{23}} & -\dfrac{1}{2b_{23}}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$

где $b_{23} \neq 0, b_{32} \neq 0, b_{23} = b_{32}$;

14.b) если $char\ F = 2$, то

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{23}\\ 0 & b_{32} & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b_{23}}\end{pmatrix},$

где $b_{23} \neq 0, b_{32} \neq 0, b_{23} = b_{32}$;

15) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}b_{22} & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, где $b_{22} \neq 0$;

16) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{33}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}b_{33} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & b_{33} & 0\end{pmatrix}$, где $b_{33} \neq 0$;

17) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & 0 & b_{33}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{b_{33}}{b_{22}}\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}b_{22} & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & 0 & b_{22}\end{pmatrix}$, где $b_{22} \neq 0$.

Рассмотрим матрицы вида $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$, где $b_{32} \neq 0$.

18) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \dfrac{b_{22}b_{33}}{b_{32}^2}\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}b_{22} & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{b_{22}^2}{b_{32}}\end{pmatrix},$

где $b_{22} \neq 0, b_{32} \neq 0$;

19) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-b_{33}}{b_{32}} & -\dfrac{b_{33}}{b_{32}}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, где $b_{32} \neq 0$.

Рассмотрим матрицы вида $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ b_{31} & 0 & b_{33}\end{pmatrix}$, где $b_{31} \neq 0$.

20) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{b_{22}b_{33}}{b_{31}^2} \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{b_{22}^2}{b_{31}} \end{pmatrix},$

где $b_{31} \neq 0, b_{22} \neq 0$;

21) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b_{31}} \end{pmatrix}$, где $b_{31} \neq 0$;

22) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{31}^2}{b_{33}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{b_{31}^3}{b_{33}^2} \end{pmatrix}$, где $b_{31} \neq 0, b_{33} \neq 0$.

Далее, рассмотрим матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b' \end{pmatrix},$$

где $b,\ b' \in F$. Если $B \sim B'$, то заметим, что равенство (2) равносильно системе

$$\begin{cases} p_{32}p_{11} = 0, \\ p_{22}^2 + p_{32}^2 b = p_{11}^3, \\ p_{22}p_{23} + p_{32}p_{33}b = 0, \\ p_{33}p_{11} = p_{11}^3, \\ p_{22}p_{23} + p_{32}p_{33}b = 0, \\ p_{23}^2 + p_{33}^2 b = b'p_{11}^3. \end{cases}$$

Так как $p_{11} \neq 0$, то из первого равенства получаем, что $p_{32} = 0$. Следовательно, $p_{22} \neq 0,\ p_{33} \neq 0$ (иначе $det(P) = 0$) и $p_{23} = 0$, $p_{22}^2 = p_{11}^3,\ p_{33}^2 b = b'p_{11}^3$. Отсюда $p_{33}^2 b = b'p_{22}^2$, то есть $b' = \left(\dfrac{p_{33}}{p_{22}}\right)^2 b$. Таким образом, если $B \sim B'$, то b и b' содержатся в некотором смежном классе группы F^* по подгруппе F^{*2}.

Далее, пусть b и b' принадлежат одному смежному классу F^*/F^{*2}, то есть $b' = d^2 b$, $d \neq 0$. Тогда $B \sim B'$ относительно матрицы $P = \begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^3 & 0 \\ 0 & 0 & d^4 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b' \end{pmatrix},$$

где $b,\ b' \in F$. Если $B \sim B'$, то заметим, что равенство (2) равносильно системе

$$\begin{cases} -p_{22}p_{31} + p_{32}p_{21} = 0, \\ p_{22}^2 + p_{22}p_{32} + p_{32}^2 b = p_{11}^3, \\ p_{22}p_{23} + p_{23}p_{32} + p_{32}p_{33}b = 0, \\ -p_{23}p_{31} + p_{33}p_{21} = 0, \\ p_{22}p_{23} + p_{33}p_{22} + p_{32}p_{33}b = p_{11}^3, \\ p_{23}^2 + p_{23}p_{33} + p_{33}^2 b = b'p_{11}^3. \end{cases}$$

Вычитая из пятого равенства третье, получаем $\Delta = p_{11}^3$, где $\Delta = p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32}$. Умножаем второе равенство на p_{33} и получаем $p_{33}p_{22}^2 + p_{33}p_{22}p_{32} + p_{33}p_{32}^2 b =$

Δp_{33}. Из третьего следует, что $p_{32}p_{33}b = -p_{22}p_{23} - p_{23}p_{32}$. Делая замену в предыдущем равенстве и упрощая результат, получаем цепочку равенств:

$$p_{33}p_{22}^2 + p_{33}p_{22}p_{32} + p_{32}(-p_{22}p_{23} - p_{23}p_{32}) = \Delta p_{33},$$
$$p_{33}p_{22}^2 + p_{33}p_{22}p_{32} - p_{32}p_{22}p_{23} - p_{23}p_{32}^2 = \Delta p_{33},$$
$$p_{22}(p_{33}p_{22} - p_{32}p_{23}) + p_{32}(p_{33}p_{22} - p_{23}p_{32}) = \Delta p_{33},$$
$$\Delta p_{22} + \Delta p_{32} = \Delta p_{33},$$
$$p_{22} + p_{32} = p_{33}.$$

Умножаем шестое равенство на p_{32} и получаем

$$p_{32}p_{23}^2 + p_{32}p_{23}p_{33} + p_{33}^2p_{32}b = p_{32}b'\Delta.$$

Выражаем $p_{32}p_{33}b$ из третьего равенства и делаем подстановку:

$$p_{32}p_{23}^2 + p_{32}p_{23}p_{33} + p_{33}(-p_{22}p_{23} - p_{23}p_{32}) = p_{32}b'\Delta,$$
$$p_{32}p_{23}^2 + p_{32}p_{23}p_{33} - p_{33}p_{22}p_{23} - p_{33}p_{23}p_{32} = p_{32}b'\Delta,$$
$$p_{23}(p_{32}p_{23} - p_{33}p_{22}) = p_{32}b'\Delta,$$
$$-\Delta p_{23} = p_{32}b'\Delta,$$
$$-p_{23} = p_{32}b'.$$

Далее, из второго равенства мы получаем, что

$$p_{32}^2b = \Delta - p_{22}^2 - p_{22}p_{32} = \Delta - p_{22}^2 + p_{22}^2 - p_{22}p_{33} = -p_{23}p_{32} = b'p_{32}p_{32} = b'p_{32}^2.$$

Следовательно, $p_{32}^2(b - b') = 0$. Если $p_{32} \neq 0$, то $b = b'$.

Если $p_{32} = 0$, то $p_{22} \neq 0$ и $p_{33} \neq 0$ (т.к. $det(P) \neq 0$). Тогда из третьего равенства получаем, что $p_{23} = 0$, а из равенств с номерами два, пять и два, шесть соответственно, что $p_{22}^2 = p_{33}p_{22}$ и $p_{33}^2b = b'p_{22}^2$. Так как $p_{22} \neq 0$, то $p_{22} = p_{33}$. Следовательно, $p_{33}^2b = b'p_{33}^2$. Так как $p_{33}^2 \neq 0$, то $b = b'$. Итак, если $B \sim B'$, то $b = b'$.

Рассмотрим матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b' \end{pmatrix},$$

где $b,\ b' \in F$. Если $B \sim B'$, то заметим, что равенство (2) равносильно системе

$$\begin{cases} p_{22}^2 + p_{32}^2b = p_{11}^3, \\ p_{23}^2 + p_{33}^2b = b'p_{11}^3, \\ p_{22}p_{23} + p_{32}p_{33}b = 0. \end{cases}$$

Перемножим правые и левые части первых двух равенств:

$$(p_{22}^2p_{23}^2 + p_{33}^2p_{22}^2b + p_{32}^2p_{23}^2b + p_{32}^2p_{33}^2b^2) = b'p_{11}^6.$$

Из третьего равенства получаем $p_{32}p_{33}b = -p_{22}p_{23}$, $p_{32}^2p_{33}^2b^2 = p_{22}^2p_{23}^2$ и $\Delta^2 = p_{22}^2p_{33}^2 - 2p_{22}p_{33}p_{23}p_{32} + p_{23}^2p_{32}^2$. Тогда

$$(p_{22}^2p_{23}^2 + p_{33}^2p_{22}^2b + p_{32}^2p_{23}^2b + p_{22}^2p_{23}^2) = b'p_{11}^6,$$
$$(2p_{22}^2p_{23}^2 + \Delta^2b + 2p_{33}p_{22}p_{23}p_{32}b) = b'p_{11}^6,$$
$$(2p_{22}^2p_{23}^2 + \Delta^2b - 2p_{22}^2p_{23}^2) = b'p_{11}^6,$$
$$\Delta^2b = b'p_{11}^6.$$

Следовательно, $b = \left(\dfrac{p_{11}^3}{\Delta}\right)^2 b'$. Итак, если $B \sim B'$, то b и b' содержатся в некотором смежном классе группы F^* по подгруппе F^{*2}.

Далее, пусть b и b' принадлежат одному смежному классу F^*/F^{*2}, то есть $b' = d^2b$, $d \neq 0$. Тогда $B \sim B'$ относительно матрицы $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

Несложно проверить, что следующие пары матрицы не являются эквивалентными. Для этого достаточно выписать систему, равносильную равенству (2) и заметить ее противоречивость исходя из условий $p_{11} \neq 0$ и $\Delta = p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} \neq 0$.

