S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 145–152 (2006) УДК 510.51+519.716.35
MSC 03D05, 03D45, 03C57

ГРУППЫ АВТОМАТНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ АВТОМАТНЫХ СТРУКТУР

Н.С. ВИНОКУРОВ

Abstract. We prove that the group $\mathtt{Aut}_a(\{0,1\}^*)$ of all automatic automorphisms of the regular set $\{0,1\}^*$ and the group $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ of all automatic automorphisms of the automatic model $\mathbb{Q} = (\{0,1\}^*, \preccurlyeq_{lex})$ have undecidable theories, which implies that they have no automatic presentations.

С основными определениями, понятиями и результатами из теории конечных автоматов и автоматных структур можно познакомиться, например, по [8].

В работе [1] было показано, что группа всех автоматных автоморфизмов любой автоматной структуры вычислима. Возникает естественный вопрос: а верно ли, что группа всех автоматных автоморфизмов любой автоматной структуры автоматна, или хотя бы обладает разрешимой теорией? В данной работе даются отрицательные ответы на эти вопросы. Естественно было начать изучение этих вопросов с самой большой группы автоматных автоморфизмов, а именно, с группы автоматных перестановок $\mathtt{Aut}_a(\{0,1\}^*)$ множества $\{0,1\}^*$, в которую естественным образом вкладываются все группы автоматных автоморфизмов.

Сначала мы докажем, что в $\mathtt{Aut}_a(\{0,1\}^*)$ интерпретируется стандартная модель арифметики. Здесь мы будем использовать идею доказательства аналогичного результата для группы вычислимых перестановок из работы [4]. В [2]

Vinokurov N.S., Groups of automatic automorphisms of some automatic structures.

Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации «Ведущие научные школы» (грант НШ-4413.2006.1).

Поступила 05 апреля 2006 г., опубликована 18 апреля 2006 г.

впервые опубликован метод интерпретации формулами первого порядка в любой группе перестановок $(G, \cdot)$ бесконечного множества X, содержащей все 2–циклы (транспозиции), двухосновной модели $(G, X, \cdot, \mathtt{ap})$, где $\mathtt{ap}(f, m) = f(m)$ — применение $f \in G$ к $m \in X$. Некоторое упрощение этого метода можно найти в [4]. Здесь в качестве G мы возьмем группу $\mathtt{Aut}_a\big(\{0,1\}^*\big)$.

Стабилизатор элемента $f \in G$ определяется как множество

$$\mathtt{st}(f) = \{x \in \omega \mid f(x) = x\}.$$

Нам будет полезна следующая

Лемма 1 ([8]). *Пусть $\mathfrak{M}$ — автоматная структура и пусть R — отношение, определимое над $\mathfrak{M}$ формулой первого порядка. Тогда R — автоматное отношение на $\mathfrak{M}$.*

Лемма 2. *Свойство "$\mathtt{st}(f)$ бесконечен" определимо в модели*

$$\big(\mathtt{Aut}_a\big(\{0,1\}^*\big), \omega; \cdot, \mathtt{ap}\big)$$

формулой

$$\exists g \exists h \big[\mathtt{st}(g) \subseteq \mathtt{st}(f) \ \&\ h(\mathtt{st}(g)) \subsetneqq \mathtt{st}(g)\big].$$

Доказательство. Очевидно, что из справедливости формулы следует, что множество $\mathtt{st}(f)$ бесконечно. Обратно, пусть множество $\mathtt{st}(f)$ бесконечно. Поскольку отображение f автоматно, множество $\mathtt{st}(f)$ регулярно. По хорошо известной в теории конечных автоматов лемме о накачке, существует слово $w = xyz$ такое, что для всех $i \in \omega$ выполнено $a_i = xy^iz \in \mathtt{st}(f)$. Определим отображение

$$h(x) \quad \leftrightharpoons \quad \begin{cases} x, & \text{если } x \notin \{a_i \mid i \in \omega\} \\ a_{2t+2}, & \text{если } x = a_{2t} \\ a_0, & \text{если } x = a_1 \\ a_{2t+1}, & \text{если } x = a_{2t+3}. \end{cases}$$

Используя лемму 1, нетрудно убедиться, что это отображение автоматно.

