S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 1–14 (2006) УДК 519.14
MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С $\lambda = 2$ И $\mu = 3$, II

В.И. КАЗАРИНА

Abstract. Let Γ be a strongly regular graph with parameters (676,45,2,3). Possible orders and subgraphs of fixed points automorphisms for Γ are obtained.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Граф Γ называется *сильным с параметрами* (λ, μ), если каждое ребро из Γ лежит точно в λ треугольниках и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ ($\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ ($d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом.* Ректаграфом называется вполне регулярный граф с $\lambda = 0, \mu = 2$.

Kazarina, V.I., On automorphisms of strongly regular graphs with $\lambda = 2$ and $\mu = 3$, II.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00046) и РФФИ-ГФЕН Китая (грант 05-01-39000).

Поступила 28 декабря 2005 г., опубликована 15 февраля 2006 г.

Если Δ — подграф графа Γ и $a, b \in \Delta$, то через $d_\Delta(a, b)$ обозначим расстояние между a и b в графе Δ.

Множество вершин графа $MZ(n)$, отвечающего аффинной плоскости $\pi = (X, L)$ порядка n, совпадает с $X \cup L$, причем подграф X является кокликой, две прямые смежны, если они параллельны, и точка смежна с прямой, только если она принадлежит этой прямой. Граф $MZ(n)$ имеет $n(2n+1)$ вершин, является кореберно регулярным с $\mu = 1$, $\lambda(a, b) = 0$, если одна из этих вершин — точка, а другая — содержащая эту точку прямая, $\lambda(a, b) = n - 2$, если a и b — параллельные прямые.

Если X — подмножество группы автоморфизмов графа Γ, то через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначим подграф на множестве вершин, остающихся неподвижными под действием любого автоморфизма из X. Подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с малыми значениями параметров λ и μ имеют жестко заданное строение. Так подграф неподвижных точек автоморфизма графа Мура сам является графом Мура или звездой (см. лемму 1 [1]).

Хорошо известно (предложение 1.1.2 [2]), что сильный граф с $\mu \geq 2$ регулярен. Поэтому связные компоненты непустых подграфов неподвижных точек $2'$-автоморфизмов сильно регулярного графа с $\max\{\lambda, \mu\} \leq 2$ либо являются кликами, либо сильно регулярны с этими же параметрами. Автоморфизмы графов Мура, т.е. сильно регулярных графов с параметрами $(v, k, 0, 1)$ изучались в [1]. Автоморфизмы сильно регулярных графов с $\mu = 2$ и $\lambda \in \{0, 1\}$ рассматривались в [3,4]. Автоморфизмы сильно регулярных графов с $\mu = 2$ и $\lambda = 3$ изучались в [5].

В данной работе продолжено изучение автоморфизмов сильно регулярных графов с параметрами $(v, k, 2, 3)$. Если Γ — граф в половинном случае, то он имеет параметры (13,6,2,3) и Γ является графом Пэли. Используя равенство $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = n^2$, получим $n^2 = 4k + \mu^2 - 8\mu + 4$. Если μ четно, то $\mu = 2t$ и $n^2 = 4(k + t^2 - 4t + 1)$. Если же μ нечетно, то μ^2 и n^2 сравнимы с 1 по модулю 8, поэтому k нечетно. Из прямоугольного соотношения $k(k - \lambda - 1) = \mu(v - k - 1)$ следует, что $n^2 = 4k - 11$, поэтому $n = 2u + 1$, $k = u^2 + u + 3$ и неглавные собственные значения графа Γ равны u и $-u - 1$. Кратность собственного значения u равна $f = uk(k + u + 1)/(n\mu) = u(u^2 + u + 3)(u^2 + 2u + 4)/(6u + 3)$, следовательно, $2u + 1$ делит $11 \cdot 13$ и $u = 5, 6$ или 71. Соответственно, $k = 33, 45$ или 5187. Случай $k = 33$ рассмотрен в [5]. Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(676, 45, 2, 3)$, g *— элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ *— пустой граф,* $p = 2$ *или* 13, *причем в случае* $p = 2$ *граф* Γ', *вершинами которого являются* g*-допустимые 4-клики из* Γ, *причем вершины* X, Y *смежны в* Γ', *если некоторая вершина из* X *смежна с вершиной из* Y, *является сильно регулярным с параметрами* $(169, 42, 5, 12)$;

(2) Δ *является либо* 1*-кликой и* $p = 5$, *либо* 4*-кликой и* $p = 7$;

(3) $p = 13$ *и* Δ *— граф Пэли с параметрами* $(13, 6, 2, 3)$;

(4) $p = 3$, Δ *является объединением* α *изолированных вершин,* β *изолированных 4-клик и* γ *графов Пэли с параметрами* $(13, 6, 2, 3)$, *число* $|\Delta|$ *сравнимо с* 1 *по модулю* 3 *и либо*

(*i*) $\gamma = \alpha = 2$, *либо*

(ii) $\gamma = 1$, $\alpha + 4\beta$ *делится на* 3 *и не превосходит* 18, *либо*
(ii) $\gamma = 0$, $\alpha + 4\beta$ *делится на* 3 *и не превосходит* 21;
(5) $p = 2$ *и либо для некоторых несмежных вершин* $a, b \in \Omega$ *получим* $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = 3$ *либо* Ω *является одним из графов:*
(i) граф Петерсена,
(ii) $\Omega \subset a^{\perp}$ *для некоторой вершины* a, $\Omega(a)$ *содержит* φ *изолированных вершин и* ψ *треугольников*
(iii) Ω *является графом* $MZ(4)$.

Из теоремы следует, что для группы G автоморфизмов графа Γ множество $\pi(G)$ содержится в $\{2, 3, 5, 7, 13\}$.

2. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, §2 из [6]).

Лемма 2. *Пусть* Γ *является связным графом и число* $|[a] \cap [b]|$ *равно* 2 *для любых смежных вершин* a, b, *равно* 3 *для любых вершин с* $d(a, b) = 2$. *Тогда* Γ *является вполне регулярным графом.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 1.1.2 [2].