Независимо от четности или нечетности $charF$ имеем

$$\left[B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right],\ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}\right],$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}\right],\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'_{22} & 0 \\ 1 & 0 & b'_{33} \end{pmatrix}\right],$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right],\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}\right],$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'_{22} & 0 \\ 1 & 0 & b'_{33} \end{pmatrix}\right],\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right],$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'_{22} & 0 \\ 1 & 0 & b'_{33} \end{pmatrix}\right],$$

где $b,\ b'_{22},\ b'_{33} \in F$.

Если же $charF = 2$, то

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b' \end{pmatrix}\right],\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b' \end{pmatrix}\right],$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right],\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'_{22} & 0 \\ 1 & 0 & b'_{33} \end{pmatrix}\right],$$

где $b', b'_{22}, b'_{33} \in F$.

Итак, нами доказана теорема.

Теорема 3. *В следующем списке перечислены представители всех классов эквивалентности, определенной на четверках матриц (A, B, C, D):*
a) Если $F = GF(p^r), p \neq 2$, то:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *где $b \in F$;*

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

где b пробегает множество всех представителей смежных классов F^*/F^{*2};

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

(7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

где b пробегает множество всех представителей смежных классов F^*/F^{*2};

(9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

(10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

b) Если $F = GF(p^r), p = 2$, то к вышеуказанному списку необходимо добавить четверку матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. *Четверки матриц, представленные в предыдущей теореме, определяют все попарно неизоморфные конечные локальные кольца порядка p^6 и характеристики p с условиями:*

$$J(R)^4 = 0, \dim_F J(R)/J(R)^2 = 3,\ \dim_F J(R)^2/J(R)^3 = 1,\ \dim_F J(R)^3 = 1,$$

где $R/J(R) = F$.

Доказательство. В силу следствия из теоремы 2 проблема классификации таких колец (с точностью до изоморфизма) сводится к нахождению представителей классов эквивалентности, определенной ранее на четверках матриц (A, B, C, D). Осталось заметить, что так как $|R| = p^6$, и

$$r(1 + \dim_F J(R)/J(R)^2 + \dim_F J(R)^2/J(R)^3 + \dim_F J(R)^3) = 6$$

, то $r = 1$. То есть $F = Z_p$, и, следовательно, все автоморфизмы поля F являются тождественными. Теорема доказана.

4.1. Случай, когда $\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2/J^3 = 2,\ \dim_F J^3 = 1$

Рассмотрим множество X, состоящее из всех пятерок квадратных матриц (A_1, A_2, C, D, B) порядка 2 над полем F, обладающих следующими условиями:

(1) A_1 и A_2 линейно независимы,

(2) $C \neq 0$ и $D \neq 0$,
(3) для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$ справедливо равенство

$$a^1_{\alpha\beta} d_{\gamma 1} + a^2_{\alpha\beta} d_{\gamma 2} = a^1_{\beta\gamma} c_{\alpha 1} + a^2_{\beta\gamma} c_{\alpha 2}. \qquad (*)$$

Определим на множестве X отношение эквивалентости " $\sim$ " следующим образом:

$$\Pi = (A_1, A_2, C, D, B) \sim \Pi' = (A'_1, A'_2, C', D', B'),$$

если существуют невырожденные матрицы

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \ T = (t)$$

и некоторые матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \end{pmatrix}$$

над полем F, такие, что

$$\begin{array}{c} A'_1 = P^T \cdot (rr_{11} \cdot A_1 + rr_{12} \cdot A_2) \cdot P; \\ A'_2 = P^T \cdot (rr_{21} \cdot A_1 + rr_{22} \cdot A_2) \cdot P; \end{array} \qquad (1)$$

$$B' = P^T \cdot \Big(s_{11} \cdot A_1 + s_{12} \cdot A_2 + t \cdot \Big(B - C \cdot R \cdot Q - (D \cdot R \cdot Q)^T \Big) \Big) \cdot P; \qquad (2)$$

$$C' = t \cdot P^T \cdot C \cdot R; \qquad (3)$$

$$D' = t \cdot P^T \cdot D \cdot R, \qquad (4)$$

где $R^{-1} = \begin{pmatrix} rr_{11} & rr_{12} \\ rr_{21} & rr_{22} \end{pmatrix}$.

Пусть $(A_1, A_2, C, D, B), (A'_1, A'_2, C', D', B') \in F$. Определим следующие вспомогательные отношения:

(1) $(A_1, A_2) \sim (A'_1, A'_2)$, если существуют невырожденные матрицы P и R, такие, что выполнены равенства (1);
(2) $(A_1, A_2, C, D) \sim (A'_1, A'_2, C', D')$, если найдутся некоторые матрицы B, B', такие, что $(A_1, A_2, C, D, B) \sim (A'_1, A'_2, C', D', B')$.

Наша цель — перечислить представителей всех классов эквивалентности, определенной на пятерках матриц (A_1, A_2, C, D, B). Как будет показано в дальнейшем, эти сведения помогут нам классифицировать локальные кольца с определенными выше условиями. Последовательно рассмотрим два случая.

I. $char F \neq 2$.

Следуя определениям работы [9], назовем матрицы $M, N \in GL_2(F)$ стабилизаторами для пары (A_1, A_2), если

$$\begin{cases} M^T A_1 M = n_{11} A_1 + n_{12} A_2, \\ M^T A_2 M = n_{21} A_1 + n_{22} A_2. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения. Пусть δ — некоторый фиксированный элемент из F^*, такой, что $\delta \notin F^{*2}$, $\delta \neq 1$. Если $\varepsilon = 1$ (соотв. $\varepsilon = \delta$), то для каждого $\xi \in F$ (соотв. $\xi \in F^*$) найдем ненулевое решение (α, β) уравнения $\alpha^2 - \varepsilon\beta^2 = \xi$. Обозначим через Π_ε — множество найденных таким образом элементов из $F \times F$.

Рассмотрим эквивалентность, определенную выше на парах линейно независимых матриц. Одним из основных результатов работы [9] является следующая таблица, в которой содержится множество всех пар матриц (A_1, A_2) — представителей классов эквивалентности вместе с их стабилизаторами (для случая $char\ F \neq 2$).

Таблица 1.

	Представитель класса (A_1, A_2)	Стабилизирующие матрицы (M, N)
1	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a&0\\c&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2&0\\2ac&ad\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a&0\\c&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2&0\\0&ad\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a&\pm\delta c\\c&\pm a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2+\delta c^2&\pm 2\delta ac\\2ac&\pm(a^2+\delta c^2)\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a&\pm c\\c&\pm a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2+c^2&\pm 2ac\\2ac&\pm(a^2+c^2)\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}a&\pm\varepsilon c\\c&\pm a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2+\varepsilon c^2&0\\0&\pm(a^2+\varepsilon c^2)\end{pmatrix}$ где $\varepsilon \in \{1, \delta\}$
6	$\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2&0\\0&a^2\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix}$, где $\beta \in F^*$	$\begin{pmatrix}a&0\\c&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2&0\\2ac&ad\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}1&\alpha\\-\alpha&\varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix}$, где $\varepsilon \in \{1, \delta\}$, $(\alpha, \beta) \in \Pi_\varepsilon$	$\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2&0\\0&a^2\end{pmatrix}$, если $\alpha^2 - \varepsilon\beta^2 = 0$, иначе, стабилизаторами являются также матрицы $\mu\begin{pmatrix}\varepsilon\beta&-\varepsilon\alpha\\\alpha&-\varepsilon\beta\end{pmatrix}$, $\varepsilon\mu^2\begin{pmatrix}\alpha^2+\varepsilon\beta^2&-2\varepsilon\alpha\beta\\2\alpha\beta&-(\alpha^2+\varepsilon\beta^2)\end{pmatrix}$

Из-за несоответствия обозначений в данной работе и работе [9] в дальнейшем мы будем называть стабилизаторами матрицы P и R (см. равенство (1)). При этом $P = M^{-1}, R = N^{-1}$.

Далее, если пятерка $\Pi = (A_1, A_2, C, D, B)$ является представителем некоторого класса эквивалентности, то в силу вышеупомянутого результата пара матриц $(A_1,\ A_2)$ должна быть эквивалентна одной из перечисленных в таблице пар матриц. То есть наша задача очевидно сводится к разбиению на классы эквивалентности множеств $\{(A_1, A_2, C, D, B)\} = X_i \subset X$, где A_1, A_2 определяются i-й строкой таблицы.

Пусть (A_1, A_2, C, D, B) — элемент одного из множеств $X_i,\ i \in \{1, \dots, 8\}$. То есть

$$A_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}0&1\\s&0\end{pmatrix},\ \text{где } d \in \{0, 1, \delta\}, s \in \{1, -1\}.$$

Так как элементы матриц A_1, A_2, C, D удовлетворяют равенствам $(*)$, то мы получаем однородную систему

$$\begin{cases} c_{11} - d_{11} = 0, \quad c_{12} - d_{21} = 0, \\ c_{12}s - d_{12} = 0, \quad c_{11}d - d_{22} = 0, \\ c_{21} - d_{12}s = 0, \quad c_{22} - d_{22}s = 0, \\ c_{22}s - d_{11}d = 0, \quad (c_{21} - d_{21})d = 0. \end{cases}$$

Векторы $(1, 0, 0, sd, 1, 0, 0, d), (0, 1, 1, 0, 0, s, 1, 0)$ образуют фундаментальную систему решений данной системы. Следовательно, матрицы C и D имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} x & y \\ y & sdx \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} x & sy \\ y & dx \end{pmatrix},\ \text{где } x, y \in F.$$

Далее, отдельно рассмотрим каждое из множеств $X_i, i = \overline{1,8}$.