Язык $L = \{0,1\}^* \setminus \{a_i \mid i \in \omega\}$ является регулярным. Мы можем автоматно упорядочить язык L по типу ω с помощью порядка $\preccurlyeq_{llex}$, определяемого, как

$$x \preccurlyeq_{llex} y \quad \leftrightharpoons \quad |x| < |y| \vee \big(|x| = |y| \ \&\ x \preccurlyeq_{lex} y\big),$$

где $\preccurlyeq_{lex}$ — это лексикографический порядок. Пусть m — наименьший элемент относительно порядка $\preccurlyeq_{llex}$ в L и пусть $S(x)$ — автоматная функция взятия следующего элемента относительно этого порядка. Тогда отображение

$$g(x) \quad \leftrightharpoons \quad \begin{cases} x, & \text{если } x \in \{a_{2i} \mid i \in \omega\} \\ a_{2t+1}, & \text{если } x = a_{2t+3} \\ m, & \text{если } x = a_1 \\ S(x), & \text{если } x \in L \end{cases}$$

будет автоматным. При этом $a_0 \in \mathtt{st}(g)$, но $a_0 \notin h(\mathtt{st}(g))$, а также $h(\mathtt{st}(g)) \subseteq \mathtt{st}(g)$. Таким образом, перестановки h и g удовлетворяют формуле из формулировки леммы. Лемма доказана. $\square$

Далее аналогично тому, как это сделано в [4], в модели $\big(\mathtt{Aut}_a\big(\{0,1\}^*\big), \omega; \cdot, \mathtt{ap}\big)$ определяется формулами первого порядка модель $\big(\mathtt{Aut}_a\big(\{0,1\}^*\big), \omega, F; \cdot, ap, \in\big)$, в которой F — множество всех конечных подмножеств ω, и отношение $\in$ —

естественное отношение принадлежности на $\omega \times F$. При этом, в качестве интерпретаций конечных множеств берутся такие автоматные перестановки f, у которых стабилизатор $\mathtt{st}\,(f)$ конечен. По лемме 2, они выделяются формулой первого порядка в языке модели $\big(\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big), \omega; \cdot, ap\big)$.

Далее, как и в [4], строится формула $\mathtt{Norm}\,(x,y)$ языка первого порядка, выделяющая в модели $\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big)$ пары перестановок (f_0, f_1), действующих, как

$$f_0 = \Pi_{i\in\omega}(a_{2i}, a_{2i+1}), \quad f_1 = \Pi_{i\in\omega}(a_{2i+1}, a_{2i+2}),$$

где все a_i попарно различны и $\{a_i \mid i < \omega\} = \{0,1\}^*$. Легко заметить, что в любом бесконечном регулярном языке существуют автоматные перестановки, действующие подобным образом при соответствующем отождествлении слов этого языка с натуральными числами. Любые две перестановки f_0 и f_1, удовлетворяющие формуле $\mathtt{Norm}\,(f_0, f_1)$, позволяют естественным образом определить структуру натурального ряда, а именно, с натуральным числом 0 ассоциируется единственный неподвижный элемент a_0 перестановки g_1, с числом 1 ассоциируется элемент $g_0(a_0)$, с числом 2 ассоциируется элемент $g_1 g_0(a_0)$ и т.д. В работе [4] приводятся формулы, которые с любыми параметрами f_0 и f_1 такими, что $\mathtt{Norm}\,(f_0, f_1)$, определяют на так определенных натуральных числах функцию следования, естественный порядок, а также умножение и сложение. Непосредственная проверка показывает, что все эти формулы определяют то же самое и в нашей группе $\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big)$.

Тем самым, мы доказали, что имеет место следующая

Теорема 1. *В группе* $\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big)$ *определима с параметрами стандартная модель арифметики. При этом класс таких параметров также является формульным.*

Следствие 1. *Элементарная теория группы* $\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big)$ *неразрешима. Более того, она вычислимо изоморфна множеству всех предложений, истинных в стандартной модели арифметики.*

Доказательство. Заметим, что в силу вышеупомянутой интерпретируемости стандартной модели арифметики в $\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big)$ существует вычислимое преобразование формул, преобразующее любое предложение φ языка арифметики в такую формулу $\widehat{\varphi}(f_0, f_1)$ языка теории групп, что для любых $f_0, f_1 \in \mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big)$ таких, что $\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big) \models \mathtt{Norm}\,(f_0, f_1)$, φ истинно тогда и только тогда, когда $\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big) \models \widehat{\varphi}(f_0, f_1)$. Отсюда мы получаем, что в арифметике выполнена формула φ тогда и только тогда, когда в $\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big)$ выполнена формула

$$\exists f_0, f_1(\mathtt{Norm}\,(f_0, f_1) \ \&\ \widehat{\varphi}(f_0, f_1)).$$