Лемма 3. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), Δ *— индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, ..., d_N$. *Тогда* $(v-N)-(kN-2M)+\lambda M+\mu(\binom{N}{2}-M)-\sum\binom{d_i}{2} = x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i$ *и* $(\sum ix_i)^2 \leq \sum x_i \sum i^2 x_i$, *где* x_i *— число вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ.

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$, получим равенства $v - N = \sum x_i$, $kN - 2M = \sum ix_i$ и $\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2} = \sum\binom{i}{2}x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим равенство из заключения леммы.

Квадратный трехчлен $\sum(i-x)^2 x_i = \sum i^2 x_i - 2x\sum ix_i + x^2\sum x_i$ неотрицателен. Поэтому дискриминант квадратного трехчлена $(\sum ix_i)^2 - \sum x_i \sum i^2 x_i$ неположителен.

Лемма 4. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(676, 45, 2, 3)$ и неглавными собственными значениями $6, -7$, Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ, X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, и $x_i = |X_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) если Δ подграф из Γ на w вершинах, то

$$d - 6 \leq \frac{w(45-d)}{676-w} \leq d + 7,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $w(45-d)/(676-w)$ вершинами из Δ;

(2) если Δ является объединением β изолированных 4-клик и $x_i = 0$ для $i \geq 4$, то $\beta \leq 8$, причем в случае $\beta = 8$ каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с 0 или 3 вершинами из Δ;

(3) если Δ является объединением γ изолированных графов Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$ и $x_i = 0$ для $i \geq 4$, то $\gamma \leq 3$, причем в случае $\gamma = 3$ каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с 0 или 3 вершинами из Δ.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы 1.

Пусть Δ является объединением восьми изолированных 4-клик. Допустим, что $x_i = 0$ для $i \geq 4$. Тогда $\sum x_i = 644$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1344$ и $x_2 + 3x_3 = 1344$. Отсюда $x_3 = 488$, $x_1 = x_2 = 0$ и $x_0 = 156$. Легко понять, что Δ не содержит девять изолированных 4-клик. Утверждение (2) доказано.

Пусть Δ является объединением трех изолированных графов Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$ и $x_i = 0$ для $i \geq 4$. Тогда $\sum x_i = 637$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1521$ и $x_2 + 3x_3 = 1521$. Отсюда $x_3 = 507$, $x_1 = x_2 = 0$ и $x_0 = 130$. Легко понять, что Δ не содержит четыре изолированных 4-клики. Утверждение (3) доказано. Лемма доказана.

Лемма 5. *Вполне регулярный граф с параметрами $(52, 9, 2, 3)$ не существует.*

Доказательство. Пусть Δ является вполне регулярным графом с параметрами $(52, 9, 2, 3)$. Заметим, что окрестность любой вершины в Δ является объединением трех треугольников, девятиугольником или объединением m- и n-угольников, $m + n = 9$.

Пусть $a \in \Delta$, $d \in Delta_3(a)$, $k_i = |Delta_i(a)|$, $c_3(a, d) = t$ и $\{e_1, ..., e_t\} = [d] \cap \Delta_2(a)$. Тогда $k_1 = 9, k_2 = 18$ и $\sum_{i \geq 3} k_i = 24$. По предложению 1.9.1 из [1] имеем $c_i(a, u) \geq \mu - 2 + i$, в частности, $t \geq 4$. Положим $\Delta(a, d) = ([a] \cap \Delta_2(d)) \cup ([d] \cap \Delta_2(a))$. Если $t = 4$, то $\Delta(a, d)$ является полным двудольным графом $K_{4,4}$ с удаленным максимальным паросочетанием. В этом случае для различных i, j подграф $[e_i] \cap [e_j]$ содержит d и 2 вершины из $\Delta(a)$. Поэтому $\{e_1, ..., e_4\}$ является такой кокликой из $\Delta(d)$, что $[e_i] \cap [e_j]$ не пересекает $\Delta(d)$. Противоречие со строением $\Delta(d)$. Итак, $t \geq 5$.

Если диаметр Δ не меньше 5, то $|\Delta| \geq 1 + 9 + 18 + 18 + 9 + 1$, противоречие. Заметим, что $b_2(a, e) \leq 5$ для любой вершины e из $\Delta_2(a)$. В противном случае μ-подграф $[a] \cap [e]$ является треугольником и для двух вершин u, w из $[a] \cap [e]$ подграф $[u] \cap [w]$ содержит e, a и вершину из $[a] \cap [e]$, противоречие. Так как число ребер между $\Delta_2(a)$ и $\Delta_3(a)$ не больше 90, а каждая вершина из $\Delta_3(a)$ смежна по крайней мере с 5 вершинами из $\Delta_2(a)$, то $|\Delta_3(a)| \leq 18$ и $|\Delta_4(a)| \geq 6$. Положим $\Omega = \Delta_3(a) \cup \Delta_4(a)$. Тогда $|\Omega| = k_3 + k_4 = 24$, каждая вершина из

$\Delta_4(a)$ имеет степень 9 в Ω, а каждая вершина из $\Delta_3(a)$ имеет в Ω степень, не большую 4.

Заметим, что $|\Delta_4(a) - [d]| \leq 2$ для любой вершины d из $\Delta_3(a)$. В случае $|\Delta_4(a) - [d]| \geq 3$ для вершин $u_1, ..., u_3$ из $\Delta_4(a) - [d]$ подграф $[d] \cap [u_i]$ содержит 3 вершины из Ω, $|\Omega(d)| = 4$ и u_i несмежна с единственной вершиной w_i из $\Omega(d)$ для $i = 1, ..., 3$. Тогда вершина w из $\Omega(d) - \{w_1, w_2, w_3\}$ смежна с u_1, u_2, u_3 и с двумя вершинами из $\{e_1, ..., e_5\}$. Так как $k_4 \geq 6$, то $\{w_1, ..., w_3\}$ — подграф из $\Delta_4(a)$, являющийся 3-кликой. Противоречие с тем, что $[w_1] \cap [w_2]$ содержит d, w_3, u_3.