Случай 1: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В этом случае $C = \begin{pmatrix} x & y \\ y & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$, где $x, y \in F$. Во первых, найдем все неэквивалентные между собой четверки матриц (A_1, A_2, C, D). Заметим, что матрицы A_1, A_2 являются симметрическими и $C = D$. Следовательно, если $(A_1, A_2, C, D) \sim (A_1, A_2, C', D')$, то $C' = D'$.

Рассмотрим четверку матриц

$$\Delta = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Так как матрицы $P = \dfrac{1}{ad} \begin{pmatrix} d & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}, R = \dfrac{1}{a^3 d} \begin{pmatrix} ad & 0 \\ -2ac & a^2 \end{pmatrix}$, где $a, d, c \in F$, $ad \neq 0$ (см. таблицу) стабилизируют пару (A_1, A_2), то

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{t(dx - 3cy)}{a^3 d} & \dfrac{aty}{a^3 d} \\ \dfrac{aty}{a^3 d} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{t(dx - 3cy)}{a^3 d} & \dfrac{aty}{a^3 d} \\ \dfrac{aty}{a^3 d} & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Если $y = 0$, то полагая $P = R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ t = 1/x$ ($x \neq 0$, т.к. $C \neq 0$), получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.1}$$

Если $y \neq 0$ и $charF \neq 3$, то полагая $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{x}{3y} & 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2x}{3y} & 1 \end{pmatrix},\ t = \dfrac{1}{y}$, получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.2}$$

Если $y \neq 0,\ x = 0$ и $charF = 3$, то полагая $P = R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ t = \dfrac{1}{y}$, получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Если $y \neq 0,\ x \neq 0$ и $charF = 3$, то полагая $P = R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{x}{y} \end{pmatrix},\ t = \dfrac{1}{x}$, получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.3}$$

Несложно проверить, что эти четверки матриц попарно неэквивалентны. Далее, рассмотрим отдельно каждый подслучай.

Случай 1.1: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Всюду далее в работе будем называть матрицы P, R и T стабилизаторами четверки матриц (A_1, A_2, C, D), если

$$A_1' = P^T \left(rr_{11}A_1 + rr_{12}A_2\right) P,\ A_2' = P^T \left(rr_{21}A_1 + rr_{22}A_2\right),$$
$$C' = tP^T CR,\ D' = tP^T DR,$$

где $R^{-1} = \begin{pmatrix} rr_{11} & rr_{12} \\ rr_{21} & rr_{22} \end{pmatrix}$. То есть выполнены равенства (1), (3), (4).

Заметим, что матрицы $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -cad & d \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -2a^2cd & ad \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} \end{pmatrix}$, $a, c, d \in F, ad \neq 0$ стабилизируют четверку (1.1). Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right],\ b_{ij} \in F.$$

Пусть $Q = 0$, $S = \frac{1}{a^3}\left(c^2d^2b_{22} + cdb_{21} - b_{11} - cdb_{12},\ cdb_{22} - b_{12}\right)$. Тогда

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{d(b_{21} - b_{12})}{a^2} & \frac{d^2b_{22}}{a^3} \end{pmatrix} \right].$$

Если $b_{12} = b_{21}$ и $b_{22} = 0$, то

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \qquad (1.1.1)$$

Если $b_{12} = b_{21}$ и $b_{22} \neq 0$, то полагая $a = b_{22}, d = b_{22}, c = 0$, имеем

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]. \qquad (1.1.2)$$

Если $b_{12} \neq b_{21}$ и $b_{22} \neq 0$, то полагая $a = \frac{(b_{21} - b_{12})^2}{b_{22}}$, $d = \frac{a^2}{b_{21} - b_{12}}, c = 0$, имеем

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]. \qquad (1.1.3)$$

Если $b_{12} \neq b_{21}$ и $b_{22} = 0$, то полагая $a = 1,\ d = \frac{1}{b_{21} - b_{12}}, c = 0$, имеем

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \qquad (1.1.4)$$

Несложно проверить, что эти пятерки матриц попарно неэквивалентны.

Случай 1.2: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В данной ситуации возможны два подслучая.

а) Пусть $charF \neq 3$.

Заметим, что матрицы $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2d} \end{pmatrix}$, $a, d \in F$, $ad \neq 0$, стабилизируют четверку (1.2). Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right],\ b_{ij} \in F.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{b_{22}}{2a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S = -\frac{1}{a^2d}\left(b_{11},\ b_{12}\right).$$

Тогда, в силу равенства (2),

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{b_{21}-b_{12}}{a} & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Если $b_{12} = b_{21}$, то

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.2.1}$$

Если $b_{12} \neq b_{21}$, то полагая $a = b_{21} - b_{12}, d = 1$ (матрицы P, R и T определяются через a и d), имеем

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.2.2}$$

Несложно проверить, что эти пятерки матриц (1.2.1), (1.2.2) неэквивалентны.

b) Пусть $char F = 3$.

В этом случае стабилизаторами четверки матриц (A_1, A_2, C, D) являются матрицы

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -cad & d \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -2a^2cd & ad \end{pmatrix}, \ T = \left(\frac{1}{a^2 d} \right), \ a, d \in F, \ ad \neq 0.$$

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right], \ b_{ij} \in F.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b_{22}}{2a^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S = \frac{1}{da^2} \left(cd(b_{21} - b_{12}) - b_{11}, \quad -(cdb_{22} + b_{12}) \right).$$

Тогда, в силу равенства (2), имеем

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{b_{21}-b_{12}}{a} & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Если $b_{12} = b_{21}$, то Π' совпадает с четверкой матриц (1.2.1). Если же $b_{12} \neq b_{21}$, то полагая $a = b_{21} - b_{12}, d = 1, c = 0$ (матрицы P, Q и T определяются через a, d, c), мы получаем пятерку матриц (1.2.2).

Случай 1.3: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

В этом случае $char F = 3$. Стабилизаторами четверки (A_1, A_2, C, D) являются матрицы $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -ca^2 & a \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -2ca^3 & a^2 \end{pmatrix}, \ T = \left(\dfrac{1}{a^3} \right), \ a, c \in F, \ a \neq 0.$

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right], \ b_{ij} \in F.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b_{22}}{2a^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S = \frac{1}{2a^3} \left(2ca(b_{21} - b_{12}) - 2b_{11}, \quad b_{22}(1 - 2ac) - 2b_{12} \right).$$

Тогда, в силу равенства (2), имеем

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ \dfrac{b_{21}-b_{12}}{a} & 0\end{pmatrix}\right].$$

Если $b_{12} = b_{21}$, то

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]. \tag{1.3.1}$$

Если же $b_{12} \neq b_{21}$, то полагая $a = b_{21} - b_{12}, d = 1, c = 0$ (матрицы P, Q и T определяются через a, d, c), мы получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]. \tag{1.3.2}$$

Случай 2: $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

В этом случае $C = \begin{pmatrix}x & y\\ y & 0\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}x & -y\\ y & 0\end{pmatrix}$, где $x, y \in F$.

Рассмотрим четверку матриц

$$\Delta = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x & y\\ y & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x & -y\\ y & 0\end{pmatrix}\right].$$

Так как матрицы $P = \dfrac{1}{a^2d}\begin{pmatrix}d & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}, R = \dfrac{1}{ad}\begin{pmatrix}d & 0\\ -c & a\end{pmatrix}$, где $a, b, c \in F, ad \neq 0$ (см. таблицу) стабилизируют пару (A_1, A_2), то

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{a^3d}\begin{pmatrix}t(dx-cy) & aty\\ aty & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{a^3d}\begin{pmatrix}t(dx-cy) & -aty\\ aty & 0\end{pmatrix}\right].$$

Если $y = 0$, то полагая $P = R = E$ и $t = \dfrac{1}{x}$, получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]. \tag{2.1}$$

Если $y \neq 0$, то полагая $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{x}{y} & 1\end{pmatrix}$, $R = E$ и $t = \dfrac{1}{y}$, получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]. \tag{2.2}$$

Несложно проверить, что эти четверки матриц попарно неэквивалентны. Далее, рассмотрим отдельно каждый подслучай.

Случай 2.1: $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Заметим, что матрицы $P = \begin{pmatrix}a & 0\\ -cad & d\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & ad\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{a^3}\end{pmatrix}$, $a, d, c \in F$, $ad \neq 0$, стабилизируют четверку (2.1). Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right], \ b_{ij} \in F.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b_{12} - 2cdb_{22} + b_{21}}{2a^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S = \frac{1}{2a^3}\left(-2b_{11} + 2c^2d^2b_{22}, \ b_{21} - b_{12}\right).$$

Тогда, в силу равенства (2),

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{d^2b_{22}}{a^3} \end{pmatrix}\right].$$

Если $b_{22} = 0$, то

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]. \tag{2.1.1}$$

Если $b_{22} \neq 0$, то полагая $a = b_{22}, d = b_{22}, c = 0$, имеем

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]. \tag{2.1.2}$$

Несложно проверить, что эти пятерки матриц попарно неэквивалентны.