Значит элементарная теория стандартной модели арифметики 1–сводится к $Th(\mathtt{Aut}_{\,a}\big(\{0,1\}^*\big))$. Обратную 1–сводимость можно легко получить, используя любую геделеву нумерацию конечных автоматов, определяющих перестановки на множестве $\{0,1\}^*$. Утверждение теоремы следует из хорошо известного в теории вычислимости факта, что $A \leqslant_1 B$ и $B \leqslant_1 A$ влечет существование вычислимой перестановки, переводящей A в B (см., например, [5]). $\square$

Заметим, что приведенное выше доказательство остается верным также и для любой группы $\mathtt{Aut}_{\,a}(L)$, где L — произвольный бесконечный регулярный язык.

Учитывая известный результат о том, что теория любой автоматной структуры разрешима, мы получаем

Следствие 2. *Пусть L — произвольный бесконечный регулярный язык. Тогда группа $\mathtt{Aut}_a(L)$ не имеет автоматного представления.*

Теперь перейдем к группе $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$. Определим автоматную модель $\mathbb{Q} \leftrightharpoons (\{0,1\}^*, \preccurlyeq_{lex})$, где $\preccurlyeq_{lex}$ лексикографический порядок, определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} x \preccurlyeq_{lex} y \quad \leftrightharpoons \quad & \exists\, t, u, w\big[(x = t0u \;\&\; y = t1w) \;\vee \\ & \vee\, (x = t0z \;\&\; y = t) \vee (x = t \;\&\; y = t1w)\big]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что этот порядок изоморфен естественному порядку на рациональных числах. Пусть $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ обозначает группу всех автоматных автоморфизмов модели $\mathbb{Q}$. Докажем теперь, что в $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ интерпретируется с параметрами арифметика. Здесь мы используем идею доказательства аналогичного результата, изложенного в работе [7], для вычислимого случая.

Напомним необходимые определения.

Определение 1. *Пусть $(Q, \leqslant)$ — множество рациональных чисел с естественным порядком, $\mathtt{Aut}\,(Q, \leqslant)$ — группа всех его автоморфизмов, и g — элемент из $\mathtt{Aut}\,(Q, \leqslant)$. Назовем орбиталью автоморфизма g, содержащей элемент x, множество $\{y \in Q \mid \exists\, m, n \in \mathbb{Z}\ g^m(x) \leqslant y \leqslant g^n(x)\}$.*

Если g возрастает на своей орбитали, то эта орбиталь называется положительной, если убывает, то отрицательной, если же g на ней постоянна, то орбиталь называется тривиальной (в этом случае она одноэлементна).

Определение 2. *Автоморфизмы, имеющие в точности одну нетривиальную орбиталь, называются бампами. Бамп называется положительным (отрицательным), если соответствующая ему орбиталь положительна (отрицательна).*

Определение 3. *Пусть $f \in \mathtt{Aut}\,(Q, \leqslant)$ и $\bar{f}$ — непрерывное продолжение f на $\mathbb{R}$. Тогда носителем f назовем множество $\mathtt{sp}\,(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \bar{f}(x) \neq x\}$.*

Определение 4. *Назовем автоматную структуру $\mathfrak{A}$ автоматно однородной, если для любых кортежей $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из того, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \bar{b})$ следует, что существует автоматный автоморфизм, переводящий $\bar{a}$ в $\bar{b}$.*

Нам будет полезна следующая

Лемма 3 ([6])**.** *Модель $\mathbb{Q}$ является автоматно однородной.*

Заметим, что автоматная однородность структуры $\mathbb{Q}$ означает, что для любых последовательностей $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ существует автоматный автоморфизм f структуры $\mathbb{Q}$ такой, что $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n$.

Лемма 4. *Свойство “x не содержит одновременно положительных и отрицательных бампов” определимо в $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ формулой*

$$\mathtt{Comp}\,(x) \quad \leftrightharpoons \quad \exists z \exists y\big[\, y \neq 1 \;\&\; x \neq 1 \;\&\; \big(\forall t\, [y, z^{x^t}] = 1\big)\big].$$

Доказательство. Проводится аналогично соответствующей лемме из [9]. Приведем схему доказательства. Пусть выполнено свойство “x не содержит одновременно положительных и отрицательных бампов”. Пусть для определенности x содержит только положительные бампы. Тогда возьмем любые бампы, такие что носитель одного строго меньше носителя другого. (Такие автоматные бампы легко строятся, например, в качестве таких бампов можно взять f_0 и $f_0^{f_S}$, где f_0 и f_S определены ниже соответственно формулами (1) и (3)). В качестве y возьмем бамп с меньшим носителем, а в качестве z бамп с большим носителем. Тогда для любого t носитель бампа z^{x^t} больше (в смысле поэлементного сравнения) носителя бампа y. Поэтому автоморфизмы z^{x^t} и y будут перестановочны, значит формула $\mathtt{Comp}\,(x)$ будет выполнена.

