S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 115–136 (2006) УДК 514.765

MSC 53C25, 53C30

О НЕСТАНДАРТНЫХ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ РАСШИРЕНИЯХ ПЯТИМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Е.В. Никитенко

Abstract. Non-standard Einstein extensions of five-dimensional nilpotent metric Lie algebras are studied in the article. The main result is the following: if there exists a non-standard Einstein extension of a given five-dimensional nilpotent metric Lie algebra $(\mathfrak{n}, Q)$, then $\mathfrak{n}$ has the following non-trivial bracket relations: $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_4] = X_5$, $[X_2, X_3] = X_5$ in a basis $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$.

1. Введение

Хорошо известна проблема существования нестандартных разрешимых эйнштейновых метрических алгебр Ли (или, что эквивалентно, нестандартных эйнштейновых солвмногообразий), поставленная Й. Хебером в [11]. Из результатов работы [9] следует, что минимальная размерность для гипотетической нестандартной эйнштейновой метрической алгебры Ли равна 7, причем производная алгебра Ли такой метрической алгебры должна иметь размерность 5. Изучению эйнштейновых расширений пятимерных метрических нильпотентных алгебр Ли и посвящена данная статья.

Напомним описание некомпактных однородных эйнштейновых многообразий малой размерности, частным случаем которых являются эйнштейновы солвмногообразия. Риманово многообразие (M, ρ) называется эйнштейновым если кривизна Риччи метрики ρ связана с ней соотношением

$$\mathrm{Ric}(\rho) = C \cdot \rho$$

Nikitenko E.V., On non-standard Einstein extensions of five dimensional nilpotent metric Lie algebras.

© 2006 Никитенко Е.В.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию РФ (код проекта А 04-2.8-47), РФФИ (грант №05-01-00611) и Совета по ведущим научным школам (грант НШ-8526.2006.1) .

Поступила 24 января 2006 г., опубликована 21 марта 2006 г.

для некоторой константы C в каждой точке многообразия. Все известные на сегодняшний день некомпактные однородные многообразия Эйнштейна изометричны стандартным эйнштейновым солвмногообразиям. Например, все многообразия Эйнштейна в размерностях 2 и 3 изометричны пространствам постоянной кривизны. Г. Йенсен в работе [12] показал, что каждое *четырехмерное* однородное односвязное многообразие Эйнштейна изометрично симметрическому пространству. Полная классификация *пятимерных* однородных некомпактных эйнштейновых многообразий получена Ю.Г. Никоноровым в [14] (ранее в работе [10] были найдены все пятимерные эйнштейновы солвмногообразия). В размерности 6 и выше классификация однородных некомпактных эйнштейновых многообразий в настоящее время не известна. В связи с этим отметим только, что в работе [9] классифицированы шестимерные эйнштейновы солвмногообразия, а С. Уилл получила классификацию эйнштейновых солвмногообразий ранга 1 в семимерном случае [15].

Отметим также, что шестимерные эйнштейновы метрические алгебры Ли, с пятимерными нильрадикалами были классифицированы в [13]. Эти метрические алгебры являются стандартными эйнштейновыми расширениями ранга 1 пятимерных нильпотентных метрических алгебр Ли. В работе [11] описана процедура построения стандартных эйнштейновых расширений (произвольного ранга) для нильпотентных метрических алгебр Ли, опирающаяся на знание расширений ранга 1. Таким образом, особый интерес представляет вопрос о существовании нестандартных эйнштейновых расширений пятимерных нильпотентных метрических алгебр Ли, среди которых могут существовать и семимерные примеры.

Для изучения сформулированного выше вопроса нам понадобится классификация нильпотентных метрических алгебр Ли размерности 5 над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, которую мы приводим в §3. При получении этой классификации нами существенно используется классификация нильпотентных некоммутативных метрических алгебр Ли размерности ≤ 4, полученная Д.В. Алексеевским в [2]. Из полученной классификации следует хорошо известная классификация пятимерных вещественных (неметрических) алгебр Ли [6, 8]. Отметим, что множество пятимерных некоммутативных нильпотентных метрических алгебр Ли естественно представляется в виде объединения восьми непересекающихся классов, каждый из которых состоит из попарно изоморфных в неметрическом смысле алгебр Ли.

При изучении эйнштейновых расширений метрических нильпотентных алгебр Ли будут использоваться найденные ранее в работе [9] достаточные условия стандартности эйнштейновых расширений нильпотентных метрических алгебр Ли.

Особое значение в дальнейшем изложении имеет пятимерная нильпотентная вещественная алгебра Ли, заданная следующими нетривиальными коммутационными соотношениями:

$$(1) \qquad \tilde{\mathfrak{n}} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}, \quad [X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_2, X_3] = X_5.$$

Откладывая до следующего раздела определения некоторых понятий, сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{n}$ – пятимерная вещественная нильпотентная алгебра Ли, не изоморфная алгебре Ли (1), и Q – некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{n}$. Тогда любое эйнштейново расширение нильпотентной метрической алгебры Ли $(\mathfrak{n}, Q)$ является стандартным.*

Из этой теоремы непосредственно получаем

Следствие 1. *Пусть $(\mathfrak{s}, Q)$ – семимерная нестандартная разрешимая метрическая эйнштейнова алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{s}$ имеет производную алгебру $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$, изоморфную алгебре Ли (1).*

Структура настоящей работы такова. В первом разделе приводятся необходимые справочные сведения о метрических алгебрах Ли. Во втором разделе классифицируются нильпотентные метрические алгебры Ли размерности 5 над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Третий раздел посвящен исследованию эйнштейновых расширений пятимерных нильпотентных метрических алгебр Ли.

2. Предварительные сведения

В этом разделе приводятся необходимые справочные сведения о метрических алгебрах Ли.

Определение 1. *Односвязная разрешимая группа Ли $\mathcal{S}$, снабженная левоинвариантной римановой метрикой ρ, называется солвмногообразием.*

Определение 2. *Разрешимой метрической алгеброй называется пара $(\mathfrak{s}, Q)$, где $\mathfrak{s}$ — разрешимая алгебра Ли, Q — некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{s}$.*

Произвольное солвмногообразие $(\mathcal{S}, \rho)$ определяет скалярное произведение Q на алгебре Ли $\mathfrak{s}$ группы $\mathcal{S}$, и наоборот, каждое скалярное произведения Q на $\mathfrak{s}$ индуцирует левоинвариантную метрику ρ на группе $\mathcal{S}$. Метрическую разрешимую алгебру Ли, соответствующую эйнштейновому солвмногообразию, будем также называть *эйнштейновой.*

Определение 3. *Две метрические алгебры $(\mathfrak{s}, Q)$ и $(\mathfrak{s}', Q')$ будем называть изометричными, если соответствующие им солвмногообразия $(\mathcal{S}, \rho)$ и $(\mathcal{S}', \rho')$ являются изометричными как римановы многообразия.*

Определение 4. *Две метрические алгебры $(\mathfrak{s}, Q)$ и $(\mathfrak{s}', Q')$ будем называть изоморфными, если существует линейное отображение $L : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$, которое является одновременно и изометрией евклидовых пространств и изоморфизмом алгебр Ли.*

Замечание 1. *Таким образом, для изоморфности метрических алгебр Ли требуется наличие биективного линейного отображения $Q : \mathfrak{s}_1 \to \mathfrak{s}_2$, обладающего следующими свойствами:*

$$1) Q([X,Y]_1) = [Q(X), Q(Y)]_2 \ ,$$
$$2) \|X\|_1 = 1 \implies \|Q(X)\|_2 = 1,$$

где $[\cdot,\cdot]_1$ и $\|\cdot\|_1$ ($[\cdot,\cdot]_2$ и $\|\cdot\|_2$) скобка Ли и норма вектора в метрической алгебре Ли $\mathfrak{s}_1$ ($\mathfrak{s}_2$). Отметим, что при изоморфизме идеалы одной алгебры должны переходить в соответствующие идеалы другой алгебры и, кроме того, ортогональные дополнения к идеалам должны переходить в соответствующие ортогональные дополнения.

Понятно, что изоморфные метрические алгебры являются изометричными. Обратное, вообще говоря, неверно [2, 11].

Поскольку нильпотентные алгебры являются унимодулярными, то для вычисления кривизны Риччи справедлива следующая формула:

$$\mathrm{Ric}(X,X) = -\frac{1}{2}\sum_i |[X,X_i]|^2 - \frac{1}{2}B(X,X) + \frac{1}{4}\sum_{i,j}([X_i,X_j],X)^2, \tag{2}$$

где через B обозначена форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{s}$, а $\{X_i\}$ — ортонормированный относительно заданного скалярного произведения базис в $\mathfrak{s}$ [3].

Иногда более удобной является формула для оператора Риччи

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\sum_i \mathrm{ad}'_{X_i}\mathrm{ad}_{X_i} + \frac{1}{4}\sum_i \mathrm{ad}_{X_i}\mathrm{ad}'_{X_i} - \frac{1}{2}B, \tag{3}$$

где через ad'_{X_i} обозначается оператор, сопряженный оператору ad_{X_i} относительно $(\cdot,\cdot)$ [2].

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Определение 5. *Разрешимая алгебра Ли* $\mathfrak{s}$ *называется вполне разрешимой, если все операторы* $\mathrm{ad}(Z)$, $Z \in \mathfrak{s}$, *имеют только вещественные собственные значения. Это эквивалентно тому, что существует базис в* $\mathfrak{s}$, *в котором* $\mathrm{ad}(Z)$ *одновременно представляются в виде верхних треугольных матриц.*

Следует отметить, что нильпотентные метрические алгебры Ли являются вполне разрешимыми. Значение введенного выше понятия видно из следующего предложения.

Предложение 1 (Д. В. Алексеевский, [1]). *Две метрические вполне разрешимые алгебры Ли* $(\mathfrak{s}, Q)$ *и* $(\tilde{\mathfrak{s}}, \tilde{Q})$ *изометричны тогда и только тогда, когда они изоморфны.*

Описание всех некоммутативных нильпотентных метрических алгебр Ли размерности ≤ 4 получено в [2].

Предложение 2 (Д. В. Алексеевский, [2]). *Следующий список содержит все, с точностью до изоморфизма, нильпотентные некоммутативные метрические алгебры* $\mathcal{N}$ *размерности, не большей* 4. *Для каждой алгебры* $\mathcal{N}$ *указан канонический ортонормированный базис и центр* $\mathcal{Z}(\mathcal{N})$, *а также приведены вид оператора Риччи* Ric *и алгебра Ли* $\mathrm{Der}(\mathcal{N})$ *всех дифференцирований в каноническом базисе.*

1) $\mathcal{N}^3(\varepsilon) = \{X, Y, Z\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^3(\varepsilon)) = \{Z\}$, $[X, Y] = \varepsilon Z$, $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}\ -\frac{1}{2}\varepsilon^2, -\frac{1}{2}\varepsilon^2, \frac{1}{2}\varepsilon^2$,

$$\mathrm{Der}(\mathcal{N}^3(\varepsilon)) = \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ b & \mu & 0 \\ c & d & \nu \end{pmatrix},\ \nu = \lambda + \mu \right\}.$$

2) $\mathcal{N}^4(\varepsilon) = \mathcal{N}^3(\varepsilon) \oplus \mathbb{R} = \{X, Y, Z, U\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^4(\varepsilon)) = \{Z, U\}$, $[X, Y] = \varepsilon Z$, $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}\ -\frac{1}{2}\varepsilon^2, -\frac{1}{2}\varepsilon^2, \frac{1}{2}\varepsilon^2, 0$,

$$\mathrm{Der}(\mathcal{N}^4(\varepsilon)) = \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 \\ c & d & \nu & g \\ e & f & 0 & \kappa \end{pmatrix},\ \nu = \lambda + \mu \right\}.$$

3) $\mathcal{N}^4(\varepsilon, \delta, \tau) = \{X, Y, U, Z\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^4(\varepsilon, \delta, \tau)) = \{Z\}$, $[X, Y] = \varepsilon U + \tau Z$, $[X, U] = \delta Z$, $[Y, U] = 0$ $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geq 0$,

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 + \delta^2 + \tau^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 + \tau^2 & \tau\delta & 0 \\ 0 & \tau\delta & \delta^2 - \varepsilon^2 & -\varepsilon\tau \\ 0 & 0 & -\varepsilon\tau & -\tau^2 - \delta^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Der}(\mathcal{N}^4(\varepsilon, \delta, \tau)) = \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & \mu & 0 & 0 \\ b & c & \nu & 0 \\ d & e & f & \kappa \end{pmatrix},\ \begin{array}{l} \nu = \lambda + \mu, \\ \kappa = 2\lambda + \mu, \\ \lambda\tau + \varepsilon f - c\delta = 0 \end{array} \right\}.$$

Определение 6. *Метрическая разрешимая алгебра Ли* $(\mathfrak{s}, Q)$ *называется стандартной, если ортогональное дополнение* $\mathfrak{a}$ *к* $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ *относительно* Q *является абелевой подалгеброй алгебры* $\mathfrak{s}$.