Случай 2.2: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Заметим, что матрицы $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix}, \ T = \left(\dfrac{1}{a^2d}\right)$, $a, d \in F$, $ad \neq 0$ стабилизируют четверку (2.2). Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right], \ b_{ij} \in F.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{12} + b_{21}}{2a^2} & \dfrac{b_{22}}{2a^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S = \frac{1}{2a^2d}\left(-2b_{11}, \ b_{21} - b_{12}\right), \ P = R = E.$$

Тогда, в силу равенства (2),

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]. \tag{2.2.1}$$

Случай 3: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

В этом случае $C = \begin{pmatrix} x & y \\ y & \delta x \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & \delta x \end{pmatrix}$, где $x, y \in F$.

Стабилизаторами матриц A_1, A_2 являются

$$P = \frac{1}{a^2 - \delta c^2}\begin{pmatrix} a & -\delta c \\ \mp c & \pm a \end{pmatrix}, \ R = \frac{1}{(a^2 - \delta c^2)^2}\begin{pmatrix} a^2 + \delta c^2 & -2\delta ac \\ \mp 2ac & \pm(a^2 + \delta c^2) \end{pmatrix},$$

где $a, c \in F, a^2 - \delta c^2 \neq 0$.

Далее, пусть z — некоторый ненулевой элемент поля F. Рассмотрим четверку уравнений

$$z(1 + 3\delta x^2) - x\delta(3 + \delta x^2) = 0,$$
$$(1 + 3\delta x^2) - xz(3 + \delta x^2) = 0,$$
$$z(1 + 3\delta x^2) + x\delta(3 + \delta x^2) = 0,$$

$$(1+3\delta x^2)+xz(3+\delta x^2)=0.$$

Заметим, что при любом значении параметра z, если хотя бы одно из уравнений имеет решение (в поле F), то и оставшиеся уравнения также имеют решения. Действительно,

$$\forall z\in F\left(\exists x_1\in F: z(1+3\delta x_1^2)-x_1\delta(3+\delta x_1^2)=0\Leftrightarrow\right.$$
$$\left.\Leftrightarrow\exists x_3\in F: z(1+3\delta x_3^2)+x_3\delta(3+\delta x_3^2)=0\right),$$

так как можно полагать $x_3=-x_1$ и $x_1=-x_3$. Аналогично,

$$\forall z\in F\left(\exists x_2\in F: (1+3\delta x_2^2)-x_2z(3+\delta x_2^2)=0\Leftrightarrow\right.$$
$$\left.\Leftrightarrow\exists x_4\in F: (1+3\delta x_4^2)+x_4z(3+\delta x_4^2)=0\right).$$

И наконец,

$$\forall z\in F\left(\exists x_1\in F: z(1+3\delta x_1^2)-x_1\delta(3+\delta x_1^2)=0\Leftrightarrow\right.$$
$$\left.\Leftrightarrow\exists x_2\in F: (1+3\delta x_2^2)-x_2z(3+\delta x_2^2)=0\right).$$

Так как, если $z(1+3\delta x_1^2)-x_1\delta(3+\delta x_1^2)=0$, для некоторого $x_1\in F$, то $(1+3\delta x_2^2)-x_2z(3+\delta x_2^2)=0$, при $x_2=\dfrac{1}{\delta x_1}$. И обратно, если $(1+3\delta x_2^2)-x_2z(3+\delta x_2^2)=0$ для некоторого $x_2\in F$, то $z(1+3\delta x_1^2)-x_1\delta(3+\delta x_1^2)=0$, при $x_1=\dfrac{1}{\delta x_2}$.

Пусть $M=\left\{z\in F^*\mid\forall x\in F\ z(1+3\delta x^2)-x\delta(3+\delta x^2)\neq0\right\}$. Заметим, что существуют конечные поля, для которых множество M не пусто. Например, $M=\{1,2,4,5,6,7,9,10\}$, если поле $F=Z_{11}$. Рассмотрим множество функций $\varphi^{\pm}_{a,c}:M\to F$,

$$\varphi^{\pm}_{a,c}(z)=\frac{\pm az(a^2+3\delta c^2)-c\delta(3a^2+\delta c^2)}{a(a^2+3\delta c^2)\mp cz(3a^2+\delta c^2)},$$

где $a=0,c=1$ или $a=1,c\in F$. При этом $\varphi^{\pm}_{0,1}(z)=\pm\dfrac{\delta}{z}$. Заметим, что для любого $z\in M,\varphi^{\pm}_{a,c}(z)\in M$. Действительно, для любых $x\in F$, $z\in M$

$$\varphi^{+}_{0,1}(z)(1+3\delta x^2)-x\delta(3+\delta x^2)=\frac{\delta((1+3\delta x^2)-xz(3+\delta x^2))}{z}\neq0,$$

$$\varphi^{-}_{0,1}(z)(1+3\delta x^2)-x\delta(3+\delta x^2)=\frac{-\delta((1+3\delta x^2)+xz(3+\delta x^2))}{z}\neq0,$$

$$\varphi^{+}_{1,c}(z)(1+3\delta x^2)-x\delta(3+\delta x^2)=\frac{za'(a'^2+3\delta c'^2)-\delta c'(3a'^2+\delta c'^2)}{a(a^2+3dc^2)-cz(3a^2+dc^2)},$$

где $a'=x\delta c+1,c'=c+x$. Если $a'=0$, то $c'=c-\dfrac{1}{\delta c}=\dfrac{\delta c^2-1}{\delta c}\neq0$ и, следовательно,

$$\varphi^{+}_{1,c}(z)(1+3\delta x^2)-x\delta(3+\delta x^2)=\frac{-\delta^2c'^3}{a(a^2+3dc^2)-cz(3a^2+dc^2)}\neq0.$$

Если $a'\neq0$, то

$$\varphi^{+}_{1,c}(z)(1+3\delta x^2)-x\delta(3+\delta x^2)=\frac{z(1+3\delta c'^2)-\delta c'(3+\delta c'^2)}{a'^{-3}(a(a^2+3dc^2)-cz(3a^2+dc^2))}\neq0,$$

так как $z\in M$. Аналогично проверяется, что $\varphi^{-}_{1,c}(z)(1+3\delta x^2)-x\delta(3+\delta x^2)\neq0$.

Далее, пусть $a_1,a_2\in\{0,1\}$, c_1,c_2 — соответствующие элементы поля F. Заметим, что $\varphi^{+}_{a_1,c_1}(\varphi^{\pm}_{a_2,c_2}(z))=\varphi^{\pm}_{a,c}(z)$, где $a=0,\ c=1$, если $c_1c_2\delta+a_1a_2=0$ и $a=1,c=\dfrac{a_1c_2+c_1a_2}{c_1c_2\delta+a_1a_2}$, если $c_1c_2\delta+a_1a_2\neq0$. Кроме того, $\varphi^{-}_{a_1,c_1}(\varphi^{\pm}_{a_2,c_2}(z))=\varphi^{\mp}_{a,c}(z)$, где $a=0,\ c=1$, если $c_1c_2\delta-a_1a_2=0$ и $a=1,c=\dfrac{a_1c_2-c_1a_2}{c_1c_2\delta-a_1a_2}$, если $c_1c_2\delta-a_1a_2\neq0$.

Пусть
$$K = \left\{\varphi^{\pm}_{a,c} \mid \varphi^{\pm}_{a,c} : M \to M, \right\},$$
где
$$\varphi^{\pm}_{a,c}(z) = \frac{\pm az(a^2+3\delta c^2) - c\delta(3a^2+\delta c^2)}{a(a^2+3\delta c^2) \mp cz(3a^2+\delta c^2)} \quad \text{и} \quad a=0, c=1 \text{ или } a=1, c\in F.$$
Докажем, что относительно бинарной операции $(\phi_1\circ\phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1,\phi_2 \in K)$ данное множество образует группу. Выполнимость аксиомы ассоциативности очевидна. Функция $\varphi^{+}_{1,0}$ является единицей группы, $\varphi^{+}_{1,0}(z) = z$. Наконец, пусть $\phi = \varphi^{\pm}_{a,c} \in K, a\in\{0,1\}, c\in F$. Тогда $\phi^{-1} = \varphi^{\pm}_{a',c'}$, где $a'=0, c'=1$, если $a=0, c=1$ и $a'=1, c'=\mp c$, если $a=1$.

Очевидно, что группа K действует на множестве M, то есть $\phi_1(\phi_2(z)) = (\phi_1\circ\phi_2)(z)$ и $\varphi^{+}_{1,0}(z) = z$ для всех $z\in M, \phi_1,\phi_2\in K$. Относительно этого действия множество M разбивается на непересекающиеся орбиты. Множество представителей орбит обозначим через $K\setminus M$.

Далее, рассмотрим четверку матриц
$$\Delta = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x&y\\y&\delta x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x&y\\y&\delta x\end{pmatrix}\right].$$
Если $x=0$, то полагая $P = \begin{pmatrix}0&1\\ \frac{1}{\delta}&0\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}0&\frac{1}{\delta}\\ \frac{1}{\delta}&0\end{pmatrix}$ и $t = \dfrac{\delta^2}{y}$, получаем
$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}\right]. \tag{3.1}$$
Если $x\neq 0$, то полагая $P=R=E$ и $t=\dfrac{1}{x}$ получаем, что $\Delta\sim[A_1,A_2,C',D']$, где $C'=D'=\begin{pmatrix}1&\frac{y}{x}\\ \frac{y}{x}&\delta\end{pmatrix}$.