Таким образом, $k_4 = 6$ и каждая вершина из $\Delta_3(a)$ смежна точно с 4 вершинами из $\Delta_4(a)$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Delta_3(a)$ и $\Delta_4(a)$ равно $18 \cdot 4$, но не больше $6 \cdot 9$. Лемма доказана.

3. Характеры групп и автоморфизмы графов.

Доказательство теоремы опирается на метод Дональда Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [7]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$ с двумя классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\overline{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, g$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = Aut(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, поэтому $\chi_i(g)$ должно быть целым.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(676, 45, 2, 3)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $g \in G$. Тогда Γ имеет собственные значения 45, 6, -7 кратностей 1, 360, 315 и

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 45 & 6 & -7 \\ 630 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 360 & 48 & -4 \\ 315 & -49 & 5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 360 равно $\chi_1(g) = (360\alpha_0(g) + 48\alpha_1(g) - 4\alpha_2(g))/676$. Поставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/13 - 4$.

Выберем подгруппу X из G порядка, взаимно простого с 6. Пусть $\Omega = \mathrm{Fix}(X)$ — множество вершин графа Γ, неподвижных относительно каждого элемента из X. Если a, b — две вершины из Ω, то $[a] \cap [b]$ — подграф, допустимый относительно X, поэтому $[a] \cap [b] \subset \Omega$. Значит Ω — либо пустой граф, либо сильно регулярный граф с $\lambda = 2, \mu = 3$, либо является кликой с числом вершин, не большим 4.

Пусть g — элемент простого порядка p из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$, $\alpha_1(g) = pw$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Δ — пустой граф, то $p = 2$ или 13, причем в случае $p = 2$ граф Γ', вершинами которого являются g-допустимые 4-клики из Γ, причем вершины X, Y смежны в Γ', если некоторая вершина из X смежна с вершиной из Y, является сильно регулярным с параметрами $(169, 42, 5, 12)$;*

(2) *если Δ является β-кликой, то либо $\beta = 1$ и $p = 3$ или 5; либо $\beta = 4$ и $p = 3$ или 7;*

(3) *если Δ является сильно регулярным графом, то либо*

(*i*) *Δ — граф Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$ и $p = 3$ или 13, либо*

(*ii*) *Δ — объединение четырех или семи изолированных 4-клик и $p = 3$, либо*

(*iii*) *Δ является графом Петерсена и $p = 2$.*

Доказательство. Если Δ — пустой граф, то p делит $676 = 2^2 13^2$, поэтому $p = 2$ или 13. В случае $p = 13$ на множестве вершин графа Γ имеются 52 $\langle g \rangle$-орбиты.

В случае $p = 2$ каждая $\langle g \rangle$-орбита Φ является 2-кликой, иначе для несмежных вершин x, x^g подграф $[x] \cap [x^g]$ содерожит 3 вершины, и по крайней мере одна из них попадает в Δ. Поэтому $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/13 - 4 = 48$. Заметим, что для любой орбиты $\{x, x^g\}$ найдется единственная орбита $\{y, y^g\}$ такая, что $y \in [x] \cap [x^g]$. Определим граф Γ', вершинами которого являются g-допустимые 4-клики из Γ, причем вершины X, Y смежны в Γ', если некоторая вершина из X смежна с вершиной из Y. Так как любая вершина из $\Gamma - X$ смежна не более чем с одной вершиной из X, то граф Γ' регулярен степени 42.

Пусть A, X — смежные вершины в Γ', $A = \{a, a^g, b, b^g\}$ и $X = \{x, x^g, y, y^g\}$. Без ограничения общности, вершины a, x смежны. Тогда $[a] \cap [x]$ содержит 2 вершины и $[a] \cap [z]$ содержит одну вершину вне $A \cup X$, поэтому $\lambda'(A, X) = 5$.

Пусть A, U — две несмежные вершины в Γ'. Так как $[a] \cap [u]$ содержит 3 вершины для $u \in U$, то $\mu(A, U) = 12$. Итак Γ' является сильно регулярным с параметрами (169,42,5,12).

Если Δ является β-кликой, то p делит $676 - \beta$ и $46 - \beta$, поэтому либо $\beta = 1$ и $p = 3$ или 5, либо $\beta = 2$ и $p = 2$, либо $\beta = 4$ и $p = 2, 3$ или 7.

Если $\beta = 1$ и $p = 3$, то $\chi_1(g) = (7 + \alpha_1(g))/13 - 4$ и $3w + 7$ делится на 13. Отсюда $w = 13s + 2$ для некоторого целого s и $\alpha_1(g) = 39s + 6$.

Если $\beta = 1$ и $p = 5$, то $\chi_1(g) = (7 + \alpha_1(g))/13 - 4$ и $5w + 7$ делится на 13. Отсюда $w = 13s + 9$ для некоторого целого s и $\alpha_1(g) = 65s + 45$.

Если $\beta = 2$, то $p = 2$ и для $\{a, b\} = \Delta$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит ребро $\{u, u^g\}$, а подграфы $[a] - b^\perp$ и $[b] - a^\perp$ содержат только кокликовые $\langle g \rangle$-орбиты. Для вершины x, не лежащей в $a^\perp \cup b^\perp$, вершина x^g смежна с x, поэтому $\alpha_1(g) = 590$ и $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/13 - 4 = 604/13 - 4$, противоречие.