Определение 7 ([9]). *Метрическая неунимодулярная разрешимая алгебра Ли* $(\mathfrak{s}, Q)$ *называется расширением метрической нильпотентной алгебры Ли* $(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{Q})$, *если* $(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{Q})$ *изометрична метрической алгебре Ли* $(\mathfrak{n}, Q|_{\mathfrak{n}})$, *где* $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. *Расширение называется (стандартным) эйнштейновым, если* $(\mathfrak{s}, Q)$ *является (стандартной) эйнштейновой метрической алгеброй Ли.*

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся, найденные в работе [9], достаточные условия стандартности эйнштейновых расширений разрешимых метрических алгебр Ли.

Для метрической нильпотентной алгебры Ли $(\mathfrak{n}, Q)$ и произвольного оператора $A : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ через A' будем обозначать оператор, сопряженный к A относительно скалярного произведения Q.

Теорема 2 ([9]). *Пусть $(\mathfrak{n}, Q)$ – метрическая нильпотентная алгебра Ли, $\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}$ – соответствующий ей оператор кривизны Риччи. Допустим, что существует симметричный (относительно Q) положительно определенный оператор $S : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ такой, что для каждого дифференцирования $A : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{n}$ выполняются неравенства*

$$\mathrm{trace}(S \cdot [A, A']) = \mathrm{trace}(S \cdot (A \cdot A' - A' \cdot A)) \geq 0, \tag{4}$$

$$\mathrm{trace}(S \cdot \mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}) + \mathrm{trace}(S) \cdot \mathrm{trace}(A^s \cdot A^s) - \mathrm{trace}(A^s)\,\mathrm{trace}(S \cdot A^s) \geq 0, \tag{5}$$

где $A^s = 1/2(A' + A)$. Тогда любое эйнштейново расширение $(\mathfrak{n}, Q)$ является стандартным. Если к тому же в (5) выполняется строгое неравенство для всех дифференцирований A, то $(\mathfrak{n}, Q)$ не допускает эйнштейновых расширений.

В следующей лемме мы укажем достаточные условия выполнения неравенства (4).

Лемма 1 ([9]). *Пусть $(e_1, \ldots, e_l)$ ортонормированный базис в $(\mathfrak{n}, Q)$, в котором симметричный положительно определенный оператор S имеет диагональный вид, $S = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_l)$. Допустим, что матрица (a_{ij}) оператора дифференцирования A алгебры $\mathfrak{n}$ в этом базисе обладает следующим свойством: если $a_{ij} \neq 0$, то $s_i \geq s_j$. Тогда $\mathrm{trace}(S \cdot [A, A']) \geq 0$.*

Замечательное свойство стандартных эйнштейновых метрических алгебр Ли выражается следующим утверждением.

Предложение 3 (Й. Хебер, [11]). *Пусть $\mathfrak{s}$ — неунимодулярная разрешимая алгебра Ли, снабженная стандартным эйнштейновой скалярным произведением Q, $\mathfrak{a}$ — абелево ортогональное дополнение к $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ относительно Q, вектор $H \in \mathfrak{a}$ такой, что $Q(H, X) = \mathrm{trace}(\mathrm{ad}(X))$ для всех $X \in \mathfrak{s}$. Тогда для некоторого положительного λ оператор $\mathrm{ad}(\lambda H)|_{\mathfrak{n}}$ имеет собственные значения, вещественные части которых $\mu_1 < \ldots < \mu_m$ являются натуральными числами с наибольшим общим делителем 1.*

Если обозначить через d_i кратность соответствующего собственного значения, то можно определить спектральный тип стандартного эйнштейнова солвмногообразия как набор

$$(\mu_1 < \ldots < \mu_m; d_1, \ldots, d_m).$$

В работе [11] Й. Хебер показал, что спектральный тип является инвариантом относительно изометрий и подобий. Кроме того, в каждой размерности реализуются лишь конечное число спектральных типов.

Дополнительные сведения об эйнштейновых разрешимых метрических алгебрах Ли можно получить из работ [2, 9, 11].

3. Классификация пятимерных нильпотентных метрических алгебр Ли

Для изучения эйнштейновых расширений пятимерных вещественных метрических нильпотентных алгебр Ли нам понадобится классификация соответствующих метрических алгебр Ли. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Следующий список содержит все с точностью до изоморфизма нильпотентные некоммутативные метрические алгебры Ли $\mathcal{N}$ размерности 5. Для каждой алгебры $\mathcal{N}$ указан канонический ортонормированный базис, нетривиальные коммутаторы базисных векторов и центр $\mathcal{Z}(\mathcal{N})$, кроме того, в таблице 1 приведен* *вид оператора Риччи* Ric, *а в таблице 2 – алгебра Ли* $\mathrm{Der}(\mathcal{N})$ *всех дифференцирований в каноническом базисе.*

1) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma))=\{X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_5$, $[X_3,X_4]=\sigma X_5$, $\varepsilon\geq\sigma>0$,

2) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho))=\{X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\gamma X_5$, $[X_1,X_4]=\sigma X_5$, $[X_2,X_3]=\rho X_5$, $\varepsilon>0$, $\sigma>0$, $\rho>0$, $\upsilon\geq 0$, $\gamma\geq 0$,

3) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma))=\{X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\delta X_4+\gamma X_5$, $[X_1,X_4]=\sigma X_5$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $\tau\geq 0$, $\sigma>0$ (*если* $\tau=0$, *то* $\gamma\geq 0$),

4) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho))=\{X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\delta X_4+\gamma X_5$, $[X_1,X_4]=\sigma X_5$, $[X_2,X_3]=\rho X_5$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $\tau\geq 0$, $\sigma>0$, $\rho>0$ (*если* $\tau=0$, *то* $\gamma\geq 0$),

5) $\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma))=\{X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\delta X_4$, $[X_1,X_3]=\sigma X_5$, $\delta\geq\sigma>0$,

6) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma))=\{X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\gamma X_4$, $\varepsilon>0$, $\tau\geq 0$, $\upsilon\geq 0$, $\gamma>0$,

7a) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma))=\{X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4$, $[X_1,X_3]=\gamma X_4$, $[X_2,X_3]=\gamma X_5$, $\varepsilon>0$, $\tau\geq 0$, $\gamma>0$,

7b) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho))=\{X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\gamma X_4$, $[X_2,X_3]=\rho X_5$, $\varepsilon>0$, $\tau\geq 0$, $\upsilon\geq 0$, $\gamma>\rho>0$,

8) $\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_3^5(\varepsilon))=\{X_3,X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3$, $\varepsilon>0$.

Все перечисленные метрические алгебры Ли являются попарно неизоморфными между собой, более того, алгебры из разных пунктов неизоморфны даже как неметрические. Параметры, которые фигурируют в определении вышеприведенных метрических алгебр Ли, являются вещественными. Если в описании не указано дополнительных ограничений, то они могут принимать любые значения.

Замечание 2. *Хорошо известна классификация неметрических вещественных алгебр Ли размерности* 5. *Для каждой алгебры из формулировки теоремы 3 мы в таблице 3 указываем явный вид ее изоморфизма на каноническую алгебру Ли того же типа. Точнее, в последнем столбце таблицы 3 приведена матрица* (a_{ij}) *такая, что нужный изоморфизм получается переходом от базиса* $\{e_i\}$ *к базису* $\{X_i\}$ *вида* $X_i=\sum_{j=1}^5 a_{ij}e_j$.

Замечание 3. *В пункте 2 теоремы 3 приведены метрические алгебры Ли, задаваемые подходящими скалярными произведениями на алгебре Ли* $\tilde{\mathfrak{n}}$ *(см. (1)).*

Основная идея доказательства теоремы заключается в следующем: центр нильпотентной алгебры Ли не тривиален, а фактор-алгебра нильпотентной алгебры Ли по ее центру будет нильпотентной алгеброй Ли меньшей размерности. Основываясь на этом наблюдении и вышеприведенной классификации Д.В. Алексеевского нильпотентных некоммутативных метрических алгебр Ли размерности ≤ 4, мы получим основной результат настоящей работы, для чего предварительно доказываем ряд вспомогательных утверждений. Нетрудно показать, что центр пятимерной некоммутативной нильпотентной метрической алгебры Ли может быть одно-, двух- или трехмерным.

Если $\dim\mathcal{Z}(\mathcal{N})=1$, то фактор-алгебра $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ (рассматриваемая как метрическая алгебра Ли) может быть либо коммутативной алгеброй, либо она изоморфна $\mathcal{N}^4(\varepsilon)$, либо изоморфна $\mathcal{N}^4(\varepsilon,\delta,\tau)$.

Если $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ - коммутативная алгебра, то справедлива следующая

Таблица 1

№	Оператор Риччи
1	$-\frac{1}{2}\operatorname{diag}\ \varepsilon^2, \varepsilon^2, \sigma^2, \sigma^2, -\varepsilon^2-\sigma^2$
2	$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & \gamma\rho & -\upsilon\rho & 0 & 0 \\ \gamma\rho & B & \upsilon\gamma & \upsilon\sigma & 0 \\ -\upsilon\rho & \upsilon\gamma & C & \gamma\sigma & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & \upsilon\sigma & \gamma\sigma & D & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & 0 & -E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2, B=\varepsilon^2+\upsilon^2+\rho^2,$ $C=\gamma^2+\rho^2-\varepsilon^2, D=\sigma^2, E=\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2+\rho^2$
3	$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & F & \upsilon\sigma & 0 \\ 0 & F & C & G & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & \upsilon\sigma & G & D & -H \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -H & -E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\delta^2+\gamma^2+\sigma^2, B=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2, C=\delta^2+\gamma^2-\varepsilon^2,$ $D=\sigma^2-\tau^2-\delta^2, E=\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2, F=\tau\delta+\upsilon\gamma, G=\gamma\sigma-\varepsilon\tau, H=\tau\upsilon+\delta\gamma$
4	$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & \gamma\rho & -\upsilon\rho & 0 & 0 \\ \gamma\rho & B & F & \upsilon\sigma & 0 \\ -\upsilon\rho & F & C & G & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & \upsilon\sigma & G & D & -H \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -H & -E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\delta^2+\gamma^2+\sigma^2, B=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\rho^2, C=\delta^2+\gamma^2+\rho^2-\varepsilon^2,$ $D=\sigma^2-\tau^2-\delta^2, E=\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2+\rho^2, F=\tau\delta+\upsilon\gamma, G=\gamma\sigma-\varepsilon\tau, H=\tau\upsilon+\delta\gamma$
5	$-\frac{1}{2}\operatorname{diag}\ \sigma^2+\delta^2, \delta^2, \sigma^2, -\delta^2, -\sigma^2$
6	$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & \tau\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \tau\gamma & C & -\varepsilon\tau & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon\tau & -D & -\tau\upsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -\tau\upsilon & -E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\gamma^2, B=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2,$ $C=\gamma^2-\varepsilon^2, D=\tau^2+\gamma^2, E=\upsilon^2$
7a	$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & \tau\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \tau\gamma & B & -\varepsilon\tau & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon\tau & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\gamma^2, B=2\gamma^2-\varepsilon^2,$ $C=\tau^2+\gamma^2, D=\gamma^2$
7b	$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & 0 & -\upsilon\rho & 0 & 0 \\ 0 & B & \tau\gamma & 0 & 0 \\ -\upsilon\rho & \tau\gamma & C & -\varepsilon\tau & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon\tau & -D & -\tau\upsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -\tau\upsilon & -E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\gamma^2, B=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\rho^2,$ $C=\gamma^2+\rho^2-\varepsilon^2, D=\tau^2+\gamma^2, E=\upsilon^2+\rho^2$
8	$-\frac{1}{2}\operatorname{diag}\ \varepsilon^2, \varepsilon^2, -\varepsilon^2, 0, 0$

Лемма 2. *Пусть* $\dim\mathcal{N}=5$, $\dim\mathcal{Z}(\mathcal{N})=1$ *и* $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ *- коммутативная алгебра, тогда* $\mathcal{N}$ *изоморфна метрической алгебре Ли* $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma)$, *задающейся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе* $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$*:* $[X_1,X_2]=\varepsilon X_5$, $[X_3,X_4]=\sigma X_5$, $\varepsilon\geq\sigma>0$, *где* $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma))=\{X_5\}$.