Далее, рассмотрим четверки матриц
$$\Delta_1 = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&z\\z&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&z\\z&\delta\end{pmatrix}\right],\ z\in M,$$
$$\Delta_2 = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&z'\\z'&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&z'\\z'&\delta\end{pmatrix}\right],\ z'\in M.$$
Предположим, что z и z' принадлежат одной K-орбите. То есть существует такое $c\in F$, что
$$\varphi^{+}_{a,c}(z) = z' = \frac{z(1+3\delta c^2) - c\delta(3+\delta c^2)}{(1+3\delta c^2) - cz(3+\delta c^2)},$$
или
$$\varphi^{-}_{a,c}(z) = z' = \frac{-z(1+3\delta c^2) - c\delta(3+\delta c^2)}{(1+3\delta c^2) + cz(3+\delta c^2)},$$
или $\varphi^{+}_{0,1}(z) = \dfrac{\delta}{z}$, или $\varphi^{-}_{0,1}(z) = -\dfrac{\delta}{z}$. Тогда, полагая $t = \dfrac{(1-\delta c^2)^3}{(1+3\delta c^2)\mp cz(3+\delta c^2)}$,
$$P = \frac{1}{1-\delta c^2}\begin{pmatrix}1&-\delta c\\ \mp c&\pm 1\end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{(1-\delta c^2)^2}\begin{pmatrix}1+\delta c^2&-2\delta c\\ \mp 2c&\pm(1+\delta c^2)\end{pmatrix},$$

мы получаем $\Delta_1 \sim \Delta_2$. Обратно, если $\Delta_1 \sim \Delta_2$ относительно некоторых матриц P, R, T, то

$$\begin{cases} \dfrac{t(a(a^2+3\delta c^2) - cz(3a^2+\delta c^2))}{(a^2-\delta c^2)^3} = 1, \\ \dfrac{t(az(a^2+3\delta c^2) - c\delta(3a^2+\delta c^2))}{(a^2-\delta c^2)^3} = z'; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{t(a(a^2+3\delta c^2) + cz(3a^2+\delta c^2))}{(a^2-\delta c^2)^3} = 1, \\ \dfrac{t(-az(a^2+3\delta c^2) - c\delta(3a^2+\delta c^2))}{(a^2-\delta c^2)^3} = z'. \end{cases}$$

Следовательно, если $a \neq 0$, то

$$z' = \frac{z(1+3\delta c'^2) - c'\delta(3+\delta c'^2)}{(1+3\delta c'^2) - c'z(3+\delta c'^2)} \text{ или } z' = \frac{-z(1+3\delta c'^2) - c'\delta(3+\delta c'^2)}{(1+3\delta c'^2) + c'z(3+\delta c'^2)}, \text{ где } c' = \frac{c}{a},$$

и $z' = \dfrac{\delta}{z}$ или $z' = -\dfrac{\delta}{z}$, если $a = 0$. То есть $\varphi^+_{1,c'}(z) = z'$, или $\varphi^-_{1,c'}(z) = z'$, или $\varphi^+_{0,1}(z) = z'$, или $\varphi^-_{0,1}(z) = z'$, а значит, z и z' содержатся в одной K-орбите.

Итак, мы получаем четверки

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}\right], \ z \in K \backslash M. \tag{3.2}$$

Пусть $z \in F \setminus M$. Тогда четверка

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}\right]$$

эквивалентна четверке матриц (3.1).

Заметим, что четверки матриц (3.1) и (3.2) неэквивалентны в силу определения множества M.

Случай 3.1: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right], \ b_{ij} \in F.$$

Пусть $P = aE, R = a^2E, t = \dfrac{1}{a^3}$ и

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{db_{11} - b_{22}}{2da^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S = \left(-\frac{b_{22}}{da^3}, -\frac{b_{12}}{a^3}\right).$$

Тогда

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{b_{21} - b_{12}}{a} & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Если $b_{21} = b_{12}$, то

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]. \tag{3.1.1}$$

Иначе, полагая $a = b_{21} - b_{12}$ (матрицы P, R и T вышеопределены через a), получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{3.1.2}$$

Эти пятерки матриц очевидно не являются эквивалентными.

Случай 3.2: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}$, $z \in K \backslash M$.

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right], \ b_{ij} \in F, \ z \in K \backslash M.$$

Пусть $P = aE, R = a^2E, t = \dfrac{1}{a^3}$ и

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{22} - \delta b_{11}}{2za^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S = \left(-\frac{b_{11}}{a^3}, \ \frac{b_{22} - b_{11}\delta - 2zb_{12}}{2za^3} \right).$$

Тогда

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{b_{21} - b_{12}}{a} & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Если $b_{21} = b_{12}$, то

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{3.2.1}$$

Иначе, полагая $a = b_{21} - b_{12}$ (матрицы P, R и T вышеопределены через a), получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{3.2.2}$$

Эти пятерки матриц не являются эквивалентными.

Случай 4: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В этом случае $C = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in F$.

Стабилизаторами пары (A_1, A_2) являются матрицы

$$P = \frac{1}{a^2 - c^2} \begin{pmatrix} a & -c \\ \mp c & \pm a \end{pmatrix}, \ R = \frac{1}{(a^2 - c^2)^2} \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & -2ac \\ \mp 2ac & \pm(a^2 + c^2) \end{pmatrix},$$

где $a, c \in F, a^2 - c^2 \neq 0$.

Рассмотрим четверку матриц

$$\Delta = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \right].$$

Если $x = 0$, то полагая $P = R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $t = \dfrac{1}{y}$, получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]. \tag{4.1}$$

Если $x \neq 0$, то полагая $P = R = E$ и $t = \dfrac{1}{x}$, получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ \frac{y}{x} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ \frac{y}{x} & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Далее, рассмотрим четверку матриц

$$\Delta = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}\right], z \in F^*.$$

Если $z = 1$, то

$$\Delta = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]. \tag{4.2}$$

Если $z = -1$, то полагая $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $t = 1$, получаем четверку матриц (4.2).

Если $z \neq \pm 1$ и $\Delta \sim [A_1, A_2, C', D']$, то $C' = D'$ и

$$C'(1,1) = C'(2,2) = \frac{a(a^2+3c^2) \mp cz(3a^2+c^2)}{(a^2-c^2)^3},$$

$$C'(1,2) = C'(2,1) = \frac{\pm az(a^2+3c^2) - c(3a^2+c^2)}{(a^2-c^2)^3}.$$

Отсюда, заметим, что

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z' \\ z' & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z' \\ z' & 1 \end{pmatrix}\right], z' \in F, z' \neq \pm 1,$$

тогда и только тогда, когда $\left(\dfrac{a+c}{a-c}\right)^3 = \dfrac{1 \pm z}{1 \mp z} \cdot \dfrac{1-z'}{1+z'}$. То есть тогда и только тогда, когда

$$\frac{1+z}{1-z} \in F^{*3} \quad \text{и} \quad \frac{1-z'}{1+z'} \in F^{*3} \quad \text{либо} \quad \frac{1+z}{1-z} \notin F^{*3} \quad \text{и} \quad \frac{1-z'}{1+z'} \notin F^{*3}.$$

Если $\dfrac{1+z}{1-z} \in F^{*3}$, то Δ эквивалентна четвертке (3.1), так как $\dfrac{1-z'}{1+z'} = 1 \in F^{*3}$, при $z' = 0$. Если же $\dfrac{1+z}{1-z} \notin F^{*3}$, то

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z' \\ z' & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z' \\ z' & 1 \end{pmatrix}\right], \tag{4.3}$$

где $z' \in F$, $z \neq \pm 1$ и $\dfrac{1-z'}{1+z'} \notin F^{*3}$.

Несложно проверить, используя найденные ранее стабилизаторы для пары (A_1, A_2), что четверки матриц (4.1), (4.2), (4.3) попарно неэквивалентны.

Аналогично случаю 3 (достаточно в доказательстве полагать $\delta = 1$) мы получаем следующие попарно неэквивалентные четверки матриц

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right], \tag{4.1.1}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right], \tag{4.1.2}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right], \tag{4.3.1}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right],. \tag{4.3.2}$$

где z — один из элементов поля F с условием $\dfrac{1-z}{1+z} \notin F^{*3}, z \neq \pm 1$.

Отдельно рассмотрим случай, когда матрицы (A_1, A_2, C, D) имеют вид (4.2).

Случай 4.2: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right],\ b_{ij} \in F.$$

Пусть $P = aE, R = a^2E, t = \dfrac{1}{a^3}$ и

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{11} - b_{22}}{2a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S = \frac{1}{2a^3}\left(-2b_{22},\ b_{11} - 2b_{12} - b_{22}\right).$$

Тогда

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{b_{21} - b_{12}}{a} & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Если $b_{21} = b_{12}$, то

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{4.2.1}$$

Иначе, полагая $a = b_{21} - b_{12}$ (матрицы P, R и T вышеопределены через a), получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{4.2.2}$$

Эти пятерки матриц очевидно не являются эквивалентными.

Случай 5: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\}.$

В этом случае $C = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -\varepsilon x \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & \varepsilon x \end{pmatrix}$, где $x, y \in F$.

Стабилизаторами матриц A_1, A_2 являются

$$P = \frac{1}{a^2 + \varepsilon c^2} \begin{pmatrix} a & \varepsilon c \\ \mp c & \pm a \end{pmatrix},\ R = \frac{1}{a^2 + \varepsilon c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

где $a, c \in F, a^2 + \varepsilon c^2 \neq 0$.