Пусть теперь x содержит и отрицательный и положительный бампы. Пусть g и f — некоторые нетривиальные автоматные автоморфизмы. Пусть (a,b) — нетривиальная орбиталь f и (c,d) — нетривиальная орбиталь g. Мы проведем доказательство в предположении, что эти орбитали положительны, остальные случаи разбираются аналогично. Сначала рассмотрим случай $b > c$. Возьмем $y \in (c,d)$ и $z \in (a,b)$, так что $yg^2 < z$. В x есть положительная орбиталь. Возьмем в этой орбитали элементы n_1, n_2, n_3 такие, что $n_1 < n_2 < n_3 < n_1x < n_2x < n_3x$. По лемме 3 существует автоматный автоморфизм t, поэлементно переводящий $n_1 < n_2 < n_3 < n_1x < n_2x < n_3x$ в $y < yg < yg^2 < z < zf < zf^3$. Тогда x^t переводит $y < yg < yg^2$ в $z < zf < zf^3$. Покажем теперь, что f и g^{x^t} не перестановочны. Имеем:

$$zfg^{x^t} = zf(x^t)^{-1}gx^t = yggx^t = zf^3,$$
$$zg^{x^t}f = z(x^t)^{-1}gx^tf = ygx^tf = zf^2.$$

Таким образом f и g^{x^t} не перестановочны, поскольку $zf^3 \neq zf^2$. Если $b \geq c$, то мы используем таким же образом отрицательную орбиталь x. Возьмем в этой орбитали элементы n_1, n_2, n_3 такие, что $n_1x < n_2x < n_3x < n_1 < n_2 < n_3$, далее возьмем $y \in (c,d)$ и $z \in (a,b)$, так что $z < zf < zf^3 < y < yg < yg^2$, и полностью повторим рассуждения проведенные выше. □

Лемма 5. *Свойство “$\mathtt{sp}\,(x) > \mathtt{sp}\,(y) \vee \mathtt{sp}\,(y) > \mathtt{sp}\,(x)$” определимо в $\mathtt{Aut}_{\,a}(\mathbb{Q})$ формулой*

$$\mathtt{Apart}\,(x,y) \leftrightharpoons \exists z\big[\mathtt{Comp}\,(z)\ \&\ z \neq 1\ \&\ (\forall t\ [x, y^{z^t}] = 1)\big].$$

Доказательство. Проводится аналогично соответствующей лемме в [9]. Приведем схему доказательства. Пусть свойство “$\mathtt{sp}\,(x) > \mathtt{sp}\,(y) \vee \mathtt{sp}\,(y) > \mathtt{sp}\,(x)$” выполнено в модели $\mathtt{Aut}_{\,a}(\mathbb{Q})$. Пусть для определенности выполнено $\mathtt{sp}\,(y) > \mathtt{sp}\,(x)$. Тогда в качестве z возьмем любой положительный бамп. Автоморфизм z^t также является положительным бампом. И носитель автоморфизма y^{z^t} не меньше (в смысле поэлементного сравнения) носителя автоморфизма y, который в свою очередь больше носителя автоморфизма x. Тем самым автоморфизмы x и y^{z^t} перестановочны и формула $\mathtt{Apart}\,(x,y)$ выполнена.

Пусть теперь не выполнено свойство “$\mathtt{sp}\,(f) > \mathtt{sp}\,(g) \vee \mathtt{sp}\,(f) > \mathtt{sp}\,(g)$”. Пусть h — произвольный нетривиальный автоморфизм, на котором выполнена формула $\mathtt{Comp}\,(x)$ (для определенности считаем, что h содержит положительную орбиталь). По нашему предположению существуют $x \in \mathtt{sp}\,(f)$ и $y \in sp(g)$ такие, что $x \geqslant y$. Мы здесь рассмотрим только случай, когда x и y попадают в положительные орбитали, т.е. $x < xf$ и $y < yg$. Остальные случаи разбираются аналогично. Аналогично предыдущему доказательству, мы получаем, что по лемме 3 существует автоматный автоморфизм t, такой что h^t переводит $yg^{-2} < yg^{-1} < y$ в $x < xf < xf^3$. Покажем теперь, что f и g^{h^t} не перестановочны. Это следует из следующих двух равенств:

$$xfg^{h^t} = xf^3, \quad xg^{h^t}f = xf^2.$$

Таким образом f и g^{h^t} не перестановочны, т.к. $xf^3 \neq xf^2$. Значит формула $\mathtt{Apart}\,(f,g)$ не выполнена на модели $\mathtt{Aut}_{\,a}(\mathbb{Q})$. $\square$