Оператор Риччи Ric *имеет вид*

$$\mathrm{Ric}=-\frac{1}{2}\operatorname{diag}\ \varepsilon^2,\varepsilon^2,\sigma^2,\sigma^2,-\varepsilon^2-\sigma^2\ .$$

Таблица 2

№	Алгебра дифференцирований	Дополнительные условия для дифференцирований
1	$\begin{pmatrix} \lambda & a & n & p & 0 \\ b & \mu & q & r & 0 \\ c & d & \nu & s & 0 \\ e & f & g & \kappa & 0 \\ h & k & l & m & \eta \end{pmatrix}$	$\eta = \lambda + \mu, \eta = \nu + \kappa,$ $r\varepsilon + c\sigma = 0, q\varepsilon - e\sigma = 0,$ $n\varepsilon + f\sigma = 0, p\varepsilon - d\sigma = 0$
2	$\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \nu & m & 0 \\ e & f & 0 & \kappa & 0 \\ g & h & k & l & \eta \end{pmatrix}$	$\nu = \lambda + \mu,$ $\kappa = 2(\eta - \nu),$ $a\sigma + m\rho = 0,$ $(\mu + \nu - \eta)\rho + a\gamma = 0,$ $(\lambda + \nu - \eta)\gamma + b\rho = 0,$ $(\nu - \eta)\upsilon + d\gamma - c\rho - k\varepsilon + f\sigma = 0$
3	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & \mu & 0 & 0 & 0 \\ b & c & \nu & 0 & 0 \\ d & e & f & \kappa & 0 \\ g & h & k & l & \eta \end{pmatrix}$	$\nu = \lambda + \mu,$ $\kappa = 2\lambda + \mu,$ $\eta = 3\lambda + \mu,$ $f\varepsilon + \lambda\tau - c\delta = 0,$ $l\delta - f\sigma + \lambda\gamma = 0,$ $k\varepsilon - e\sigma + 2\lambda\upsilon + l\tau - c\gamma = 0$
4	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 3\lambda & 0 & 0 \\ d & e & f & 4\lambda & 0 \\ g & h & k & l & 5\lambda \end{pmatrix}$	$f\varepsilon + \lambda\tau - c\delta = 0,$ $l\delta - f\sigma + \lambda\gamma - a\rho = 0,$ $k\varepsilon - e\sigma + 2\lambda\upsilon + l\tau - c\gamma + b\rho = 0$
5	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & \mu & b & 0 & 0 \\ c & d & \nu & 0 & 0 \\ e & f & g & \kappa & n \\ h & k & l & m & \eta \end{pmatrix}$	$\kappa = \lambda + \mu,$ $\eta = \lambda + \nu,$ $m\delta - d\sigma = 0,$ $n\sigma - b\delta = 0$
6	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \nu & 0 & 0 \\ e & f & g & \kappa & n \\ h & k & l & 0 & \eta \end{pmatrix}$	$\nu = \lambda + \mu,$ $\kappa = 2\lambda + \mu = 0,$ $g\varepsilon + \lambda\tau + n\upsilon - d\gamma = 0,$ $l\varepsilon + \upsilon(\eta - \nu) = 0$
7a	$\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \nu & 0 & 0 \\ e & f & g & \kappa & a \\ h & k & l & b & \eta \end{pmatrix}$	$\nu = \lambda + \mu,$ $\kappa = 2\lambda + \mu,$ $\eta = \lambda + 2\mu,$ $g\varepsilon + \lambda\tau - d\gamma = 0,$ $l\varepsilon + b\tau + c\gamma = 0$
7b	$\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \nu & 0 & 0 \\ e & f & g & \kappa & n \\ h & k & l & m & \eta \end{pmatrix}$	$\nu = \lambda + \mu,$ $\kappa = 2\lambda + \mu, n\rho - a\gamma = 0,$ $\eta = \lambda + 2\mu, m\gamma - b\rho = 0,$ $g\varepsilon + \lambda\tau + n\upsilon - d\gamma = 0,$ $l\varepsilon + \mu\upsilon + m\tau + c\rho = 0$
8	$\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \nu & k & l \\ e & f & 0 & \kappa & m \\ g & h & 0 & n & \eta \end{pmatrix}$	$\nu = \lambda + \mu$

Алгебра всех дифференцирований имеет вид

$$\mathrm{Der}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma)) = \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & a & n & p & 0 \\ b & \mu & q & r & 0 \\ c & d & \nu & s & 0 \\ e & f & g & \kappa & 0 \\ h & k & l & m & \eta \end{pmatrix}, \begin{array}{l} \eta = \lambda + \mu, \\ \eta = \nu + \kappa, \\ r\varepsilon + c\sigma = 0, \\ q\varepsilon - e\sigma = 0, \\ n\varepsilon + f\sigma = 0, \\ p\varepsilon - d\sigma = 0 \end{array} \right\}.$$

Таблица 3

№	Название	Стандартный представитель	Изоморфизм
1	$\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma)$	$[e_1,e_2]=e_5,\ [e_3,e_4]=e_5$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$
2	$\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_5,$ $[e_2,e_3]=e_5$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\rho} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma}{\rho\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\upsilon}{\rho\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$
3	$\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma)$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_5$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tau}{\varepsilon^2\delta} & \frac{1}{\delta\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & A & -B & \frac{1}{\delta\varepsilon\sigma} \end{pmatrix},$ $A=\frac{\tau\gamma\varepsilon+\tau^2\sigma-\upsilon\delta\varepsilon}{\sigma\delta^2\varepsilon^2}, B=\frac{\gamma\varepsilon+\tau\sigma}{\delta^2\sigma\varepsilon^2}$
4	$\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_5$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{\sigma\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\sigma\delta\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho\tau}{\sigma\varepsilon^2\delta^2} & \frac{\rho}{\sigma\varepsilon\delta^2} & 0 \\ 0 & 0 & A & -B & \frac{\rho}{\sigma^2\delta^2\varepsilon} \end{pmatrix},$ $A=\frac{\rho(\tau\gamma\varepsilon+\tau^2\sigma-\upsilon\delta\varepsilon)}{\sigma^2\delta^3\varepsilon^3}, B=\frac{\rho(\gamma\varepsilon+\tau\sigma)}{\varepsilon^2\delta^3\sigma^2}$
5	$\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma)$	$[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=e_5$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix}$
6	$\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma)$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{\gamma\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\upsilon}{\varepsilon} & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7a	$\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma)$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,$ $[e_2,e_3]=e_5$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tau}{\varepsilon^2\gamma} & \frac{1}{\varepsilon\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon\gamma} \end{pmatrix}$
7b	$\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,$ $[e_2,e_3]=e_5$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tau}{\varepsilon^2\gamma} & \frac{1}{\varepsilon\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\upsilon}{\varepsilon^2\rho} & 0 & \frac{1}{\varepsilon\rho} \end{pmatrix}$
8	$\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$	$[e_1,e_2]=e_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Данные метрические алгебры Ли являются попарно неизометричными.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная метрическая алгебра Ли, удовлетворяющая условию леммы. Рассмотрим теперь метрическую алгебру Ли

$\mathcal{N}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, задающуюся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = c_1 X_5$, $[X_1, X_3] = c_2 X_5$, $[X_1, X_4] = c_3 X_5$, $[X_1, X_5] = 0$, $[X_2, X_3] = c_4 X_5$, $[X_2, X_4] = c_5 X_5$, $[X_2, X_5] = 0$, $[X_3, X_4] = c_6 X_5$, $[X_3, X_5] = 0$, $[X_4, X_5] = 0$. Понятно, что в этом классе содержатся все интересующие нас метрические алгебры Ли $\mathcal{N}$.

Обозначим ортогональное дополнение к центру $\mathcal{Z}$ через $\mathcal{A}$. Каждый вектор x из $\mathcal{A}$ мы естественным образом отождествим с соответствующим классом эквивалентности в фактор-алгебре. Такое соответствие очевидно является взаимно-однозначным. Рассмотрим функцию $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ([x, y], z)$. Найдем ее максимум при следующих ограничениях: $x, y \in \mathcal{A}$, $z \in \mathcal{Z}$, $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$, $(x, y) = 0$. Поскольку областью определения является компакт, то функция достигает своего наибольшего значения. Пусть максимум функции достигается при $x = e_1, y = e_2, z = e_5$, и при этом максимальное значение f равно $\varepsilon = ([e_1, e_2], e_5) > 0$. Рассмотрим вектор e_3, ортогональный e_1 и e_2. Предположим, что $([e_3, e_2], e_5) = c \neq 0$. Рассмотрим $\tilde{e}_1$, определенный следующим образом: $\tilde{e}_1 = \cos(\alpha) e_1 + \sin(\alpha) e_3$. Тогда $f(\tilde{e}_1, e_2, e_5) = ([\tilde{e}_1, e_2], e_5) = \cos(\alpha)\varepsilon + \sin(\alpha) c = g(\alpha)$. Таким образом, $g' = -\sin(\alpha) a + \cos(\alpha) c$, и в точке $\alpha = 0$ (точке максимума) $g'(0) = 0$. Следовательно, $c = 0$. Рассмотрим два взаимно ортогональных вектора единичной длины e_3 и e_4, каждый из которых, в свою очередь, ортогонален векторам e_1 и e_2. Пусть $([e_3, e_4], e_5) = \sigma$. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma > 0$ (в случае $\sigma < 0$ можно поменять местами e_3 и e_4, если же $\sigma = 0$, то вектора e_3 и e_4 попадают в центр). Можно отметить, что $\varepsilon \geq \sigma > 0$. Следовательно, любая алгебра типа $\mathfrak{s}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$ изометрична одной из алгебр вида $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma)$, заданной следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = \varepsilon X_5$, $[X_1, X_3] = 0$, $[X_1, X_4] = 0$, $[X_1, X_5] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$, $[X_2, X_4] = 0$, $[X_2, X_5] = 0$, $[X_3, X_4] = \sigma X_5$, $[X_3, X_5] = 0$, $[X_4, X_5] = 0$, где $\varepsilon \geq \sigma > 0$. Оператор Риччи вычисляется по формуле (3). Алгебра дифференцирований находится непосредственно.

По самому выбору ε и σ являются инвариантами метрической алгебры Ли. Следовательно, разные значения ε и σ соответствуют неизометричным метрическим алгебрам Ли.