Рассмотрим четверку матриц

$$\Delta = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & -\varepsilon x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & -y \\ y & \varepsilon x \end{pmatrix} \right].$$

Если $y^2 + \varepsilon x^2 \neq 0$, то, полагая $P = \dfrac{1}{y^2 + \varepsilon x^2} \begin{pmatrix} y & \varepsilon x \\ -x & y \end{pmatrix},\ R = \dfrac{1}{y^2 + \varepsilon x^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $t = y^2 + \varepsilon x^2$, получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{5.1}$$

Если $y^2+\varepsilon x^2=0$, то $x\neq 0, y\neq 0$ и $\left(\frac{y}{x}\right)^2=-\varepsilon$. Предположим, что $-\varepsilon\in F^{*2}$. В этом случае мы не получаем противоречия и $\frac{y}{x}=\sqrt{-\varepsilon}$. Пусть $P=R=E$ и $t=\frac{1}{x}$. Тогда

$$\Delta\sim\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&-\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&\varepsilon\end{pmatrix}\right]. \tag{5.2}$$

Если пятерка матриц (5.1) эквивалентна пятерке (5.2), то найдутся матрицы P,R (стабилизирующие пару (A_1,A_2)) и матрица $T=(t)$, такие, что

$$\begin{cases}\mp\dfrac{tc}{(a^2+\varepsilon c^2)^2}=1,\\ \pm\dfrac{ta}{(a^2+\varepsilon c^2)^2}=\sqrt{-\varepsilon}.\end{cases}$$

Отсюда получаем $\frac{1}{c}=-\frac{\sqrt{-\varepsilon}}{a}$. Следовательно, $a^2+\varepsilon c^2=0$. Противоречие.

Случай 5.1: $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\right],\ b_{ij}\in F.$$

Пусть $P=R=E, t=1$ и

$$Q=\frac{a^2}{2}\begin{pmatrix}b_{21}+b_{12}&b_{22}-b_{11}\\0&0\end{pmatrix},\ S=\frac{a^3}{2}\left(-2b_{11},\ b_{21}-b_{12}\right).$$

Тогда, в силу равенства (2),

$$\Pi\sim\Pi'=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]. \tag{5.1.1}$$

Случай 5.2: $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&-\varepsilon\end{pmatrix},$ $D=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&\varepsilon\end{pmatrix}.$

Заметим, что матрицы

$$P=\frac{1}{a^2+\varepsilon c^2}\begin{pmatrix}a&\varepsilon c\\-c&a\end{pmatrix},\ R=\frac{1}{a^2+\varepsilon c^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ T=\left((a+\sqrt{-\varepsilon}c)^2(a-\sqrt{-\varepsilon}c)\right),$$

где $a,d\in F, a^2+\varepsilon c^2\neq 0$ стабилизируют четверку (5.2). Рассмотрим пятерку матриц ($b_{ij}\in F$)

$$\Pi=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&-\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\right].$$

Если $-\varepsilon\sqrt{-\varepsilon}b_{11}+\varepsilon(b_{12}+b_{21})+\sqrt{-\varepsilon}b_{22}=0$, то полагая $P=R=E, t=1$ и

$$Q=\begin{pmatrix}\dfrac{b_{12}+b_{21}}{2\sqrt{-\varepsilon}}&0\\0&0\end{pmatrix},\ S=\left(\frac{b_{12}+b_{21}-\sqrt{-\varepsilon}b_{11}}{\sqrt{-\varepsilon}},\frac{b_{21}-b_{12}}{2}\right),$$

получаем

$$\Pi\sim\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&-\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]. \tag{5.2.1}$$

Если $-\varepsilon\sqrt{-\varepsilon}b_{11}+\varepsilon(b_{12}+b_{21})+\sqrt{-\varepsilon}b_{22}\neq 0$, то полагая

$$a=\frac{\sqrt{-\varepsilon}}{-\varepsilon\sqrt{-\varepsilon}b_{11}+\varepsilon(b_{12}+b_{21})+\sqrt{-\varepsilon}b_{22}},\ P=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0\\0&\frac{1}{a}\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2}&0\\0&\frac{1}{a^2}\end{pmatrix},t=a^3$$

и

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{a^2(b_{12}+b_{21})}{2\sqrt{-\varepsilon}}&0\\0&0\end{pmatrix},\ S=a^3\left(\frac{b_{12}+b_{21}-\sqrt{-\varepsilon}b_{11}}{\sqrt{-\varepsilon}},\frac{b_{21}-b_{12}}{2}\right),$$

получаем

$$\Pi\sim\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&-\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-\sqrt{-\varepsilon}\\\sqrt{-\varepsilon}&\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]. \tag{5.2.2}$$

Несложно проверить, учитывая найденные ранее стабилизаторы, что пятерки матриц (5.2.1) и (5.2.2) неэквивалентны.

Случай 6: $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Так как элементы матриц A_1,A_2,C,D удовлетворяют равенствам $(*)$, то мы получаем однородную систему

$$\begin{cases}c_{11}-d_{11}=0,\\c_{11}+c_{12}-d_{21}=0,\\-c_{11}+c_{12}-d_{11}-d_{12}=0,\\d_{21}+d_{22}=0,\\c_{21}+d_{11}-d_{12}=0,\\c_{21}+c_{22}+d_{21}-d_{22}=0,\\c_{22}-c_{21}.\end{cases}$$

Вектор $(1,1,-2,-2,1,-1,2,-2)$ образует фундаментальную систему решений данной системы. Следовательно, матрицы C и D имеют вид

$$C=\begin{pmatrix}x&x\\-2x&-2x\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x&-x\\2x&-2x\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим четверку матриц

$$\Delta=\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x&x\\-2x&-2x\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x&-x\\2x&-2x\end{pmatrix}\right].$$

Полагая $P=R=E$ и $t=\dfrac{1}{x}$, мы получаем

$$\Delta\sim\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\-2&-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\right]. \tag{6.1}$$

Далее заметим, что матрицы $P = \frac{1}{a}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $R = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $T = \big(a^3\big)$, $a \in F^*$ стабилизируют четверку (6.1). Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right], \; b_{ij} \in F.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -\dfrac{a^2b_{22}}{4}\end{pmatrix}, S = \left(-a^3b_{11}, \; -\frac{1}{4}a^3(-4b_{11} + 4b_{12} + b_{22})\right).$$

Тогда, в силу равенства (2),

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\dfrac{a}{2}(-4b_{11} + 2b_{12} + b_{22} - 2b_{21}) & 0\end{pmatrix}\right].$$

Если $-4b_{11} + 2b_{12} + b_{22} - 2b_{21} = 0$, то

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]. \qquad (6.1.1)$$

Если же $-4b_{11} + 2b_{12} + b_{22} - 2b_{21} \neq 0$, то полагая $a = -\dfrac{2}{-4b_{11} + 2b_{12} + b_{22} - 2b_{21}}$ (матрицы P, R и T определяются через a), получаем

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]. \qquad (6.1.2)$$

Учитывая вид стабилизаторов для четверки матриц (A_1, A_2, C, D), несложно проверить, что эти пятерки матриц попарно неэквивалентны.

Случай 7: $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ 1-\beta & 0\end{pmatrix}$, $\beta \in F^*$.

Так как элементы матриц A_1, A_2, C, D удовлетворяют равенствам $(*)$, то мы получаем однородную систему

$$\begin{cases} c_{11} - d_{11} = 0,\\ c_{11}(1+\beta) - d_{21} = 0,\\ c_{12}(1-\beta) - (1+\beta)d_{12} = 0,\\ (1+\beta)d_{22} = 0,\\ (\beta - 1)d_{12} + c_{21} = 0,\\ (-1+\beta)d_{22} + c_{22}(1+\beta) = 0,\\ c_{22}(1-\beta) = 0,\\ 0 = 0. \end{cases}$$

Если $\beta \neq -1$, то ранг матрицы системы равен 6. При этом ненулевой минор шестого порядка, полученный при выборе строк с номерами 1-6 и столбцов с номерами 1-4, 6, 8, равен $(1+\beta)^4$. Векторы

$$(1,0,0,0,1,0,0,0)\,, \; \big(0, 1+\beta, (-1+\beta)^2, 0, 0, 1-\beta, (1+\beta)^2, 0\big)$$

образуют фундаментальную систему решений системы. Если $\beta = -1$, то, заметив, что ненулевой минор максимального порядка получается при выборе 1-3, 5-7 строк и 1-4, 7-8 столбцов, получаем фундаментальную систему решений

$(1,0,0,0,1,0,0,0)$, $(0,0,2,0,0,1,0,0)$. В обоих случаях матрицы C и D имеют вид

$$C=\begin{pmatrix} x & (1+\beta)y \\ (1-\beta)^2y & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} x & (1-\beta)y \\ (1+\beta)^2y & 0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим четверку матриц Δ:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x & (1+\beta)y \\ (1-\beta)^2y & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x & (1-\beta)y \\ (1+\beta)^2y & 0\end{pmatrix}\right].$$

Так как матрицы $P=\dfrac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & 0 \\ -c & a\end{pmatrix}, R=\dfrac{1}{a^2d}\begin{pmatrix} d & 0 \\ -2c & a\end{pmatrix}$, где $a,d,c\in F$, $ad\neq 0$ (см. таблицу) стабилизируют пару (A_1,A_2), то $\Delta\sim[A_1,A_2,C',D']$, где

$$C'=\frac{1}{a^3d}\begin{pmatrix} t(xd-cy(3+\beta^2)) & aty(1+\beta) \\ aty(1-\beta)^2 & 0\end{pmatrix},$$

$$D'=\frac{1}{a^3d}\begin{pmatrix} t(xd-cy(3+\beta^2)) & aty(1-\beta) \\ aty(1+\beta)^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Если $y=0$, то полагая $P=R=E$ и $t=\dfrac{1}{x}$, мы получаем

$$\Delta\sim\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]. \tag{7.1}$$

Если $y\neq 0$ и $3+\beta^2\neq 0$, то полагая $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-x}{y(3+\beta^2)} & 1\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-2x}{y(3+\beta^2)} & 1\end{pmatrix}$ и $t=\dfrac{1}{y}$, мы получаем

$$\Delta\sim\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ (1-\beta)^2 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta \\ (1+\beta)^2 & 0\end{pmatrix}\right]. \tag{7.2}$$