Определим три автоматных автоморфизма f_0, f_ω и f_S, которые, неформально говоря, будут кодировать соответственно ноль, множество натуральных чисел и функцию следования в арифметике:

$$f_0(x) \leftrightharpoons \begin{cases} 1011z, & \text{если } x = 101z, z \in \{0,1\}^* \\ 101, & \text{если } x = 10 \\ 10, & \text{если } x = 100 \\ 100z, & \text{если } x = 1000z, z \in \{0,1\}^* \\ 1010z, & \text{если } x = 1001z, z \in \{0,1\}^* \\ x, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{1}$$

$$f_\omega \leftrightharpoons \begin{cases} y1011z, & \text{если } x = y101z, z \in \{0,1\}^*, y \in \{11\}^* \\ y101, & \text{если } x = y10, y \in \{11\}^* \\ y10, & \text{если } x = y100, y \in \{11\}^* \\ y100z, & \text{если } x = y1000z, z \in \{0,1\}^*, y \in \{11\}^* \\ y1010z, & \text{если } x = y1001z, z \in \{0,1\}^*, y \in \{11\}^* \\ x, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2}$$

$$f_S \leftrightharpoons \begin{cases} y11z, & \text{если } x = yz, z \in \{0,1\}^*, y \in \{1\}^+ \\ 11, & \text{если } x = \lambda \\ 110z, & \text{если } x = 011z, z \in \{0,1\}^* \\ 1, & \text{если } x = 01 \\ 10z, & \text{если } x = 010z, z \in \{0,1\}^* \\ \lambda, & \text{если } x = 0 \\ 0z, & \text{если } x = 00z, z \in \{0,1\}^*. \end{cases} \tag{3}$$

Автоморфизм f_ω раскладывается в счетное произведения положительных независимых бампов, носители которых расположены по типу ω и бамп с самым маленьким носителем есть f_0. Заметим, что бамп f_0 передвигает все элементы между словами λ и 1, таким образом пустое слово λ есть начало бампа f_0, а 1, соответственно, — его конец. Кроме того n-й бамп из этого произведения есть результат сопряжения бампа f_0 перестановкой $(f_S)^n$.

Лемма 6. *Свойство “x не содержит отрицательных бампов” определимо с параметрами в* $\mathtt{Aut}_{\,a}(\mathbb{Q})$ *формулой*

$$\mathtt{Pos}\,(x) \leftrightharpoons \forall t\ \mathtt{Comp}\,(f_0^t x).$$

Доказательство. Пусть x не содержит отрицательных бампов, тогда и $f_0^t x$ не содержит отрицательных бампов. Следовательно, формула $\mathtt{Comp}\,(f_0^t x)$ выполнена.

Обратно, пусть в x есть отрицательные бампы. Возьмем такие элементы h и l, что $l < hx$ и $lx < l$. Поскольку в x есть отрицательные бампы, такие элементы существуют. Пусть a — начало бампа f_0, b — такой элемент, что $b < bf_0$ (такой элемент b существует поскольку f_0 положительный бамп) и пусть c — некоторый элемент, больший h и hx. Ввиду автоматной однородности системы $\mathbb{Q}$ существует автоматный автоморфизм t, поэлементно переводящий $a < b < bf_0$ в $l < hx < c$. Началом бампа f_0^t является элемент l, значит все элементы меньшие l бамп f_0^t оставляет на месте. Кроме того, бамп f_0^t переводит элемент hx в элемент c. Имеем $lxxf_0^t = lx^2f_0^t = lx^2 < lx$, $hxf_0^t = c > h$. Значит у автоморфизма xf_0^t есть как отрицательные так и положительные бампы. Следовательно, формула $\forall t\, \mathtt{Comp}\,(f_0^t x)$ не выполнена. $\square$

Теорема 2. *В группе автоматных автоморфизмов* $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ *структуры* $\mathbb{Q}$ *определяется с параметрами арифметика.*