Если $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ изоморфна $\mathcal{N}^4(\varepsilon)$, то справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть* $\dim \mathcal{N} = 5$ *и* $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ *изоморфна* $\mathcal{N}^4(\varepsilon)$, *тогда* $\mathcal{N}$ *изоморфна метрической алгебре Ли* $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$, *задающейся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе* $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = \varepsilon X_3 + \upsilon X_5$, $[X_1, X_3] = \gamma X_5$, $[X_1, X_4] = \sigma X_5$, $[X_2, X_3] = \rho X_5$, $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $\upsilon \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\rho > 0$, *где* $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)) = \{X_5\}$.

Оператор Риччи Ric *имеет вид*

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & \gamma\rho & -\upsilon\rho & 0 & 0 \\ \gamma\rho & B & \upsilon\gamma & \upsilon\sigma & 0 \\ -\upsilon\rho & \upsilon\gamma & C & \gamma\sigma & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & \upsilon\sigma & \gamma\sigma & D & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & 0 & -E \end{pmatrix},$$

где $A = \varepsilon^2 + \upsilon^2 + \gamma^2 + \sigma^2$, $B = \varepsilon^2 + \upsilon^2 + \rho^2$, $C = \gamma^2 + \rho^2 - \varepsilon^2$, $D = \sigma^2$, $E = \upsilon^2 + \gamma^2 + \sigma^2 + \rho^2$.

Алгебра всех дифференцирований имеет вид $\mathrm{Der}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)) =$

$$= \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \nu & m & 0 \\ e & f & 0 & \kappa & 0 \\ g & h & k & l & \eta \end{pmatrix}, \begin{array}{l} \nu = \lambda + \mu, \\ a\sigma + m\rho = 0, \\ \kappa = 2(\eta - \nu), \\ (\mu + \nu - \eta)\rho + a\gamma = 0, \\ (\lambda + \nu - \eta)\gamma + b\rho = 0, \\ (\nu - \eta)\upsilon + d\gamma - c\rho - k\varepsilon + f\sigma = 0 \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная метрическая алгебра Ли, удовлетворяющая условию леммы. Рассмотрим теперь метрическую алгебру Ли $\mathcal{N}(\varepsilon, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ задающуюся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = \varepsilon X_3 + c_1 X_5$, $[X_1, X_3] = c_2 X_5$, $[X_1, X_4] = c_3 X_5$, $[X_1, X_5] = 0$, $[X_2, X_3] = c_4 X_5$, $[X_2, X_4] = c_5 X_5$, $[X_2, X_5] = 0$, $[X_3, X_4] = 0$, $[X_3, X_5] = 0$, $[X_4, X_5] = 0$. Понятно, что $\mathcal{N}$ изоморфна одной из метрических алгебр Ли такого типа.

Без ограничения общности мы можем заменить базисные векторы X_1 и X_2 на векторы $X_1(\varphi) = \cos(\varphi) X_1 + \sin(\varphi) X_2$, $X_2(\varphi) = -\sin(\varphi) X_1 + \cos(\varphi) X_2$. Мы выберем φ таким образом, чтобы $c_5 = 0$ в новом базисе. Для этого достаточно выбрать φ, удовлетворяющее уравнению $-c_3 \sin(\varphi) + c_5 \cos(\varphi) = 0$. Также можно считать, что $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_3 > 0, c_4 > 0$. Действительно, если $c_1 < 0$, то можно заменить базис $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ на базис $\{-X_1, -X_2, X_3, X_4, -X_5\}$. Если $c_2 < 0$, то можно заменить базис $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ на базис $\{-X_1, X_2, -X_3, X_4, -X_5\}$. Заметим, что если $c_3 = 0$, то вектор X_4 попадает в центр, так как $[X_1, X_4] = 0$. Если же $c_3 < 0$, то можно заменить базис $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ на базис $\{X_1, X_2, X_3, -X_4, X_5\}$. Отметим, что если $c_4 = 0$, то вектор $\tilde{X} = c_2 X_4 - c_3 X_3$ попадает в центр, поскольку $[X_1, \tilde{X}] = 0$, $[X_2, \tilde{X}] = 0$, $[X_3, \tilde{X}] = 0$, $[X_4, \tilde{X}] = 0$. Если же $c_4 < 0$, то можно заменить базис $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ на базис $\{X_1, -X_2, -X_3, -X_4, -X_5\}$.

Следовательно, любая алгебра типа $\mathcal{N}(\varepsilon, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ изометрична одной из алгебр типа $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$, заданной следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = \varepsilon X_3 + \upsilon X_5$, $[X_1, X_3] = \gamma X_5$, $[X_1, X_4] = \sigma X_5$, $[X_1, X_5] = 0$, $[X_2, X_3] = \rho X_5$, $[X_2, X_4] = 0$, $[X_2, X_5] = 0$, $[X_3, X_4] = 0$, $[X_3, X_5] = 0$, $[X_4, X_5] = 0$, где $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $\upsilon \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\rho > 0$. Оператор Риччи вычисляется по формуле (3). Алгебра дифференцирований находится непосредственно.

Лемма 4. *(Критерий изометричности двух алгебр типа $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$) Две алгебры $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho))$ и $\mathcal{N}_1^5(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$ изометричны, если и только если, выполняется равенство $(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho) = (\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho))$ и $\mathcal{N}_1^5(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$ изометричны, тогда они изоморфны согласно предложению 1. Пользуясь замечанием 1, представим изоморфизм $Q : \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho) \to \mathcal{N}_1^5(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$ в матричном виде (мы выбираем канонический базис $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ алгебры $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$ и канонический базис $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4, \tilde{X}_5\}$ алгебры $\mathcal{N}_1^5(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$):

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & q_{14} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & q_{24} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 \\ q_{41} & q_{42} & 0 & q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} \end{pmatrix}$$

Система уравнений, описывающая изоморфизм Q, легко выписывается в явном виде. Все уравнения этой системы зависят от структурных констант рассматриваемых метрических алгебр Ли и элементов матрицы Q. Из-за громоздкости формул мы перечислим только те, которые нам понадобятся.

Из равенств $Q([X_1, X_4]_1) = [Q(X_1), Q(X_4)]_2$ и $Q([X_2, X_4]_1) = [Q(X_2), Q(X_4)]_2$ следует, что

$$q_{55}\sigma\tilde{X}_5 = (q_{11}q_{24} - q_{21}q_{14})\tilde{\varepsilon}\tilde{X}_3 + ((q_{11}q_{24} - q_{21}q_{14})\tilde{\upsilon} + (q_{11}q_{44} - q_{41}q_{14})\tilde{\sigma})\tilde{X}_5, \tag{6}$$

$$0 = (q_{12}q_{24} - q_{22}q_{14})\tilde{\varepsilon}\tilde{X}_3 + ((q_{12}q_{24} - q_{22}q_{14})\tilde{\upsilon} + (q_{12}q_{44} - q_{42}q_{14})\tilde{\sigma})\tilde{X}_5 \tag{7}$$

соответственно.

Так как $\tilde{\varepsilon} > 0$, то $q_{11}q_{24} - q_{21}q_{14} = 0$, $q_{12}q_{24} - q_{22}q_{14} = 0$. Поэтому, либо вектор (q_{14}, q_{24}) нулевой, либо при некоторых α, β выполняются равенства $q_{11} = \alpha q_{14}$,

$q_{21} = \alpha q_{24}$, $q_{12} = \beta q_{14}$, $q_{22} = \beta q_{24}$. В силу ортогональности Q получаем $q_{11}q_{21}+q_{12}q_{22}+q_{14}q_{24} = q_{14}q_{24}(1+\alpha^2+\beta^2) = 0$. Таким образом, $q_{14}q_{24} = 0$, откуда с учетом предыдущих равенств следует, что $q_{14} = q_{24} = 0$, а также и $q_{41} = q_{42} = 0$. Из равенства (7) получаем $q_{12}q_{44}\tilde{\sigma} = 0$, что влечет $q_{12} = 0$, и, следовательно, $q_{21} = 0$. Окончательно получаем, что матрица Q диагональная. Следовательно, соответствующие параметры алгебр равны по модулю, а в силу того, что они имеют одинаковый знак, они просто попарно совпадают. В обратную сторону утверждение леммы очевидно.

Если $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ изоморфна $\mathcal{N}^4(\varepsilon,\delta,\tau)$, то справедлива следующая

Лемма 5. *Пусть* $\dim\mathcal{N} = 5$ *и* $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ *изоморфна* $\mathcal{N}^4(\varepsilon,\delta,\tau)$, *тогда* $\mathcal{N}$ *изоморфна метрической алгебре Ли* $\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$, *задающейся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе* $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, *где* $\mathcal{Z}(\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)) = \{X_5\}$: $[X_1,X_2] = \varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3] = \delta X_4+\gamma X_5$, $[X_1,X_4] = \sigma X_5$, $[X_2,X_3] = \rho X_5$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geq 0$, $\sigma > 0$, $\rho \geq 0$. *Если при этом* $\tau = 0$, *то* $\gamma \geq 0$.

Оператор Риччи Ric *имеет вид*

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & \gamma\rho & -\upsilon\rho & 0 & 0 \\ \gamma\rho & B & \tau\delta+\upsilon\gamma & \upsilon\sigma & 0 \\ -\upsilon\rho & \tau\delta+\upsilon\gamma & C & \gamma\sigma-\varepsilon\tau & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & -\upsilon\sigma & \gamma\sigma-\varepsilon\tau & D & -\tau\upsilon-\delta\gamma \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -\tau\upsilon-\delta\gamma & -E \end{pmatrix},$$

где $A = \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\delta^2+\gamma^2+\sigma^2$, $B = \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\rho^2$, $C = \delta^2+\gamma^2+\rho^2-\varepsilon^2$, $D = \sigma^2-\tau^2-\delta^2$, $E = \upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2+\rho^2$.

Алгебра всех дифференцирований имеет вид $\mathrm{Der}(\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)) =$

$$= \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & \mu & 0 & 0 & 0 \\ b & c & \nu & 0 & 0 \\ d & e & f & \kappa & 0 \\ g & h & k & l & \eta \end{pmatrix}, \begin{array}{l} \nu = \lambda+\mu, \\ \kappa = 2\lambda+\mu, \\ \eta = 3\lambda+\mu, \\ \rho(2\lambda-\mu) = 0, \\ f\varepsilon+\lambda\tau-c\delta = 0, \\ l\delta-f\sigma+\lambda\gamma-a\rho = 0, \\ k\varepsilon-e\sigma+2\lambda\upsilon+l\tau-c\gamma+b\rho = 0 \end{array} \right\}.$$

Замечание 4. *При* $\rho = 0$ *алгебра вида* $\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$ *соответствует алгебре вида 3), а при* $\rho > 0$ *алгебре вида 4) из формулировки теоремы 3.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная метрическая алгебра Ли, удовлетворяющая условию леммы. Рассмотрим теперь метрическую алгебру Ли $\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,c_1,c_2,c_3,c_4)$, задающуюся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$: $[X_1,X_2] = \varepsilon X_3+\tau X_4+c_1X_5$, $[X_1,X_3] = \delta X_4+c_2X_5$, $[X_1,X_4] = c_3X_5$, $[X_1,X_5] = 0$, $[X_2,X_3] = c_4X_5$, $[X_2,X_4] = 0$, $[X_2,X_5] = 0$, $[X_3,X_4] = 0$, $[X_3,X_5] = 0$, $[X_4,X_5] = 0$. Понятно, что в этом классе содержатся все интересующие нас алгебры $\mathcal{N}$.

Без ограничения общности можно считать, что $c_3 > 0, c_4 \geq 0$. Действительно, если $c_3 < 0$, то можно заменить базис $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ на базис $\{X_1,-X_2,-X_3,-X_4,X_5\}$. Если $c_3 = 0$, то вектор X_4 попадает в центр так как $[X_1,X_4] = 0$. Если $c_4 < 0$, то можно заменить базис $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ на базис $\{X_1,-X_2,-X_3,-X_4,-X_5\}$.