Если $y\neq 0$, $x=0$ и $3+\beta^2=0$, то полагая $P=R=E$ и $t=\dfrac{1}{y}$, мы снова получаем четверку матриц (7.2) (в которой $\beta=\pm\sqrt{-3}$). Если же $y\neq 0$, $x\neq 0$ и $3+\beta^2=0$, то полагая $P=R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{x}{y} & 1\end{pmatrix}$ и $t=\dfrac{1}{x}$, мы получаем

$$\Delta\sim\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1+\beta \\ (1-\beta)^2 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1-\beta \\ (1+\beta)^2 & 0\end{pmatrix}\right]. \tag{7.3}$$

Несложно проверить, что эти четверки матриц попарно неэквивалентны. Далее, рассмотрим отдельно каждый подслучай.

Случай 7.1: $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \beta\in F^*$

Заметим, что матрицы

$$P=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & 0 \\ -c & a\end{pmatrix}, R=\frac{1}{a^2d}\begin{pmatrix} d & 0 \\ -2c & a\end{pmatrix},\ T=\left(\frac{1}{a^3}\right),$$

где $a, d \in F,\ ad \neq 0$ стабилизируют четверку (7.1). Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right],\ b_{ij} \in F.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{a^2(db_{21}(1+\beta) - db_{12}(1-\beta) - 2c\beta b_{22})}{2\beta d} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \left(\frac{a^3(c^2b_{22} - d^2b_{11})}{d^2},\ \frac{a^3(b_{21} - b_{12})}{2\beta}\right).$$

Тогда, в силу равенства (2),

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^3b_{22}}{d^2} \end{pmatrix}\right].$$

Если $b_{22} = 0$, то

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]. \tag{7.1.1}$$

Если $b_{22} \neq 0$, то полагая $a = b_{22}, d = b_{22}^2, c = 0$, имеем

$$\Pi' \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]. \tag{7.1.2}$$

Несложно проверить, принимая во внимание указанные выше стабилизаторы, что эти пятерки матриц неэквивалентны.

Случай 7.2: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ (1-\beta)^2 & 0 \end{pmatrix}$**,** $D = \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta \\ (1+\beta)^2 & 0 \end{pmatrix}$**,** $\beta \in F^*$**.**

Если $\beta^2 + 3 \neq 0$, то матрицы

$$P = \frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & 0 \\ - & a \end{pmatrix}, R = \frac{1}{a^2d}\begin{pmatrix} d & 0 \\ -2 & a \end{pmatrix},\ T = \left(a^2d\right),$$

где $a, d, c \in F,\ ad \neq 0$, стабилизируют четверку (7.2). Если же $\beta^2 + 3 = 0$, то стабилизаторами являются матрицы

$$P = \frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, R = \frac{1}{a^2d}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ T = \left(a^2d\right),$$

где $a, d \in F,\ ad \neq 0$.

Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ (1-\beta)^2 & 0 \end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 1-\beta \\ (1+\beta)^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right],$$

$b_{ij} \in F$. Если $\beta = 1$ и $b_{21} = 0$, то полагая $P = R = E,\ t = 1$ и

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b_{22}}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S = \left(-b_{11},\ -\frac{b_{12}}{2}\right),$$

получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ 1-\beta & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ (1-\beta)^2 & 0\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}0 & 1-\beta\\ (1+\beta)^2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]. \qquad (7.2.1)$$

Если $\beta = 1$ и $b_{21} \neq 0$, то полагая

$$P = \begin{pmatrix}b_{21} & 0\\ 0 & b_{21}\end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix}b_{21}^2 & 0\\ 0 & b_{21}^2\end{pmatrix},\ t = \frac{1}{b_{21}^3},$$
$$Q = \begin{pmatrix}0 & \dfrac{b_{22}-b_{21}}{4b_{21}^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, S = \left(-\frac{b_{11}}{b_{21}^3},\ \frac{b_{21}-b_{12}}{2b_{21}^3}\right),$$

получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ 1-\beta & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ (1-\beta)^2 & 0\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}0 & 1-\beta\\ (1+\beta)^2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]. \qquad (7.2.2)$$

Несложно проверить, принимая во внимание указанные выше стабилизаторы, что эти пятерки матриц неэквивалентны.

Если $\beta = -1$ и $b_{12} = 0$, то полагая $P = R = E,\ t = 1$ и

$$Q = \begin{pmatrix}0 & \dfrac{b_{22}}{4}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, S = \left(-b_{11},\ -\frac{b_{21}}{2}\right),$$

получаем пятерку матриц вида (7.2.1) (где $\beta = -1$).

Если $\beta = -1$ и $b_{12} \neq 0$, то полагая

$$P = \begin{pmatrix}b_{12} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix}b_{12}^2 & 0\\ 0 & b_{12}\end{pmatrix},\ t = \frac{1}{b_{12}^2},$$
$$Q = \begin{pmatrix}0 & \dfrac{b_{22}-b_{12}^2}{4b_{12}^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, S = \left(-\frac{b_{11}}{b_{12}^2},\ \frac{b_{12}-b_{21}}{2b_{12}^2}\right),$$

получаем пятерку матриц вида (7.2.2) (где $\beta = -1$).

Несложно проверить, принимая во внимание указанные выше стабилизаторы, что эти пятерки матриц неэквивалентны.

Если $\beta^2 + 1 = 0$ и $b_{22} = 0$, то полагая $P = R = E,\ t = 1$ и

$$Q = \begin{pmatrix}\dfrac{b_{12}(1-\beta) - b_{21}(1+\beta)}{2\beta(1-\beta^2)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ S = \left(-b_{11},\ \frac{b_{12}(1-\beta)^2 - b_{21}(1+\beta)^2}{2\beta(1-\beta^2)}\right),$$

получаем пятерку матриц вида (7.2.1) (где $\beta^2 = -1$).

Если $\beta^2 + 1 = 0$ и $b_{22} \neq 0$, то полагая $P = R = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{b_{22}}\end{pmatrix},\ t = b_{22}$ и

$$Q = \begin{pmatrix}\dfrac{b_{21}(1+\beta) - b_{12}(1-\beta) - 2\beta}{2\beta(1-\beta^2)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$S = \left(-b_{22}b_{11},\ \frac{(b_{12}(1-\beta)^2 - b_{21}(1+\beta)^2 + 4\beta)b_{22}}{2\beta(1-\beta^2)}\right)$$

получаем пятерку матриц вида (7.2.2) (где $\beta^2 = -1$).

Несложно проверить, принимая во внимание указанные выше стабилизаторы, что эти пятерки матриц неэквивалентны.

Если же $\beta^2+1 \neq 0$ и $\beta^2-1 \neq 0$, то есть $\beta^4-1 \neq 0$, то полагая $P = R = E,\ t = 1$ и

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{12} - b_{12}\beta - b_{21} - b_{21}\beta}{2\beta(1-\beta^2)} & \dfrac{b_{22}}{2(1+\beta^2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \left(-b_{11}, \frac{b_{12}\beta^2 - b_{21}\beta^2 - 2b_{12}\beta - 2b_{21}\beta + b_{12} - b_{21}}{2\beta(1-\beta^2)}\right),$$

получаем пятерку матриц вида (7.2.1).

Случай 7.3: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1+\beta \\ (1-\beta)^2 & 0 \end{pmatrix},$
$D = \begin{pmatrix} 1 & 1-\beta \\ (1+\beta)^2 & 0 \end{pmatrix}.$

В этом случае $\beta^2 + 3 = 0, \beta \in F^*$. Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1+\beta \\ (1-\beta)^2 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1-\beta \\ (1+\beta)^2 & 0 \end{pmatrix},\ B\right],$$

где $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $b_{ij} \in F$. Пусть $P = R = E,\ t = 1$ и

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{2b_{12}(1-\beta) - b_{22}\beta - 2b_{21}(1+\beta)}{16\beta} & -\dfrac{b_{22}}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \left(\frac{2b_{12}(1-\beta) - 8b_{11}\beta - b_{22}\beta - 2b_{21}(1+\beta)}{8\beta},\ \frac{2b_{21}(1-\beta) - 2b_{12}(1+\beta) - b_{22}\beta}{8\beta}\right),$$

тогда, в силу равенства (2), получаем

$$\Pi \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+\beta \\ (1-\beta)^2 & 0 \end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1-\beta \\ (1+\beta)^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]. \tag{7.3.1}$$

Случай 8: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \varepsilon \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}$, где $\varepsilon \in \{1, \delta\}$ и $(\alpha, \beta) \in \Pi_\varepsilon$.