Пусть $\beta = 4$. Если $p = 2$, то для $a \in \Delta$ подграф $[a] - \Delta$ содержит только кокликовые $\langle g \rangle$-орбиты. Для вершины x, не смежной с вершинами из Δ, вершина x^g смежна с x, поэтому $\alpha_1(g) = 504$ и $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/13 - 4 = 532/13 - 4$, противоречие. Если $p = 3$, то каждая нетривиальная $\langle g \rangle$-орбита является кокликой или треугольником. Пусть γ — число кокликовых, а δ — число треугольных $\langle g \rangle$-орбит. Так как $\alpha_1(g) = 3w$ и $\chi_1(g) = (28 + \alpha_1(g))/13 - 4$, то $w = 13t + 8$ для подходящего целого t. Если $p = 7$, то каждая нетривиальная $\langle g \rangle$-орбита является кокликой или семиугольником. Пусть γ — число кокликовых, а δ — число семиугольных $\langle g \rangle$-орбит. Так как $\alpha_1(g) = 7w$ и $\chi_1(g) = (28 + \alpha_1(g))/13 - 4$, то $w = 13t + 9$ для подходящего $t \le 6$. Если $t = 6$, то $\alpha_1(g) + \alpha_1(g^2) + \alpha_1(g^3) \ge 609 + 63 + 63$, противоречие.

Пусть Δ сильно регулярен, $X_i = X_i(\Delta)$ и $x_i = |X_i|$. Если $p \ge 5$, то он имеет параметры $(13, 6, 2, 3)$. Если Δ сильно регулярен с параметрами $(13, 6, 2, 3)$, то $p = 3$ или 13. В случае $p = 13$ ограничений на $\alpha_1(g)$ нет, а в случае $p = 3$ получим $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/13$ и $\alpha_1(g)$ делится на 39.

Если Δ — сильно регулярный граф, отличный от графа Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$, и $p = 3$, то Δ является объединением ψ изолированных 4-клик. По лемме 4 имеем $\psi \le 8$. Так как $|\Delta|$ сравнимо с 1 по модулю 3, то $\psi = 4$ или 7. Пусть $u \in \Delta$, $[u]$ содержит $\sigma_i = \sigma_i(u)$ вершин из X_i (очевидно, σ_i делится на 3) и δ_i — число вершин из Δ с $\sigma_3 = i$.

Пусть $\psi = 7$. По лемме 3 получим $\sum x_i = 648$, $\sum i x_i = 1176$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 1008$. Отсюда $x_1 = 600 - 3x_0, x_2 = 3x_0 - 432$ и $x_3 = 480 - x_0$. Подсчитав число 2-путей с началом u и концом в $\Delta - \{u\}$, получим равенства $72 = 2\sigma_3 + \sigma_2$ и $\sigma_1 = \sigma_3 - 30$. Отсюда $\sigma_1 + 30 \le \sigma_3 \le 36$. Далее, $x_1 = 3\delta_{33} + 6\delta_{36}$, $x_2 = 6\delta_{30} + 3\delta_{33}$ и $x_3 = 10\delta_{30} + 11\delta_{33} + 12\delta_{36}$, причем $\delta_{30} + \delta_{33} + \delta_{36} = 28$.

Пусть $\psi = 4$. Подсчитав число 2-путей с началом u и концом в $\Delta - \{u\}$, получим равенства $36 = 2\sigma_3 + \sigma_2$ и $\sigma_1 = 6 + \sigma_3$. Отсюда $\sigma_1 - 6 \le \sigma_3 \le 18$.

Если Δ — сильно регулярный граф с параметрами (v', k', λ', μ') и $p = 2$, то $(\lambda', \mu') = (0, 1)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ или $(2, 3)$. Но в последнем случае Δ имеет параметры $(13, 6, 2, 3)$ и $p \ne 2$.

Если $(\lambda', \mu') = (0, 1)$, то Δ является пятиугольником, графом Петерсена или графом Хофмана-Синглтона. Так как $|\Delta|$ четно, то пятиугольник невозможен. Если Δ является графом Хофмана-Синглтона, то число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно 1900. С другой стороны, $|\Gamma - \Delta| = 626$ и указанное число ребер не больше $626 \cdot 3$, противоречие.

Если Δ является графом Петерсена, то $\sum x_i = 666$, $\sum i x_i = 420$, и $x_2 + 3x_3 = 90$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $x_0 = 336 - x_3$. Заметим, что $\alpha_1(g) = x_0 + x_2 = 426 - 4x_3$, поэтому $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/13 - 4 = (496 - 4x_3)/13 - 4$. Отсюда $x_3 = 13t - 6$ для некоторого четного числа t и с учетом равенства $x_2 + 3x_3 = 90$, получим $x_3 = 20$.

Если $(\lambda', \mu') = (2, 1)$, то во введении отмечено, что Δ имеет параметры (400,21,2,1). Поэтому число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно 9600. С другой стороны, $|\Gamma - \Delta| = 276$ и указанное число ребер не больше $276 \cdot 3$, противоречие.

Если $(\lambda', \mu') = (0, 3)$, то $n^2 = (\lambda' - \mu')^2 + 4(k' - \mu') = 4k' - 3$. Поэтому $n = 2u + 1$, $k' = u^2 + u + 1$ и Δ имеет собственные значения $u - 1$ и -$(u + 2)$, причем кратность $u-1$ равна $(u+1)(u^2+u+1)(u^2+2u+3)/(6u+3)$. Отсюда $2u+1$ делит 9, при $u = 1$ получим граф $K_{3,3}$, а при $u = 4$ граф Δ имеет параметры (162,21,0,3). В последнем случае число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно $162 \cdot 24$. С другой стороны, $|\Gamma - \Delta| = 514$ и указанное число ребер не больше $514 \cdot 3$, противоречие.

Если $\Delta = K_{3,3}$, то $x_i = 0$ для $i \geq 3$, поэтому $\sum x_i = 670$, $\sum i x_i = 252$, и $x_2 = 18$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $x_0 = 436$. Заметим, что $\alpha_1(g) = x_0 + x_2 = 454$, поэтому $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/13 - 4 = 496/13 - 4$, противоречие. Лемма доказана.