Следовательно, любая алгебра типа $\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,c_1,c_2,c_3,c_4)$ изометрична одной из алгебр типа $\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$, заданной следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$: $[X_1,X_2] = \varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3] = \delta X_4+\gamma X_5$, $[X_1,X_4] = \sigma X_5$, $[X_1,X_5] = 0$, $[X_2,X_3] = \rho X_5$, $[X_2,X_4] = 0$, $[X_2,X_5] = 0$, $[X_3,X_4] = 0$, $[X_3,X_5] = 0$, $[X_4,X_5] = 0$, где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geq 0$, $\sigma > 0$, $\rho \geq 0$.

Отметим теперь, что при $\tau = 0$ можно считать выполненным неравенство $\gamma \geq 0$. Действительно, в этом случае можно рассмотреть новый базис алгебры, задаваемой равенствами $\tilde{X}_1 = -X_1$, $\tilde{X}_2 = X_2$, $\tilde{X}_3 = -X_3$, $\tilde{X}_4 = X_4$, $\tilde{X}_5 = -X_5$. Легко убедиться в том, что в этом базисе из всех структурных констант изменится лишь γ (станет равным $-\gamma$). Поэтому при $\tau = 0$ можно считать выполненным неравенство $\gamma \geq 0$.

Оператор Риччи вычисляется по формуле (3). Алгебра дифференцирований находится непосредственно.

Лемма 6. *(Критерий изометричности двух алгебр типа $\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$) Две алгебры $\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$ и $\mathcal{N}(\tilde\varepsilon,\tilde\delta,\tilde\tau,\tilde\sigma,\tilde\upsilon,\tilde\gamma,\tilde\rho)$ изометричны, если и только если, выполняются равенства $(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho) = (\tilde\varepsilon,\tilde\delta,\tilde\tau,\tilde\sigma,\tilde\upsilon,\tilde\gamma,\tilde\rho)$.*

Замечание 5. *По существу в лемме 5 доказывается попарная неизометричность алгебр типа 3) и 4) из формулировки теоремы 3.*

Доказательство. Используя замечание 1, представим линейное отображение $Q : \mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho) \to \mathcal{N}(\tilde\varepsilon,\tilde\delta,\tilde\tau,\tilde\sigma,\tilde\upsilon,\tilde\gamma,\tilde\rho)$ в матричном виде (мы выбираем канонический базис $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ алгебры $\mathcal{N}(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$ и канонический базис $\{\tilde X_1,\tilde X_2,\tilde X_3,\tilde X_4,\tilde X_5\}$ алгебры $\mathcal{N}(\tilde\varepsilon,\tilde\delta,\tilde\tau,\tilde\sigma,\tilde\upsilon,\tilde\gamma,\tilde\rho)$):

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} \end{pmatrix}$$

Система уравнений, описывающая изоморфизм Q алгебры, легко выписывается в явном виде. Из-за громоздкости формул мы перечислим только те, которые нам понадобятся.

Из равенства $Q([X_2,X_3]_1) = [Q(X_2),Q(X_3)]_2$ следует, что $q_{55}\rho - q_{12}q_{33}\tilde\gamma - q_{22}q_{33}\tilde\rho = 0$, $q_{12}q_{33}\tilde\delta = 0$. Из последнего равенства следует, что $q_{12} = 0$. В силу ортогональности Q получаем $q_{21} = 0$. Матрица Q является одновременно диагональной и ортогональной, таким образом, $q_{ii} = \pm 1$ при $1 \leq i \leq 5$. Кроме того, $q_{55}\rho = q_{22}q_{33}\tilde\rho$, что влечет равенство $|\rho| = |\tilde\rho|$.

Из равенств $Q([X_1,X_2]_1) = [Q(X_1),Q(X_2)]_2$, $Q([X_1,X_3]_1) = [Q(X_1),Q(X_3)]_2$ и $Q([X_1,X_4]_1) = [Q(X_1),Q(X_4)]_2$ следует, что

$$\begin{aligned} &q_{33}\varepsilon - q_{11}q_{22}\tilde\varepsilon = 0,\ q_{44}\tau - q_{11}q_{22}\tilde\tau = 0,\ q_{55}\upsilon - q_{11}q_{22}\tilde\upsilon = 0, \\ &q_{44}\delta - q_{11}q_{33}\tilde\delta = 0,\ q_{55}\gamma - q_{11}q_{33}\tilde\gamma = 0,\ q_{55}\sigma - q_{11}q_{44}\tilde\sigma = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

С учетом того, что $q_{ii} = \pm 1$ при $1 \leq i \leq 5$, из равенств (8) вытекают равенства $|\varepsilon| = |\tilde\varepsilon|$, $|\tau| = |\tilde\tau|$, $|\upsilon| = |\tilde\upsilon|$, $|\delta| = |\tilde\delta|$, $|\gamma| = |\tilde\gamma|$ и $|\sigma| = |\tilde\sigma|$. Учитывая неотрицательность параметров ρ, $\tilde\rho$, ε, $\tilde\varepsilon$, τ, $\tilde\tau$, δ, $\tilde\delta$, σ и $\tilde\sigma$, мы получаем, что $(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\rho) = (\tilde\varepsilon,\tilde\delta,\tilde\tau,\tilde\sigma,\tilde\rho)$.

Поскольку $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\sigma > 0$, то из (8) следует, что $q_{33} = q_{11}q_{22}$, $q_{44} = q_{11}q_{33}$ и $q_{55} = q_{11}q_{44}$. Из этих равенств нетрудно получить $q_{22} = q_{44}$ и $q_{33} = q_{55}$. Значит, $q_{55} = q_{11}q_{44} = q_{11}q_{22}$. Привлекая теперь третье из равенств (8), получаем $\upsilon = \tilde\upsilon$.

Если теперь предположить, что $\tau = \tilde\tau > 0$, то из второго равенства (8) находим, что $q_{44} = q_{11}q_{22}$. Но тогда $q_{22} = q_{33} = q_{44} = q_{55}$ и $q_{11} = 1$. В частности, $q_{55} = q_{11}q_{33}$, что с учетом пятого из равенств (8) приводит к равенству $\gamma = \tilde\gamma$.

Если же $\tau = \tilde\tau = 0$, то $\gamma \geq 0$ и $\tilde\gamma \geq 0$. Поскольку при этом $|\gamma| = |\tilde\gamma|$, то и в этом случае получаем равенство $\gamma = \tilde\gamma$.

Таким образом, необходимость доказана. Достаточность очевидна.

Если $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{N}) = 2$, то фактор-алгебра $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ (рассматриваемая как метрическая алгебра Ли) может быть либо коммутативной, либо изоморфной $\mathcal{N}^3(\varepsilon)$.

Если $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ - коммутативная алгебра, то справедлива следующая

Лемма 7. *Пусть $\dim\mathcal{N} = 5$, $\dim\mathcal{Z}(\mathcal{N}) = 2$ и $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ коммутативная алгебра, тогда $\mathcal{N}$ изоморфна метрической алгебре Ли $\mathcal{N}^5_2(\delta,\sigma)$ задающейся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$: $[X_1,X_2] = \delta X_4$, $[X_1,X_3] = \sigma X_5$, $\delta \geq \sigma > 0$, где $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^5_2(\delta,\sigma)) = \{X_4,X_5\}$.*

Оператор Риччи Ric *имеет вид*

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\,\left(\delta^2+\sigma^2, \delta^2, \sigma^2, -\delta^2, -\sigma^2\right).$$

Алгебра всех дифференцирований имеет вид

$$\mathrm{Der}(\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma)) = \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & \mu & b & 0 & 0 \\ c & d & \nu & 0 & 0 \\ e & f & g & \kappa & n \\ h & k & l & m & \eta \end{pmatrix}, \begin{array}{l} \kappa = \lambda+\mu, \\ \eta = \lambda+\nu, \\ m\delta - d\sigma = 0, \\ n\sigma - b\delta = 0 \end{array} \right\}.$$

Данные метрические алгебры Ли являются попарно неизометричными.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная метрическая алгебра Ли, удовлетворяющая условию леммы. Рассмотрим теперь метрическую алгебру Ли $\mathcal{N}(c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3)$ задающуюся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$: $[X_1,X_2]=d_1X_4+c_1X_5$, $[X_1,X_3]=d_2X_4+c_2X_5$, $[X_1,X_4]=0$, $[X_1,X_5]=0$, $[X_2,X_3]=d_3X_4+c_3X_5$, $[X_2,X_4]=0$, $[X_2,X_5]=0$, $[X_3,X_4]=0$, $[X_3,X_5]=0$, $[X_4,X_5]=0$ Понятно, что $\mathcal{N}$ изоморфна одной из метрических алгебр Ли такого типа.

Обозначим ортогональное дополнение к центру $\mathcal{Z}$ через $\mathcal{A}$. Каждый вектор x из ортогонального дополнения $\mathcal{A}$ к центру мы естественным образом отождествим с соответствующим классом эквивалентности в фактор-алгебре. Такое соответствие очевидно является взаимно-однозначным. Рассмотрим функцию $f:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=([x,y],z)$. Найдем ее максимум при следующих ограничениях: $x,y\in\mathcal{A}$, $z\in\mathcal{Z}$, $\|x\|=\|y\|=\|z\|=1$, $(x,y)=0$. Поскольку областью определения является компакт, то функция достигает своего наибольшего значения. Пусть максимум функции достигается при $x=e_1, y=e_2, z=e_4$, и при этом максимальное значение f равно $\delta=([e_1,e_2],e_4)>0$. Очевидно, что $[e_1,e_2]=\delta e_4$. Рассмотрим вектор $e_3\in A$, ортогональный к e_1 и e_2. Так как фактор-алгебра коммутативна, то $[e_1,e_3]=\alpha e_4+\sigma e_5$.

Рассмотрим $\tilde{e}_2(\varphi)$, определенный следующим образом: $\tilde{e}_2(\varphi)=\cos(\varphi)e_2+\sin(\varphi)e_3$. Тогда $f(e_1,\tilde{e}_2(\varphi),e_4)=([e_1,\tilde{e}_2(\varphi)],e_4)=\delta\cos(\varphi)+\alpha\sin(\varphi)=g(\varphi)$. Следовательно $g'=-\delta\sin(\varphi)+\alpha\cos(\varphi)$ и в точке $\varphi=0$ (точке максимума) $g'(0)=0$. Таким образом $\alpha=0$, и $[e_1,e_3]=\sigma e_5$ для некоторого $\sigma\in\mathbb{R}$. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma\geq 0$ (в случае $\sigma\leq 0$ можно поменять местами e_1 и e_3). Аналогично доказывается, что $[e_2,e_3]=\gamma e_5$ для некоторого $\gamma\in\mathbb{R}$.

Без ограничения общности мы можем заменить базисные векторы e_1 и e_2 на векторы $e_1(\psi)=\cos(\psi)e_1+\sin(\psi)e_2$, $e_2(\psi)=-\sin(\psi)e_1+\cos(\psi)e_2$. Мы выберем ψ таким образом, чтобы $\gamma=0$ в новом базисе. Для этого достаточно выбрать ψ, удовлетворяющее уравнению $-\sigma\sin(\psi)+\gamma\cos(\psi)=0$. Следует отметить, что $\delta\geq\sigma>0$ ($\sigma\neq 0$ так как $\sigma^2+\gamma^2\neq 0$, иначе вектор e_3 попадает в центр). Следовательно, любая алгебра типа $\mathcal{N}(c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3)$ изометрична одной из алгебр типа $\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma)$, заданной следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$: $[X_1,X_2]=\delta X_4$, $[X_1,X_3]=\sigma X_5$, $[X_1,X_4]=0$, $[X_1,X_5]=0$, $[X_2,X_3]=0$, $[X_2,X_4]=0$, $[X_2,X_5]=0$, $[X_3,X_4]=0$, $[X_3,X_5]=0$, $[X_4,X_5]=0$, где $\delta\geq\sigma>0$. Оператор Риччи вычисляется по формуле (3). Алгебра дифференцирований находится непосредственно.