Так как элементы матриц A_1, A_2, C, D удовлетворяют равенствам $(*)$, то мы получаем однородную систему

$$\begin{cases} c_{11} - d_{11} = 0, \\ c_{11}\alpha + c_{12}(1+\beta) - d_{21} = 0, \\ -(1+\beta)d_{12} - c_{11}\alpha + c_{12}(1-\beta) - \alpha d_{11} = 0, \\ -(1+\beta)d_{22} + c_{11}\varepsilon - \alpha d_{21} = 0, \\ -(1+\beta)d_{12} + c_{21} + \alpha d_{11} = 0, \\ -(1-\beta)d_{22} + c_{21}\alpha + c_{22}(1+\beta) + \alpha d_{21} = 0, \\ -c_{21}\alpha + c_{22}(1-\beta) - \varepsilon d_{11}, \end{cases}$$

Определитель которой равен $det = -16\varepsilon(\alpha^2 - \varepsilon\beta^2)$.

Если $\varepsilon = \delta$, то $\alpha^2 - \delta\beta^2 = \xi$ для некоторого $\xi \in F^*$. Отсюда $det = -16\varepsilon\xi \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное нулевое решение. Но матрицы C и D отличны от нуля. Получаем противоречие. Этот случай невозможен.

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\alpha^2 - \beta^2 = \xi$, для некоторого $\xi \in F$. Если $\xi \neq 0$, то мы также получаем противоречие. Если же $\xi = 0$, то в силу того, что (α, β) является произвольным ненулевым решением уравнения $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, будем полагать $\alpha = \beta = 1$. В этом случае $det = 0$ и система имеет ненулевые решения. Строки 1-6, 8 матрицы системы линейно независимы. Выбирая d_{22} свободной переменной, мы получаем вектор $(1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1)$, который является фундаментальной системой решений данной системы. Следовательно, матрицы C и D имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим четверку матриц

$$\Delta = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} \right].$$

Полагая $P = R = E$ и $t = \dfrac{1}{x}$, мы получаем

$$\Delta \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]. \tag{8.1}$$

Заметим, что матрицы

$$P = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ T = \left(a^3\right),$$

где $a \in F, \ a \neq 0$ стабилизируют четверку (8.1). Рассмотрим пятерку матриц

$$\Pi = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right], \ b_{ij} \in F.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2(b_{11} - b_{22})}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S = \left(-a^3 b_{22}, \ \frac{a^3(3b_{22} - b_{11} - 2b_{12})}{4} \right).$$

Тогда, в силу равенства (2),

$$\Pi \sim \Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{a(b_{22} + 2b_{21} + b_{11})}{2} & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Если $b_{22} + 2b_{21} + b_{11} = 0$, то

$$\Pi' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{8.1.1}$$

Если $b_{22} + 2b_{21} + b_{11} \neq 0$, то полагая $a = \dfrac{2}{b_{22} + 2b_{21} + b_{11}}$ имеем

$$\Pi' \sim \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{8.1.2}$$

Несложно проверить, принимая во внимание указанные выше стабилизаторы, что эти пятерки матриц неэквивалентны.

II. $charF = 2$.

В этом случае все результаты получены вычислениями над полем $GF(2)$ с использованием компьютерной программы MATLAB 7.0 (см. [3]).

Итак, доказана следующая теорема:

Теорема 5. *В следующем списке перечислены представители всех классов эквивалентности, определенной на пятерках матриц* (A_1, A_2, C, D, B).
а) Если $F = GF(p^r), p \neq 2$, *то:*

(1) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s_1&s_2\end{pmatrix}\right]$
для всех $s_1, s_2 \in \{0,1\}$;

(2) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ *для всех* $s \in \{0,1\}$;

(3) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix}\right]$ *для всех* $s \in \{0,1\}$;

(4) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$;

(5) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ *для всех* $s \in \{0,1\}$;

(6) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ *для всех* $s \in \{0,1\}$;

(7) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ *для всех* $s \in \{0,1\}$;

(8) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$ *для всех* $\varepsilon \in \{1,\delta\}$;

(9) $\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\-2&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$
для всех $s \in \{0,1\}$;

(10) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix}\right]$
для всех $\beta \in F^*,\ s \in \{0,1\}$;

(11) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1+\beta\\(1-\beta)^2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1-\beta\\(1+\beta)^2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$
для всех $\beta \in F^*$;

(12) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1+\beta\\(1-\beta)^2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1-\beta\\(1+\beta)^2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right]$
для всех $\beta \in F^*$, $\beta^4 - 1 = 0$;

(13) $\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$
для всех $s \in \{0,1\}$.

Кроме того, если $\mathrm{char} F = 3$, *то дополним список матрицами*
$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ *для всех* $s \in \{0,1\}$.

Если множество M *не пусто, то дополним список матрицами*
$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&z\\z&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&z\\z&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$
для всех $s \in \{0,1\}$, *где* $z \in K \backslash M$.

Если найдется элемент $z \in F^*$, *такой, что* $z \neq \pm 1$, $\dfrac{1-z}{1+z} \notin F^{*3}$, *то дополним список матрицами*

$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&z\\z&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&z\\z&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ *для всех* $s\in\{0,1\}$*;*

Если $-1\in F^{*2}$*, то дополним список матрицами*

$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix}\right]$
для всех $s\in\{0,1\}$.

Если $-1\notin F^{*2}$*, то дополним список матрицами*

$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&\sqrt{-\delta}\\\sqrt{-\delta}&-\delta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-\sqrt{-\delta}\\\sqrt{-\delta}&\delta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix}\right]$
для всех $s\in\{0,1\}$.

Если $-3\in F^{*2}$*, то дополним список матрицами*

$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1+\beta\\(1-\beta)^2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1-\beta\\(1+\beta)^2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$,
где $\beta=\sqrt{-3}\in F$*;*

b) Если $F=GF(2)$*, то:*

(1) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s'&s\\s&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s'&s\\s&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&s_1\\0&s_2\end{pmatrix}\right].$

(2) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s'&s\\s&s\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s'&s\\s&s\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&s_1\\0&0\end{pmatrix}\right];$

(3) $\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s_1&s_1'\\1&s_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s_1&s_1'\\1&s_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&s_2\\0&0\end{pmatrix}\right];$

(4) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s'&0\\s&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s'&s\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&ss_1\\0&s's_1\end{pmatrix}\right];$

(5) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s'&s\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s'&0\\s&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\ss_1&s's_1\end{pmatrix}\right];$

(6) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&s\\0&0\end{pmatrix}\right];$

(7) $\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&s\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&s's_1'\\0&s_1+ss_1'\end{pmatrix},\right.$
$\left.\begin{pmatrix}s_1+ss_1'&s's_1'\\s_1+ss_1'&s_1+ss_1'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s's_1's_2&s's_1's_2\\s's_1's_2&s's_1's_2\end{pmatrix}\right];$

(8) $\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$
для всех $s,s_1,s_2\in\{0,1\}$, $s'=1-s$, $s_1'=1-s_1$. *Всего 32 пятерки матриц.*

Теорема 6. *Пятерки матриц, представленные в предыдущей теореме, определяют все попарно неизоморфные конечные локальные кольца порядка* p^6 *и характеристики* p *с условиями:*

$$J(R)^4=0,\dim_F J(R)/J(R)^2=2,\ \dim_F J(R)^2/J(R)^3=2,\ \dim_F J(R)^3=1,$$

где $R/J(R)=F$.

Доказательство. В силу теоремы проблема классификации таких колец (с точностью до изоморфизма) сводится к нахождению представителей классов эквивалентности, определенной ранее на пятерках матриц (A_1,A_2,C,D,B). Осталось заметить, что так как $|R|=p^6$, и

$$r(1+\dim_F J(R)/J(R)^2+\dim_F J(R)^2/J(R)^3+\dim_F J(R)^3)=6,$$

то $r = 1$. То есть $F = Z_p$ и, следовательно, выполнены условия обоих пунктов теоремы. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Ю.Н. Мальцеву за внимание, проявленное к данной работе.

Список литературы

[1] C. J. Chikunji, *On a Class of Finite Rings*, Communication in Algebra, **27**:10 (1999), 5049-5081.

[2] C. J. Chikunji, *Enumeration of Finite Rings with Jacobson Radical of Cube Zero* [Electronic resource] - Cornell University Library, 1999 - Mode of access: http://arxiv.org/abs/math.RA/9905030.

[3] C. J. Chikunji, *Using Matlab to solve a classification problem in finite rings*[Electronic resource] - 2^{nd} international conference on the teaching of mathematics, Greece, 2003 - Mode of access: http://www.math.uoc.gr/ ictm2/Proceedings/pap252.pdf.

[4] R. Raghavendran, *Finite associative rings, Compositio Math.*, **21** (1969), 195-229.

[5] B. Corbas, *Finite rings in which the product of any two zero divisors is zero*, Archiv der Math. **21** (1970), 466-469.

[6] B. Corbas, *Rings with few zero divisors*, Math. Ann., **181** (1969), 1-7.

[7] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. Part 1. Nonlocal rings*, Journal of Algebra, **231** (2000), 677-690.

[8] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. Part 2. Local rings, Journal of Algebra*, **231** (2000), 691-704.

[9] B. Gorbas, G.D. Williams, *Gongruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic $\neq 2$)*, Pacific Journal of Mathematics, **188**:2 (1999), 225-235.

[10] B. Gorbas, G.D. Williams, *Gongruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic 2)*, Pacific Journal of Mathematics, **188**:2 (1999), 237-249.

Евгений Владимирович Журавлев
Алтайский государственный университет,
пр. Ленина 61,
656049, Барнаул, Россия
E-mail address: zhuravlev@math.asu.ru, evzhuravlev@mail.ru