Ввиду леммы 6 можно считать, что $p \leq 3$. До конца параграфа будем предполагать, что $p = 3$. Заметим, что для любых двух несмежных вершин a, b из Γ подграф $[a] \cap [b]$ не является треугольником.

Лемма 7. *Верно одно из утверждений:*

(1) Δ *содержит связную компоненту, являющуюся графом Пэли с параметрами* $(13, 6, 2, 3)$ *и каждая вершина из* $\Gamma - \Delta$ *смежна не более чем с одной вершиной из* Δ*;*

(2) *любая связная компонента графа* Δ *является* 1*-кликой или* 4*-кликой.*

Доказательство. Пусть $p = 3$. Тогда число $|\Delta(a) \cap \Delta(b)|$ равно 2, если вершины a, b смежны; равно 3, если $d_\Delta(a, b) = 2$. По лемме 2 связная компонента Ω графа Δ являются одновершинным графом, 4-кликой или вполне регулярным графом с параметрами $(v', k', 2, 3)$, причем $|\Omega_2(a)| = k'(k' - 3)/3$ и число $|\Delta|$ сравнимо с 1 по модулю 3. Положим $X_i = X_i(\Omega)$ и $x_i = |X_i|$.

Если диаметр Ω равен 2, то Ω является графом Пэли с параметрами (13,6,2,3) и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с не более чем с одной вершиной из Ω ($x_1 = 507$ и $x_0 = 156$).

Допустим, что диаметр Ω больше 2. Покажем, что если $k' \geq 9$, то $\Omega = \Delta$. В самом деле, $|\Omega| \geq 1 + 9 + 18 + 1$ и в случае $|\Omega| = 29$ число ребер в Ω равно $9 \cdot 29/2$, противоречие. Для $a \in \Delta - \Omega$ подграф $[a]$ содержит не менее $30 \cdot 3/2$ вершин из $\Gamma - \Delta$. Таким образом, в случае $\Delta \neq \Omega$ имеем $k' = 9$ и $|\Omega| = 30$. Противоречие с тем, что по лемме 3 регулярный подграф из Γ степени 9 имеет не менее 52 вершин.

Пусть Δ является вполне регулярным графом степени $k' \geq 9$. Тогда число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно $v'(45 - k')$, но не больше $3(676 - v')$ и мы имеем неравенство

$(*)$ $v'(16 - k'/3) \leq 676$.

Из того что $1 + k' + k' \cdot (k' - 3)/3 + 1 \leq v'$, получаем второе неравенство

$(**)$ $k^2 \leq 3(v' - 2)$.

Так как $k' \leq 42$, то по $(*)$ имеем $v' \leq 338$ и по $(**)$ получим $k'^2 \leq 3 \cdot 336$. Отсюда $k' \leq 30$. Из неравенства $(*)$ получим $v' \leq 112$ и по $(**)$ $k' \leq 18$. Продолжая аналогичные рассуждения имеем $v' \leq 67$ и $k' \leq 12$. Так как по лемме 3 регулярный подграф из Γ степени 12 имеет не менее 104 вершин, то $k' = 9$ и по $(*)$ получим $v' \leq 52$.

Итак, $k' = 9, v' = 52$ и Δ является вполне регулярным графом с параметрами (52,9,2,3). Противоречие с леммой 5.

Допустим, что Ω — регулярный граф степени 6. Так как $\mu(\Omega) = 3$, то окрестность каждой вершины в Ω является шестиугольником. Пусть $a \in \Omega$. Тогда каждое ребро из $\Omega(a)$ лежит в окрестности единственной вершины из $\Omega_2(a)$. Если $b \in \Omega_2(a)$ и $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ является 2-путем xyz, то $\Omega(y)$ содержит четырехугольник $\{a, b; x, z\}$, противоречие. Значит, $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит ребро и вершину, несмежную с концами этого ребра. Но тогда $\Omega(b) \subset [a] \cup \Omega_2(a)$ и диаметр графа Ω равен 2. Поэтому Ω является графом Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$ и каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна не более чем с одной вершиной из Δ. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* $p = 3$, $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = |X_i|$ *и* Δ *содержит связную компоненту* Ω, *являющуюся графом Пэли с параметрами* $(13, 6, 2, 3)$. *Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) Δ *является объединением двух изолированных графов Пэли с параметрами* $(13, 6, 2, 3)$ *и* 2*-коклики;*

(2) Δ *является объединением графа Пэли с* α *изолированными вершинами и* β *изолированными* 4*-кликами,* $\alpha + 4\beta$ *делится на* 3 *и не превосходит* 18.

Доказательство. Пусть $p = 3$ и Δ содержит связную компоненту Ω, являющуюся графом Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$.

Если Δ содержит три связных компоненты $\Omega = \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, являющихся графами Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$, то $\Delta - \cup_i \Omega_i$ содержит вершину a (так как $|\Delta|$ сравнимо с 1 по модулю 3) и для $b \in \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит вершины u, u^g, u^{g^2}. Противоречие с тем, что $[u] \cap [u^g]$ содержит a, b и по вершине из Ω_2, Ω_3.

Пусть Δ содержит две связных компоненты $\Omega = \Omega_1, \Omega_2$, являющихся графами Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$. Тогда любая вершина из Ω_1 смежна с $3 \cdot 13$ вершинами, смежными с вершинами из Ω_2, поэтому $X_1(\Omega) = X_1(\Omega_2)$ и вершины из графов Пэли смежны лишь с вершинами из $X_2 \cup X_3$. Так как $|\Delta|$ сравнимо с 1 по модулю 3, то $|\Delta - (\Omega \cup \Omega_2)|$ сравнимо с 2 по модулю 3. Если $\Delta - (\Omega \cup \Omega_2)$ содержит 4-клику L, то он содержит вершину a вне L и подграфы $[a] \cap [b_i]$ для различных $b_i \in L$ не пересекаются и лежат в $[a] - X_1(\Omega)$, причем $|[a] - X_1(\Omega)| = 6$. Противоречие с тем, что $[b_i] \cap [b_j]$ содержит вершину из $[a]$ и 2 вершины из L для различных $i, j \in \{1, ..., 4\}$.