Доказательство. Автоморфизм f_ω раскладывается в счетное произведения положительных независимых бампов, упорядоченных по типу ω. Каждый такой бамп, таким образом, кодирует элемент из ω. Каждый из этих бампов сопряжен с f_0. Таким образом получается, что данный автоморфизм кодирует элемент ω, если он является частью f_ω и сопряжен с f_0. Поэтому элементы, кодирующие натуральные числа, выделяются следующей формулой с параметрами:

$$\exists t(x = f_0^t)\ \&\ (\exists\, y, z\, \mathtt{Apart}\,(x, y)\ \&\ \mathtt{Apart}\,(y, z)\ \&\ \mathtt{Apart}\,(x, z)\ \&\ f_\omega = yxz).$$

Порядок на бампах также интерпретируется естественным образом: чем меньше носитель бампа (в смысле поэлементного сравнения), тем меньше и кодируемый им элемент. Если один бамп можно получить из другого сопряжением положительным автоморфизмом, то первый бамп больше, т.е., порядок $x \leqslant y$ на бампах, интерпретирующих натуральные числа, задается формулой

$$\exists t\, (\mathtt{Pos}\,(t)\ \&\ x^t = y).$$

Функция следования определяется естественным образом через порядок:

$$S(x) = y \ \leftrightharpoons\ x \leqslant y\ \ \&\ \forall z\ (z > x \to\ z \leqslant y).$$

Сложение и умножение на элементах, кодирующих натуральные числа, определяются через естественные индуктивные схемы

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + (y+1) = (x+y) + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot (y+1) = (x \cdot y) + x, \end{cases}$$

следующим образом:

$$x + y = z \ \leftrightharpoons\ \exists t\big[f_0^t = x\ \&\ y^t = z\ \&\ \forall h \leqslant y(S(h^t) = (S(h))^t)\big],$$

$$x \cdot y = z \ \leftrightharpoons\ \exists t\big[f_0^t = f_0\ \&\ y^t = z\ \&\ \forall h \leqslant y(h^t + x = (S(h))^t)\big].$$

$\square$

Напомним, что теория T называется *наследственно неразрешимой*, если любая подтеория теории T той же сигнатуры неразрешима.

Следствие 3. *Теория структуры* $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ *наследственно неразрешима.*

Доказательство. По теореме 2 стандартная модель арифметики относительно элементарно определима в модели $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$. Кроме того по предложению 8 из [3, гл. 5, §1] стандартная модель арифметики имеет наследственно неразрешимую теорию. Следовательно, по теореме 2 из [3, гл. 5, §1] группа $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ имеет наследственно неразрешимую теорию. □

Следствие 4. *Структура* $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ *не имеет автоматного представления.*

Доказательство. Хорошо известно, что любая автоматная структура имеет разрешимую теорию. Но из 3 следует, что модель $\mathtt{Aut}_a(\mathbb{Q})$ имеет неразрешимую теорию. Значит она не является автоматной. □

Список литературы

[1] Н.С. Винокуров, *Сложность некоторых естественных проблем в автоматных структурах*, Сибирский математический журнал, **46**, No. 1 (2005), 71–78.

[2] Ю.Л.Ершов, *Неразрешимость теорий симметрических и простых конечных групп*, ДАН СССР, **158**, No. 4 (1964), 777–779.

[3] Ю.Л.Ершов, *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*, М.: Наука, 1980.

[4] А.С. Морозов, *Перестановки и неявная определимость*, Алгебра и логика, **27**, No. 1 (1988), 19–36.

[5] Х. Роджерс, *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, М.: Мир, 1972.

[6] D. Kuske, *Is Cantor's theorem automatic?*, Proceedings of the 10th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning (LPAR), **2850** (2003), 332-345.

[7] A.S. Morozov, J.K. Truss, *On computable automorphism of the rational numbers*, The Journal of Symbolic Logic, **66**, No. 3 (2001), 1458–1469.

[8] S. Rubin, *Automata structures*, PhD Thesis, University of Auckland, 2004 (см. `http://www.cs.auckland.ac.nz/~bmk/Sasha/SashaPhDthesis.pdf`).

[9] J.K. Truss, *On recovering structures from quotients of their automorphism groups*, In: Ordered groups and infinite permutations groups, Klüwer, 1996, 63–95.

Никита Сергеевич Винокуров
Новосибирский Государственный Университет
ул. Пирогова 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `vinokurov@gorodok.net`