По самому выбору δ и σ являются инвариантами метрической алгебры Ли. Следовательно, разные значения δ и σ соответствуют неизометричным метрическим алгебрам Ли.

Если $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ изоморфна $\mathcal{N}^3(\varepsilon)$, то справедлива следующая

Лемма 8. *Пусть* $\dim\mathcal{N}=5$ *и* $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ *изоморфна* $\mathcal{N}^3(\varepsilon)$, *тогда* $\mathcal{N}$ *изоморфна метрической алгебре Ли* $\mathcal{N}(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)$, *задающейся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе* $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$*:* $[X_1,X_2]=$

$\varepsilon X_3 + \tau X_4 + \upsilon X_5$, $[X_1, X_3] = \gamma X_4$, $[X_2, X_3] = \rho X_5$, $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$,$\upsilon \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma \geq \rho \geq 0$, *где* $\mathcal{Z}(\mathcal{N}(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho)) = \{X_4, X_5\}$. *Кроме того, если* $\gamma = \rho$, *то* $\upsilon = 0$.

Оператор Риччи Ric *имеет вид*

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & 0 & -\upsilon\rho & 0 & 0 \\ 0 & B & \tau\gamma & 0 & 0 \\ -\upsilon\rho & \tau\gamma & C & -\varepsilon\tau & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon\tau & -D & -\tau\upsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -\tau\upsilon & -E \end{pmatrix},$$

где $A = \varepsilon^2 + \tau^2 + \upsilon^2 + \gamma^2$, $B = \varepsilon^2 + \tau^2 + \upsilon^2 + \rho^2$, $C = \gamma^2 + \rho^2 - \varepsilon^2$, $D = \tau^2 + \gamma^2$, $E = \upsilon^2 + \rho^2$.

Алгебра всех дифференцирований имеет вид $\mathrm{Der}(\mathcal{N}(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho)) =$

$$= \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \nu & 0 & 0 \\ e & f & g & \kappa & n \\ h & k & l & m & \eta \end{pmatrix}, \begin{array}{l} \nu = \lambda + \mu, \\ \kappa = 2\lambda + \mu = 0, n\rho - a\gamma = 0, \\ \rho(\eta - \lambda - 2\mu) = 0, m\gamma - b\rho = 0, \\ g\varepsilon + \lambda\tau + n\upsilon - d\gamma = 0, \\ l\varepsilon + \upsilon(\eta - \nu) + m\tau + c\rho = 0 \end{array} \right\}.$$

Замечание 6. *При* $\gamma > 0$ *и* $\rho = 0$ *алгебра вида* $\mathcal{N}(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho)$ *соответствует алгебре вида 6, при* $\gamma = \rho > 0$ *и* $\upsilon = 0$ *алгебре вида 7а), при* $\gamma > \rho > 0$ *алгебре вида 7б) из формулировки теоремы 3.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная метрическая алгебра Ли, удовлетворяющая условию леммы. Рассмотрим теперь метрическую алгебру Ли $\mathcal{N}(\varepsilon, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3)$, задающуюся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = \varepsilon X_3 + d_1 X_4 + c_1 X_5$, $[X_1, X_3] = d_2 X_4 + c_2 X_5$, $[X_1, X_4] = 0$, $[X_1, X_5] = 0$, $[X_2, X_3] = d_3 X_4 + c_3 X_5$, $[X_2, X_4] = 0$, $[X_2, X_5] = 0$, $[X_3, X_4] = 0$, $[X_3, X_5] = 0$, $[X_4, X_5] = 0$. Понятно, что в этом классе содержатся все интересующие нас алгебры $\mathcal{N}$.

С помощью поворота ортонормированного базиса, можно добиться зануления структурных констант c_2 и d_3. Рассмотрим поворот, заданный следующей матрицей:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

При повороте ортонормированного базиса $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ структурные константы c_2 и d_3 примут следующий вид:

$$c_2(\psi, \varphi) = \cos(\varphi)\sin(\psi)d_2 + \cos(\varphi)\cos(\psi)c_2 - \sin(\varphi)\sin(\psi)d_3 - \sin(\varphi)\cos(\psi)c_3,$$

$$d_3(\psi, \varphi) = \sin(\varphi)\cos(\psi)d_2 - \sin(\varphi)\sin(\psi)c_2 + \cos(\varphi)\cos(\psi)d_3 - \cos(\varphi)\sin(\psi)c_3.$$

Для их суммы и разности справедливы следующие соотношения:

$$c_2(\psi, \varphi) + d_3(\psi, \varphi) = \sin(\psi + \varphi)(d_2 - c_3) + \cos(\psi + \varphi)(c_2 + d_3),$$

$$c_2(\psi, \varphi) - d_3(\psi, \varphi) = \sin(\psi - \varphi)(d_2 + c_3) + \cos(\psi - \varphi)(c_2 - d_3)$$

соответственно. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{array}{c} \sin(\psi + \varphi)(d_2 - c_3) + \cos(\psi + \varphi)(c_2 + d_3) = 0 \\ \sin(\psi - \varphi)(d_2 + c_3) + \cos(\psi - \varphi)(c_2 - d_3) = 0. \end{array}$$

Очевидно, что система имеет решение (ψ_0, φ_0) при любых заданных значениях c_2, d_2, c_3 и d_3. Эти рассуждения показывают, что без ограничения общности можно считать, что c_2 и d_3 равны нулю, что мы и будем в дальнейшем предполагать выполненным.

Без ограничения общности можно считать, что $d_1 \geq 0, c_1 \geq 0, d_2 \geq 0, c_3 \geq 0$. Действительно, если это не так, то можно заменить базис $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ на базис $\{-X_1, X_2, -X_3, X_4, -X_5\}$, $\{X_1, -X_2, -X_3, -X_4, X_5\}$, $\{-X_1, X_2, -X_3, -X_4, -X_5\}$, $\{X_1, -X_2, -X_3, -X_4, -X_5\}$, соответственно. При этом c_3 и d_2 не могут быть одновременно равными нулю, иначе вектор X_3 попадает в центр, так как $[X_1, X_3] = 0$ и $[X_2, X_3] = 0$.

Следовательно, любая алгебра типа $\mathcal{N}(\varepsilon, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3)$ изометрична одной из алгебр типа $\mathcal{N}(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho)$, заданной следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = \varepsilon X_3 + \tau X_4 + \upsilon X_5$, $[X_1, X_3] = \gamma X_4$, $[X_1, X_4] = 0$, $[X_1, X_5] = 0$, $[X_2, X_3] = \rho X_5$, $[X_2, X_4] = 0$, $[X_2, X_5] = 0$, $[X_3, X_4] = 0$, $[X_3, X_5] = 0$, $[X_4, X_5] = 0$, где $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$, $\upsilon \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma \geq \rho \geq 0$.

Заметим теперь, что при $\gamma = \rho$ мы можем дополнительно упростить структурные константы. А именно, выберем новый базис $\{X_i(\theta)\}$, полагая $X_1(\theta) = \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2$, $X_2(\theta) = -\sin(\theta)X_1 + \cos(\theta)X_2$, $X_3(\theta) = X_3$, $X_4(\theta) = \cos(\theta)X_4 + \sin(\theta)X_5$, $X_5(\theta) = -\sin(\theta)X_4 + \cos(\theta)X_5$. В этом базисе структурные константы рассматриваемой алгебры Ли определяются равенствами: $[X_1(\theta), X_2(\theta)] = \varepsilon X_3(\theta) + \tau(\theta)X_4(\theta) + \upsilon(\theta)X_5(\theta)$, $[X_1(\theta), X_3(\theta)] = \gamma X_4(\theta)$, $[X_1(\theta), X_4(\theta)] = 0$, $[X_1(\theta), X_5(\theta)] = 0$, $[X_2(\theta), X_3(\theta)] = \gamma X_5(\theta)$, $[X_2(\theta), X_4(\theta)] = 0$, $[X_2(\theta), X_5(\theta)] = 0$, $[X_3(\theta), X_4(\theta)] = 0$, $[X_3(\theta), X_5(\theta)] = 0$, $[X_4(\theta), X_5(\theta)] = 0$, где $\tau(\theta) = \tau\cos(\theta) + \upsilon\sin(\theta)$, $\upsilon(\theta) = \upsilon\cos(\theta) - \tau\sin(\theta)$. Очевидно, можно подобрать такое вещественное θ, что $\upsilon(\theta) = 0$. Поэтому, при $\gamma = \rho$ можно считать, что $\upsilon = 0$.

Оператор Риччи вычисляется по формуле (3). Алгебра дифференцирований находится непосредственно.

Лемма 9. *(Критерий изометричности двух алгебр типа $\mathcal{N}(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho)$) Две алгебры $\mathcal{N}(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho)$ и $\mathcal{N}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\tau}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$ изометричны тогда и только тогда, когда:*

1) $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, $\tau = \tilde{\tau}, \gamma = \rho = \tilde{\gamma} = \tilde{\rho}$, $\upsilon = \tilde{\upsilon} = 0$ при $\gamma = \rho$;

2) $(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho) = (\tilde{\varepsilon}, \tilde{\tau}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$ при $\gamma > \rho$.

Доказательство. Используя замечание 1, нетрудно представить линейное отображение $Q : \mathcal{N}(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho) \to \mathcal{N}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\tau}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$ в матричном виде (мы выбираем канонический базис $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ алгебры $\mathcal{N}(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho)$ и канонический базис $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4, \tilde{X}_5\}$ алгебры $\mathcal{N}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\tau}, \tilde{\upsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho})$):

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & q_{54} & q_{55} \end{pmatrix}$$

Без ограничения общности мы можем считать, что определители матриц $Q_1 = \begin{matrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{matrix}$ и $Q_2 = \begin{matrix} q_{44} & q_{45} \\ q_{54} & q_{55} \end{matrix}$ равны 1, поскольку, в случае необходимости, мы можем заменить вектор X_1 на $-X_1$, а вектор X_4 на $-X_4$, соответственно.

Система уравнений, описывающая изоморфизм Q рассматриваемых алгебр, легко выписывается в явном виде. Выпишем только те уравнения, которые нам понадобятся.

Из равенства $Q([X_1, X_2]_1) = [Q(X_1), Q(X_2)]_2$ следует, что $q_{33}\varepsilon = (q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12})\tilde{\varepsilon}$, $q_{44}\tau + q_{45}\upsilon - (q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12})\tilde{\tau} = 0$, $q_{54}\tau + q_{55}\upsilon - (q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12})\tilde{\upsilon} = 0$. Так как $\varepsilon > 0$ и $\tilde{\varepsilon} > 0$, то

$$q_{33} = q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12} = 1, \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon},$$

откуда в частности получаем, что

$$q_{44}\tau + q_{45}\upsilon = \tilde{\tau}, \quad q_{54}\tau + q_{55}\upsilon = \tilde{\upsilon}.$$

Из равенств $Q([X_1, X_3]_1) = [Q(X_1), Q(X_3)]_2$ и $Q([X_2, X_3]_1) = [Q(X_2), Q(X_3)]_2$ следует, что

$$\begin{aligned} q_{44}\gamma = q_{11}\tilde{\gamma},\ q_{54}\gamma = q_{21}\tilde{\rho}, \\ q_{45}\rho = q_{12}\tilde{\gamma},\ q_{55}\rho = q_{22}\tilde{\rho}. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как Q_1 и Q_2 являются матрицами поворота, то $Q_1 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ и $Q_2 = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$ при подходящих значениях φ и ψ из промежутка $[-\pi, \pi]$.