Если $\Delta - (\Omega \cup \Omega_2)$ является 2-кокликой $\{a, b\}$, то Окрестности $[a]$ и $[b]$ содержат 3 вершины из X_2 и по три вершины из X_1. Поэтому $x_1 = 6, x_3 = 39 \cdot 2 = 78, x_2 = 507 - 78 + 3 = 432, x_0 = 132$. Так как $x_1 + x_0 \geq \alpha_1(g)$, то $\alpha_1 \leq 138$. Далее, $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/13 - 4 = (7 \cdot 28 + \alpha_1(g))/13 - 4$ и $\alpha_1(g)$ сравнимо с -1 по модулю 13. Так как $\alpha_1(g)$ делится на 3 и не больше 138, то $\alpha_1(g) \in \{12, 51, 90, 129\}$.

Если $\Delta - (\Omega \cup \Omega_2)$ является 5-кокликой $\{a, b, c, d, e\}$, то окрестности вершин этой коклики лежат в X_3 (39 в окрестности графа Пэли и 6 вершин в окрестностях двух пар вершин коклики). Пусть $[a] \cap [b] \cap [c] = \Phi_1$, $[a] \cap [d] \cap [e] = \Phi_2$. Так как вершина d несмежна с вершинами из Φ_1, то $[b] \cap [d] = \Phi_3$, причем понятно, что $\Phi_3 \neq \Phi_1$. Получаем, что окрестность b в $X_0(\Omega)$ есть объединение Φ_1 и Φ_3. Но e несмежна с вершинами из Φ_1, поэтому она смежна с Φ_3. Противоречие с тем, что $[e] \cap [d]$ содержат 6 вершин. Утверждение (1) доказано.

Пусть Δ является объединением Ω с α изолированными вершинами и β изолированными 4-кликами. Тогда $\alpha+4\beta$ делится на 3. Если вершина a изолирована в Δ, то число ребер между $[a]$ и $\Delta-(\Omega\cup\{a\})$ не больше $39+6\cdot 2$, поэтому $|\Delta-\Omega|\le 18$. Если же $\alpha=0$ и вершина a лежит в 4-клике L из Δ, то число ребер между $[a]$ и $\Delta-L$ не больше $3(13+4(\beta-1))$, поэтому $3(13+4(\beta-1))/2\le 42$, поэтому $\beta\le 4$. Лемма доказана.

В леммах 9–10 предполагается, что $p=3$ и Δ является объединением α изолированных одновершинных подграфов и β 4-клик. Через X_i обозначим множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, и положим $x_i=|X_i|$.

Лемма 9. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Δ содержит изолированную вершину, то $|\Delta|\le 31$ и $\beta\le 7$;*

(2) *в случае $\alpha=0$ получим $\beta=1,4$ или 7;*

(3) *верны равенства $\sum x_i=676-\alpha-4\beta$, $\sum ix_i=45\alpha+4\cdot 42\beta$, $\sum\binom{i}{2}x_i=3(\binom{\alpha+4\beta}{2}-6\beta)$ и $x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i=(3\alpha^2+24\alpha\beta+48\beta^2-95\alpha-392\beta+1352)/2$.*

Доказательство. Покажем, что если Δ содержит изолированную вершину a, то $|\Delta|\le 31$. Так как $3(|\Delta-\{a\}|)/2\le 45$, то $|\Delta-\{a\}|\le 30$ и $\beta\le 7$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Δ является объединением β изолированных 4-клик. По лемме 3 имеем $\beta\le 8$. Но число $|\Delta|$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\beta=1,4$ или 7. Утверждение (2) доказано.

Граф Δ имеет $N=\alpha+4\beta$ вершин и $M=6\beta$ ребер, причем α из этих вершин имеют степень 0, 4β вершин имеют степень 3 и $\beta\le 7$. Заметим, что $x_i=0$ для $i\ge 4$. Из доказательства леммы 3 следует, что $\sum x_i=676-\alpha-4\beta$, $\sum ix_i=45\alpha+4\cdot 42\beta$, $\sum\binom{i}{2}x_i=3(\binom{\alpha+4\beta}{2}-6\beta)$. Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего, получим $x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i=(3\alpha^2+24\alpha\beta+48\beta^2-95\alpha-392\beta+1352)/2$. Утверждение (3) доказано.

Лемма 10. *Если $\alpha=0$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$\beta=4$, $x_1=3(308-x_0)$, $x_2=3(x_0-180)$, $x_3=276-x_0$ и $\alpha_1(g)=39t+21$ для подходящего $t\le 13$;*

(2) *$\beta=7$, $x_1=3(200-x_0)$, $x_2=3(x_0-164)$, $x_3=480-x_0$ и $\alpha_1(g)=39t+27$ для подходящего $t\le 6$.*

Доказательство. Пусть $\alpha=0$. По лемме 9 в случае $\beta=4$ получим $\sum x_i=660$, $\sum ix_i=672$, $\sum\binom{i}{2}x_i=288$. Отсюда $x_1=3(308-x_0)$, $x_2=3(x_0-180)$ и $x_3=276-x_0$. Заметим, что $\alpha_1(g)$ не превосходит $x_0+x_1=924-2x_0$. Далее, $\chi_1(g)=(112-\alpha_1(g))/13$ и $\alpha_1(g)=39t+21$ для подходящего $t\le 13$. Утверждение (1) доказано.

Если $\beta=7$, то по лемме 9 имеем $\alpha=0$, $\sum x_i=648$, $\sum ix_i=1176$ и $\sum\binom{i}{2}x_i=1008$. Отсюда $x_1=3(200-x_0)$, $x_2=3(x_0-164)$ и $x_3=480-x_0$. Заметим, что $\alpha_1(g)$ не превосходит $x_0+x_1=600-2x_0$. Далее, $\chi_1(g)=(196-\alpha_1(g))/13$ и $\alpha_1(g)=39t+27$ для подходящего $t\le 6$. Лемма доказана.

4. Инволютивные автоморфизмы графа с параметрами

Пусть t — инволюция из G. По лемме 6 граф $\Omega = \mathrm{Fix}(t)$ является непустым. Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Лемма 11. *Пусть a, b — различные вершины из Ω. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если a, b несмежны, то $[a] \cap [b] = c, d, e$ и либо $c, d, e \in \Omega$, либо можно считать, что $c^t = d$ и $e \in \Omega$, причем если вершины c, d несмежны, то $[c] \cap [d]$ содержит третью вершину f из Ω и либо*

(*i*) *$\{a, b, f; c, d, e\}$ является $K_{3,3}$-подграфом, либо*

(*ii*) *$\{a, b, f\}$ является 3-кокликой и разные пары вершин из этой коклики попадают в окрестности разных вершин из $\Omega - \{c, d\}$, либо*

(*iii*) *без ограничения общности, $f \in [a] - [b]$ и $[b] \cap [f] - \{c, d\}$ содержит вершину g из Ω;*

(2) *если a, b смежны, то $[a] \cap [b] = \{u, w\}$ и либо $u, w \in \Omega$, либо $u^t = w$, причем если вершины u, w несмежны, то $[u] \cap [w]$ содержит третью вершину f из Ω и либо*

(*i*) *вершины a, b несмежны с f и вершины из $[a] \cap [f] - \{u, w\}$ и из $[b] \cap [f] - \{u, w\}$ различны, либо*

(*ii*) *без ограничения общности, $f \in [a] - [b]$ и $[b] \cap [f] - \{u, w\}$ содержит вершину g из Ω.*

Доказательство. Пусть a, b — различные вершины из Ω. Если a, b несмежны, то $[a] \cap [b] = c, d, e$ и этот подграф t-допустим. Поэтому либо $c, d, e \in \Omega$, либо можно считать, что $c^t = d$ и $e \in \Omega$.

Допустим, что вершины c, d несмежны. Тогда $[c] \cap [d]$ содержит третью вершину f из Ω. Если f смежна с e, то $\{a, b, f; c, d, e\}$ является t-допустимым $K_{3,3}$-подграфом и верно $(1i)$.

Если же f несмежна с e, то либо $\{a, b, f\}$ является 3-кокликой и верно $(1ii)$, либо, без ограничения общности, $f \in [a] - [b]$ и $[b] \cap [f] - \{c, d\}$ содержит отличную от e вершину g из Ω. В этом случае верно $(1iii)$.

Если a, b смежны, то $[a] \cap [b] = \{u, w\}$ и либо $u, w \in \Omega$, либо $u^t = w$.

Допустим, что вершины u, w несмежны. Тогда $[u] \cap [w]$ содержит третью вершину f из Ω. Если вершины a, b несмежны с f, то вершины из $[a] \cap [f] - \{u, w\}$ и из $[b] \cap [f] - \{u, w\}$ различны, поэтому верно $(2i)$.

Заметим, что $f \notin [a] \cap [b]$, поэтому, без ограничения общности, $f \in [a] - [b]$ и $[b] \cap [f] - \{u, w\}$ содержит вершину g из Ω. Лемма доказана.

Из лемм 6 и 11 следует, что диаметр Ω равен 2.

Лемма 12. *Пусть $u \in \Gamma - \Omega$ и вершины u, u^t смежны. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$[u] \cap [u^t]$ содержит ребро $\{a, b\}$ из Ω;*

(2) *$[u] \cap [u^t]$ содержит ребро $\{w, w^t\}$ из $\Gamma - \Omega$;*

(3) *$[u] \cap [u^t]$ содержит две несмежные вершины $\{x, y\}$, причем либо $x, y \in \Omega$, либо $x^t = y$ и в любом случае $[x] \cap [y]$ содержит вершину из Ω.*

Доказательство. Пусть $u \in \Gamma - \Omega$ и вершины u, u^t смежны. Тогда подграф $[u] \cap [u^t]$ является t-допустимым и содержит точно две вершины. Если эти вершины смежны, то выполняется одно из утверждений (1) или (2).

Пусть $[u] \cap [u^t]$ содержит две несмежные вершины $\{x, y\}$. Тогда либо $x, y \in \Omega$, либо $x^t = y$. Так как $\mu = 3$, и подграф $[x] \cap [y]$ является t-допустимым, то он содержит вершину из Ω.

Лемма 13. *Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если вершины u, u^t несмежны, то $[u] \cap [u^t]$ содержит одну или три вершины из Ω;*

(2) $x_i = 0$ *для* $i \geq 4$ *и вершины u, u^t смежны тогда и только тогда, когда* $u \in X_0 \cup X_2$.

Доказательство. Пусть $u \in \Gamma - \Omega$ и вершины u, u^t несмежны. Тогда подграф $[u] \cap [u^t]$ является t-допустимым и содержит точно три вершины. Поэтому выполняется утверждение (1).

Если $u \in X_i$ и $i \geq 4$, то $[u] \cap [u^t]$ содержит не менее 4 вершин, противоречие. Вершины u, u^t смежны тогда и только тогда, когда $[u] \cap [u^t]$ содержит точно 2 вершины, тогда и только тогда, когда $u \in X_0 \cup X_2$.

Лемма 14. *Если для любых двух несмежных вершин u, w из Δ подграф $[u] \cap [w]$ содержит единственную вершину из Ω, то выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— граф Петерсена,* $x_0 = 324$*,* $x_1 = 266$*,* $x_2 = 74$*,* $x_3 = 2$*;*

(2) Ω *— граф* $MZ(4)$*, и либо* $x_1 = 146$*,* $x_2 = 54$*,* $x_3 = 382$*, либо* $x_1 = 64$*,* $x_2 = 132$*,* $x_3 = 356$*;*

(3) $\Omega \subset a^{\perp}$ *для некоторой вершины a, $\Omega(a)$ является объединением φ изолированных вершин и ψ треугольников, $\varphi + \psi$ нечетно и* $|\Omega| \leq 40$.