Перепишем данные системы уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \upsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau} \\ \tilde{\upsilon} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\psi) & -\cos(\varphi) \\ -\sin(\psi) & 0 & 0 & \sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \tilde{\gamma} \\ \rho \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Определитель матрицы системы уравнений (11) должен быть равен нулю, следовательно, $\cos^2(\varphi)\sin^2(\psi) - \sin^2(\varphi)\cos^2(\psi) = (1-\sin^2(\varphi))\sin^2(\psi) - \sin^2(\varphi)(1-\sin^2(\psi)) = \sin^2(\psi) - \sin^2(\varphi) = 0$. Таким образом, $|\sin(\psi)| = |\sin(\varphi)| := \alpha$ и $|\cos(\psi)| = |\cos(\varphi)| := \beta$. Учитывая введенные ранее обозначения, получаем, что $\alpha = |q_{12}| = |q_{21}| = |q_{45}| = |q_{54}|$ и $\beta = |q_{11}| = |q_{22}| = |q_{44}| = |q_{55}|$.

Если $\alpha \neq 0$, то (учитывая неравенства $\gamma \geq \rho$, $\tilde{\gamma} \geq \tilde{\rho}$) из равенств (9) мы получаем, что $\gamma = \tilde{\gamma} = \rho = \tilde{\rho}$. Поэтому $\upsilon = \tilde{\upsilon} = 0$. А из равенства (10) с учетом неотрицательности τ и $\tilde{\tau}$ находим, что $\tau = \tilde{\tau}$.

Если $\alpha = 0$, то $\beta = 1$. В этом случае из равенств (9) мы получаем, что $\gamma = \tilde{\gamma}$ и $\rho = \tilde{\rho}$. Из равенства (10) (учитывая неотрицательность υ, $\tilde{\upsilon}$, τ и $\tilde{\tau}$) находим, что $\tau = \tilde{\tau}$ и $\upsilon = \tilde{\upsilon}$. Лемма полностью доказана.

Если $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{N}) = 3$, то фактор-алгебра $\mathcal{N}/\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ (рассматриваемая как метрическая алгебра Ли) является коммутативной алгеброй и справедлива следующая

Лемма 10. *Пусть* $\dim \mathcal{N} = 5$, $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{N}) = 3$, *тогда* $\mathcal{N}$ *изоморфна метрической алгебре Ли* $\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$, *задающейся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе* $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = \varepsilon X_3$, $\varepsilon > 0$, *где* $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)) = \{X_3, X_4, X_5\}$.

Оператор Риччи Ric *имеет вид*

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\left(\varepsilon^2, \varepsilon^2, -\varepsilon^2, 0, 0\right).$$

Алгебра всех дифференцирований имеет вид

$$\mathrm{Der}(\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)) = \left\{ T = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \nu & k & l \\ e & f & 0 & \kappa & m \\ g & h & 0 & n & \eta \end{pmatrix},\ \nu = \lambda + \mu \right\}.$$

Данные метрические алгебры Ли являются попарно неизометричными.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная метрическая алгебра Ли, удовлетворяющая условию леммы. Рассмотрим теперь метрическую алгебру Ли $\mathcal{N}(c_1, c_2, c_3)$, задающуюся следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = c_1X_3 + c_2X_4 + c_3X_5$, $[X_1, X_3] = 0$, $[X_1, X_4] = 0$, $[X_1, X_5] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$, $[X_2, X_4] = 0$, $[X_2, X_5] = 0$, $[X_3, X_4] = 0$, $[X_3, X_5] = 0$, $[X_4, X_5] = 0$. Понятно, что $\mathcal{N}$ изоморфна одной из метрических алгебр Ли такого типа.

Рассмотрим новый базис $\{X_1, X_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4, \tilde{X}_5\}$. Базисный вектор $\tilde{X}_3$ выбирается следующим образом: $\tilde{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}(c_1X_3 + c_2X_4 + c_3X_5)$. В новом базисе $[X_1, X_2] = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\tilde{X}_3$. Взаимно перпендикулярные базисные вектора $\tilde{X}_4$ и $\tilde{X}_5$ дополняют базисный вектор $\tilde{X}_3$ в центре.

Следовательно, любая алгебра типа $\mathcal{N}(c_1, c_2, c_3)$ изометрична одной из алгебр типа $\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$, заданной следующими коммутационными соотношениями в ортонормированном базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$: $[X_1, X_2] = \varepsilon X_3$, $[X_1, X_3] = 0$, $[X_1, X_4] = 0$, $[X_1, X_5] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$, $[X_2, X_4] = 0$, $[X_2, X_5] = 0$, $[X_3, X_4] = 0$, $[X_3, X_5] = 0$, $[X_4, X_5] = 0$. Можно считать, что $\varepsilon > 0$ (в случае $\varepsilon < 0$ поменять местами X_1 и X_2). Оператор Риччи вычисляется по формуле (3). Алгебра дифференцирований находится непосредственно.

По самому выбору ε является инвариантом метрической алгебры Ли. Следовательно, разные значения ε соответствуют неизометричным метрическим алгебрам Ли.

Осталось заметить, что из совокупности доказанных выше лемм вытекает утверждение теоремы 3.

4. Эйнштейновы расширения пятимерных нильпотентных метрических алгебр Ли

В этом разделе мы докажем теорему 1. Как показано в теореме 5 работы [9], для коммутативной метрической алгебры Ли $(\mathfrak{n}, Q)$ произвольной размерности все эйнштейновы расширения стандартны. Поэтому далее ограничимся рассмотрением некоммутативных нильпотентных метрических алгебр Ли.

Согласно доказанной выше теореме 3, $(\mathfrak{n}, Q)$ изоморфна метрической алгебре одного из девяти типов: 1) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma)$, 2) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$, 3) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma)$, 4) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$, 5) $\mathcal{N}_2^5(\delta, \sigma)$, 6) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma)$, 7a) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon, \tau, \gamma)$, 7b) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon, \tau, \upsilon, \gamma, \rho)$, 8) $\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$. Разберем эти случаи, за исключением второго, последовательно. При исследовании каждого из этих случаев мы используем результаты теоремы 2 и леммы 1, а также обозначения из теоремы 3.

1) Пусть $(\mathfrak{n}, Q)$ изоморфна $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma)$. Рассмотрим оператор $S : \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma) \to \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma)$, имеющий в базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ вид $S = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, 2)$. Используя лемму 1 и теорему 3, нетрудно убедиться в том, что для любого дифференцирования A : $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma) \to \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma)$ выполняется неравенство $\operatorname{trace}(S \cdot [A, A']) \geq 0$. Симметрическая часть любого дифференцирования A имеет вид

$$A^s = \begin{pmatrix} \lambda & b & c & e & h \\ b & \mu & d & f & k \\ c & d & \nu & g & l \\ e & f & g & \kappa & m \\ h & k & l & m & \eta \end{pmatrix},$$

где $\mu = \eta - \lambda$, $\kappa = \eta - \nu$. Оператор Риччи имеет вид $\operatorname{Ric}^{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{2}\operatorname{diag}\ \varepsilon^2, \varepsilon^2, \sigma^2, \sigma^2, -\varepsilon^2 - \sigma^2$. Следовательно,

$$\operatorname{trace}(S \cdot \operatorname{Ric}^{\mathfrak{n}}) + \operatorname{trace}(S) \cdot \operatorname{trace}(A^s \cdot A^s) - \operatorname{trace}(A^s)\operatorname{trace}(S \cdot A^s) =$$

$$= 6(\lambda - \nu)^2 + 6(\eta - \lambda - \nu)^2 + 12(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2) \geq 0.$$

Согласно теореме 2 все эйнштейновы расширения метрической алгебры Ли $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \sigma)$ являются стандартными.

3) Пусть теперь $(\mathfrak{n}, Q)$ изоморфна $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma)$. Рассмотрим оператор S : $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma) \to \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma)$, который имеет в базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ вид $S = \operatorname{diag}(2, 9, 11, 13, 15)$. Используя лемму 1 и теорему 3, нетрудно проверить, что для любого дифференцирования $A : \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma) \to \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma)$ выполняется

неравенство $\mathrm{trace}(S \cdot [A, A']) \geq 0$. Для любого дифференцирования A симметрическая часть имеет вид

$$A^s = \begin{pmatrix} \lambda & a & b & d & g \\ a & \mu & c & e & h \\ b & c & \nu & f & k \\ d & e & f & \kappa & l \\ g & h & k & l & \eta \end{pmatrix},$$

где $\nu = \lambda + \mu$, $\kappa = 2\lambda + \mu$, $\eta = 3\lambda + \mu$. Оператор Риччи имеет вид

$$\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & \tau\delta + \upsilon\gamma & \upsilon\sigma & 0 \\ 0 & \tau\delta + \upsilon\gamma & C & \gamma\sigma - \varepsilon\tau & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & \upsilon\sigma & \gamma\sigma - \varepsilon\tau & D & -\tau\upsilon - \delta\gamma \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -\tau\upsilon - \delta\gamma & -E \end{pmatrix},$$

где $A = \varepsilon^2 + \tau^2 + \upsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + \sigma^2$, $B = \varepsilon^2 + \tau^2 + \upsilon^2$, $C = \delta^2 + \gamma^2 - \varepsilon^2$, $D = \sigma^2 - \tau^2 - \delta^2$, $E = \upsilon^2 + \gamma^2 + \sigma^2$. Таким образом,

$$\mathrm{trace}(S \cdot \mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}) + \mathrm{trace}(S) \cdot \mathrm{trace}(A^s \cdot A^s) - \mathrm{trace}(A^s)\,\mathrm{trace}(S \cdot A^s) =$$

$$= \tau^2 + 2\upsilon^2 + \gamma^2 + 2(9\lambda - 2\mu)^2 + 100(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + k^2 + l^2) \geq 0.$$

Следовательно, согласно теореме 2 все эйнштейновы расширения метрической алгебры Ли $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma)$ являются стандартными.

4) Рассмотрим теперь случай, когда $(\mathfrak{n}, Q)$ изоморфна $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$. Рассмотрим оператор $S : \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho) \to \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$, имеющий в базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ вид $S = \mathrm{diag}(1, 2, 3, 4, 5)$. Из леммы 1 и теоремы 3 получаем для любого дифференцирования $A : \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho) \to \mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$ неравенство $\mathrm{trace}(S \cdot [A, A']) \geq 0$. Симметрическая часть любого дифференцирования A имеет вид

$$A^s = \begin{pmatrix} \lambda & a & b & d & g \\ a & \mu & c & e & h \\ b & c & \nu & f & k \\ d & e & f & \kappa & l \\ g & h & k & l & \eta \end{pmatrix}.$$

Оператор Риччи имеет вид

$$\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & \gamma\rho & -\upsilon\rho & 0 & 0 \\ \gamma\rho & B & \tau\delta + \upsilon\gamma & \upsilon\sigma & 0 \\ -\upsilon\rho & \tau\delta + \upsilon\gamma & C & \gamma\sigma - \varepsilon\tau & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & \upsilon\sigma & \gamma\sigma - \varepsilon\tau & D & -\tau\upsilon - \delta\gamma \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -\tau\upsilon - \delta\gamma & -E \end{pmatrix},$$

где $A = \varepsilon^2 + \tau^2 + \upsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + \sigma^2$, $B = \varepsilon^2 + \tau^2 + \upsilon^2 + \rho^2$, $C = \delta^2 + \gamma^2 + \rho^2 - \varepsilon^2$, $D = \sigma^2 - \tau^2 - \delta^2$, $E = \upsilon^2 + \gamma^2 + \sigma^2 + \rho^2$. Следовательно,

$$\mathrm{trace}(S \cdot \mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}) + \mathrm{trace}(S) \cdot \mathrm{trace}(A^s \cdot A^s) - \mathrm{trace}(A^s)\,\mathrm{trace}(S \cdot A^s) =$$

$$= \frac{1}{2}\tau^2 + \upsilon^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 + 30(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + k^2 + l^2) \geq 0.$$

Таким образом, согласно теореме 2 все эйнштейновы расширения метрической алгебры Ли $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \upsilon, \gamma, \rho)$ являются стандартными.

5) Разберем теперь случай, когда $(\mathfrak{n}, Q)$ изоморфна $\mathcal{N}_2^5(\delta, \sigma)$. Рассмотрим оператор $S : \mathcal{N}_2^5(\delta, \sigma) \to \mathcal{N}_2^5(\delta, \sigma)$, , который имеет в базисе $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ вид $S = \mathrm{diag}(2, 3, 3, 5, 5)$. Используя лемму 1 и теорему 3, нетрудно убедиться в том, что

для любого дифференцирования $A : \mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma) \to \mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma)$ выполняется неравенство $\operatorname{trace}(S\cdot[A,A']) \geq 0$. Симметрическая часть любого дифференцирования A имеет вид

$$A^s = \begin{pmatrix} \lambda & a & c & e & h \\ a & \mu & d & f & k \\ c & d & \nu & g & l \\ e & f & g & \kappa & m \\ h & k & l & m & \eta \end{pmatrix},$$

где $\kappa = \lambda + \mu$, $\eta = \lambda + \nu$, Оператор Риччи имеет вид $\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{2}\operatorname{diag}\ \delta^2+\sigma^2, \delta^2, \sigma^2, -\delta^2, -\sigma^2$. Следовательно,

$$\operatorname{trace}(S\cdot \mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}) + \operatorname{trace}(S)\cdot\operatorname{trace}(A^s\cdot A^s) - \operatorname{trace}(A^s)\operatorname{trace}(S\cdot A^s) =$$
$$= (3\lambda-2\mu)^2 + (3\lambda-2\nu)^2 + 16(\mu-\nu)^2 +$$
$$+36(a^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+k^2+l^2+m^2) \geq 0.$$

Таким образом, учитывая результат теоремы 2 все эйнштейновы расширения метрической алгебры Ли $\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma)$ являются стандартными.

6) Пусть теперь $(\mathfrak{n}, Q)$ изоморфна $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma)$. Рассмотрим оператор $S : \mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma) \to \mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma)$, имеющий в базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ вид $S = \operatorname{diag}(1,2,3,4,3)$. Применяя лемму 1 и теорему 3, легко убедиться в том, что для любого дифференцирования $A : \mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma) \to \mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma)$ выполняется неравенство $\operatorname{trace}(S\cdot[A,A']) \geq 0$. Симметрическая часть любого дифференцирования A имеет вид

$$A^s = \begin{pmatrix} \lambda & b & c & e & h \\ b & \mu & d & f & k \\ c & d & \nu & g & l \\ e & f & g & \kappa & n \\ h & k & l & n & \eta \end{pmatrix},$$

где $\nu = \lambda + \mu$, $\kappa = 2\lambda + \mu$. Оператор Риччи имеет вид

$$\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2 & \tau\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \tau\gamma & \gamma^2-\varepsilon^2 & -\varepsilon\tau & -\varepsilon\upsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon\tau & -\tau^2-\gamma^2 & -\tau\upsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -\tau\upsilon & -\upsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{trace}(S\cdot \mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}) + \operatorname{trace}(S)\cdot\operatorname{trace}(A^s\cdot A^s) - \operatorname{trace}(A^s)\operatorname{trace}(S\cdot A^s) =$$
$$= \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{3}{4}(4\mu+\lambda-3\eta)^2 + \frac{13}{4}(\eta-3\lambda)^2 +$$
$$+26(b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+k^2+l^2+n^2) \geq 0.$$

Согласно теореме 2 все эйнштейновы расширения метрической алгебры Ли $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma)$ являются стандартными.

7а) Рассмотрим теперь случай, когда $(\mathfrak{n}, Q)$ изоморфна $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma)$. Рассмотрим оператор $S : \mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma) \to \mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma)$, имеющий в базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ вид $S = \operatorname{diag}(1,1,2,3,3)$. Используя лемму 1 и теорему 3 получаем, что для любого дифференцирования $A : \mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma) \to \mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma)$ выполняется неравенство $\operatorname{trace}(S\cdot [A,A']) \geq 0$. Симметрическая часть любого дифференцирования A имеет вид

$$A^s = \begin{pmatrix} \lambda & b & c & e & h \\ b & \mu & d & f & k \\ c & d & \nu & g & l \\ e & f & g & \kappa & b \\ h & k & l & b & \eta \end{pmatrix},$$

где $\nu=\lambda+\mu$, $\kappa=2\lambda+\mu$, $\eta=\lambda+2\mu$. Оператор Риччи имеет вид

$$\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varepsilon^2+\tau^2+\gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon^2+\tau^2+\gamma^2 & \tau\gamma & 0 & 0\\ 0 & \tau\gamma & 2\gamma^2-\varepsilon^2 & -\varepsilon\tau & 0\\ 0 & 0 & -\varepsilon\tau & -\tau^2-\gamma^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{trace}(S\cdot\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}})+\operatorname{trace}(S)\cdot\operatorname{trace}(A^s\cdot A^s)-\operatorname{trace}(A^s)\operatorname{trace}(S\cdot A^s)=$$

$$=\frac{1}{2}\tau^2+10(\lambda-\mu)^2+20(2b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+k^2+l^2)\geq 0.$$

Таким образом, согласно теореме 2 все эйнштейновы расширения метрической алгебры Ли $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma)$ являются стандартными.

7b) Пусть теперь $(\mathfrak{n},Q)$ изоморфна $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)$. Рассмотрим оператор $S:\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)\to\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)$, имеющий в базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ вид $S=\operatorname{diag}(1,1,2,3,3)$. Из леммы 1 и теоремы 3 получаем для любого дифференцирования $A:\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)\to\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)$ неравенство $\operatorname{trace}(S\cdot[A,A'])\geq 0$. Симметрическая часть любого дифференцирования A имеет вид

$$A^s=\begin{pmatrix}\lambda & b & c & e & h\\ b & \mu & d & f & k\\ c & d & \nu & g & l\\ e & f & g & \kappa & m\\ h & k & l & m & \eta\end{pmatrix},$$

где $\nu=\lambda+\mu$, $\kappa=2\lambda+\mu$, $\eta=\lambda+2\mu$. Оператор Риччи имеет вид $\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}=$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\gamma^2 & 0 & -\upsilon\rho & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\rho^2 & \tau\gamma & 0 & 0\\ -\upsilon\rho & \tau\gamma & \gamma^2+\rho^2-\varepsilon^2 & -\varepsilon\tau & -\varepsilon\upsilon\\ 0 & 0 & -\varepsilon\tau & -\tau^2-\gamma^2 & -\tau\upsilon\\ 0 & 0 & -\varepsilon\upsilon & -\tau\upsilon & -\upsilon^2-\rho^2\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{trace}(S\cdot\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}})+\operatorname{trace}(S)\cdot\operatorname{trace}(A^s\cdot A^s)-\operatorname{trace}(A^s)\operatorname{trace}(S\cdot A^s)=$$

$$=\frac{1}{2}\tau^2+\frac{1}{2}\upsilon^2+10(\lambda-\mu)^2+20(b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+k^2+l^2+m^2)\geq 0.$$

Таким образом, согласно теореме 2 все эйнштейновы расширения метрической алгебры Ли $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)$ являются стандартными.

8) Наконец, рассмотрим случай, когда $(\mathfrak{n},Q)$ изоморфна $\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$. Рассмотрим оператор $S:\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)\to\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$, имеющий в базисе $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ вид $S=\operatorname{diag}(2,2,4,3,3)$. Используя лемму 1 и теорему 3, легко проверить, что для любого дифференцирования $A:\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)\to\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\operatorname{trace}(S\cdot[A,A'])\geq 0$. Симметрическая часть любого дифференцирования A имеет вид

$$A^s=\begin{pmatrix}\lambda & b & c & e & g\\ b & \mu & d & f & h\\ c & d & \nu & k & l\\ e & f & k & \kappa & n\\ g & h & l & n & \eta\end{pmatrix},$$

где $\nu=\lambda+\mu$. Оператор Риччи имеет вид $\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}=-\frac{1}{2}\operatorname{diag}\ \varepsilon^2,\varepsilon^2,-\varepsilon^2,0,0,\ $. Таким образом,

$$\operatorname{trace}(S\cdot\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}})+\operatorname{trace}(S)\cdot\operatorname{trace}(A^s\cdot A^s)-\operatorname{trace}(A^s)\operatorname{trace}(S\cdot A^s)=$$

$$=7(\lambda-\mu)^2+7(\kappa-\eta)^2+(2\kappa+2\eta-3\lambda-3\mu)^2+$$

$$+28(b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+k^2+l^2+n^2) \geq 0.$$

Согласно теореме 2 все эйнштейновы расширения метрической алгебры Ли $\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$ являются стандартными. Теорема полностью доказана.

Замечание 7. *Следует отметить, что использованный выше метод доказательства не работает на метрических алгебрах Ли из пункта 2 теоремы 3. Понятно, что в случае существования гипотетических нестандартных семимерных разрешимых эйнштейновых метрических алгебр Ли доказать стандартность эйнштейновых расширений для каждой из соответствующих нильпотентных метрических алгебр Ли невозможно в принципе. Укажем лишь на то, что использованный метод позволяет доказать стандартность эйнштейновых расширений этих алгебр в случае* $\gamma = 0$.

Замечание 8. *Любопытно то, что в каждом из последовательно рассматриваемых случаев в доказательстве теоремы 1 вспомогательный оператор* S *строится по спектральному типу шестимерного эйнштейнова расширения ранга 1 соответствующей пятимерной нильпотентной алгебры Ли (см. подробности в работе* [13]*).*

Список литературы

[1] Д.В. Алексеевский, *Сопряженность полярных разложений групп Ли*, Математический сборник, **84** (1971), 14–26.

[2] Д.В. Алексеевский, *Однородные римановы пространства отрицательной кривизны*, Математический сборник, **96** (1975), 93–117.

[3] А.Л. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Мир, Москва, 1990.

[4] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Мир, Москва, 1978.

[5] Э.Б. Винберг, С.Г. Гиндикин, *Кэлеровы многообразия, допускающие транзитивную разрешимую группу автоморфизмов*, Математический сборник, **74** (1967), 357–377.

[6] Э.Б. Винберг, В.В. Горбацевич, А.Л. Онищик, *Строение групп и алгебр Ли*, (Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 41.) ВИНИТИ, Москва, 1990.

[7] Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва, 1988.

[8] В.В. Морозов, *Классификация нильпотентных алгебр Ли 6-го порядка*, Известия вузов. Мат., **4** (1958), 161–174.

[9] Е.В. Никитенко, Ю.Г. Никоноров, *Шестимерные эйнштейновы солвмногообразия*, Математические труды, **8** (2005), 71–121.

[10] Ю.Г. Никоноров, *Пятимерные эйнштейновы солвмногообразия*, Труды по геометрии и анализу, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, (2003), 343–367.

[11] J. Heber, *Noncompact homogeneous Einstein spaces*, Invent. Math., **133** (1998), 279–352.

[12] G. Jensen, *Homogeneous Einstein spaces of dimension 4*, J. Differential. Geom., **3** (1969), 309–349.

[13] J. Lauret, *Finding Einstein solvmanifolds by a variational method*, Math. Z., **241** (2002), 83–99.

[14] Yu.G. Nikonorov, *Noncompact homogeneous Einstein 5-manifolds*, Geom. Dedicata, **113** (2005), 107–143.

[15] C. Will, *Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7*, Diff. Geom. Appl., **19** (2003), 307–318.

Евгений Витальевич Никитенко
Рубцовский индустриальный институт АлтГТУ,
ул. Тракторная, 2/6,
658207, Рубцовск, Россия
E-mail address: nikit@inst.rubtsovsk.ru