Доказательство. Если для любых двух несмежных вершин u, w из Ω подграф $[u] \cap [w]$ содержит единственную вершину из Ω, то по теореме 1.17.1 из [2] граф Ω либо сильно регулярен, либо содержится в $a^{\perp}$ для некоторой вершины a и подграф $\Omega(a)$ состоит из изолированных клик порядков 1 и 3, либо является объединением коклики Y и реберно регулярного графа Z с $\lambda(Z) = 2$, степень каждой вершины Y (из Z) равна y (равна z), $y < z$, $\lambda(b, c) = 0$ для любых смежных вершин $b \in Y$, $c \in Z$ и $|\Omega| = yz + 1$.

Если граф Ω сильно регулярен, то по лемме 2.1 Ω является графом Петерсена. Тогда $\sum x_i = 666$, $\sum i x_i = 420$, и $x_2 + 3x_3 = 80$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $x_0 = 326 - x_3$. Заметим, что $\alpha_1(g) = x_0 + x_2 = 406 - 4x_3$, поэтому $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/13 - 4 = (476 - 4x_3)/13 - 4$. Отсюда $x_3 = 13t + 2$ для некоторого четного числа t и с учетом равенства $x_2 + 3x_3 = 80$, получим $x_3 = 2$. Следовательно $x_0 = 324$, $x_1 = 266$ и $x_2 = 74$.

Пусть $\Omega = Y \cup Z$. Заметим, что $D = (y-1) + 9/4$ не является квадратом и ввиду теорем 1.17.4 и 1.17.5 из [2] граф Ω совпадает с $MZ(4)$. Тогда $|\Omega| = 36$, $\sum x_i = 640$, $\sum i x_i = 1400$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 1200$, $x_1 + x_2 = 200$, $x_0 + x_3 = 440$, $x_2 = 3x_0 - 120$, $x_1 = 320 - 3x_0$. Тогда $40 \leq x_0 \leq 106$. Из того, что $\chi_1(t) = (7\alpha_0(t) + \alpha_1(t))/13 - 4$ получаем, что $7 \cdot 36 + x_0 + x_2$ делится на 13 и x_0 сравнимо с 6 по модулю 13. Получаем, что $x_0 = 58$ или 84. В первом случае $\alpha_1(t) = 112$, $x_1 = 146$, $x_2 = 54$, $x_3 = 382$. Во втором $\alpha_1(t) = 216$, $x_1 = 64$, $x_2 = 132$, $x_3 = 356$.

Пусть Ω содержится в $a^\perp$ для некоторой вершины a и подграф $\Omega(a)$ является объединением φ изолированных вершин и ψ изолированных треугольников. Тогда $\varphi+3\psi$ нечетно, $\sum x_i = 675-\varphi-3\psi$, $\sum ix_i = (45-\varphi-3\psi)+44\varphi+126\psi$, $\sum \binom{i}{2}x_i = 2\varphi+\varphi(\varphi-1)+6\varphi\psi+9\psi(\psi-1)$.

Пусть Ω_0 является объединением ψ треугольников из Ω. Заметим, что если b — изолированная вершина из $\Omega(a)$, $c, c^t \in [a]\cap[b]$, то либо вершины c, c^t смежны и b лежит в треугольнике из $[a]$, либо вершины c, c^t несмежны и b лежит в четырехугольнике из $[a]$, содержащем две изолированные вершины из $\Omega(a)$, в частности $|[a]-\Omega| \ge \varphi$.

Если $|\Omega| = 45$, то $x_i = 0$ для $i \ne 3$, $x_0+x_2 = 0$, $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g)+\alpha_1(g))/13-4 = 7\cdot 45/13-4$, противоречие. В частности, $\psi \ne 15$.

Если $\psi = 14$, то $\varphi = 1$, $\sum x_i = 632$, $\sum ix_i = 1810$ и $\sum\binom{i}{2}x_i = 1724$. Получим $x_0+x_3 = 546$, $x_2 = 86+3x_0$ и $x_1 = 86-86-3x_0 = -3x_0$, следовательно $x_0 = x_1 = 0$ и $7\cdot 44+86$ не делится на 13, противоречие.

Пусть $\psi = 13$. Тогда $\varphi = 0$ или 2, $[a]-\Omega_0$ является либо объединением двух изолированных треугольников (и в этом случае $x_0 = 0$), либо шестиугольником. Если $\varphi = 2$, то $\sum x_i = 634$, $\sum ix_i = 1730$ и $\sum\binom{i}{2}x_i = 1566$. Отсюда $x_0+x_3 = 470$, $x_2 = 156+3x_0$ и $x_1 = 164-156-3x_0 = 8-3x_0$. Если $[a]-\Omega_0$ является объединением двух изолированных треугольников, то $\Gamma_2(a)$ содержит 8 вершин, смежных с парами вершин из $[a]-\Omega$, поэтому $x_1 = 8, x_0 = 0$. Далее, $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g)+\alpha_1(g))/13-4 = (294+156)/13-4$, противоречие. Если же $[a]-\Omega_0$ является шестиугольником, то t является отражением шестиугольника относительно диаметра и вершина из X_0 смежна с ребром и изолированной вершиной шестиугольника $[a]-\Omega_0$. Так как пересечение окрестностей указанной вершины и ее образа под действием t содержит 2 вершины из $a^\perp$, то $x_0 = 0$, $x_1 = 4$. В этом случае получим противоречие с тем, что $x_1 = 8-3x_0$.

Если $\varphi = 0$, то $x_0+x_3 = 396$, $x_2 = 216+3x_0$, $x_1 = 24-3x_0$, $7\cdot 40+216+4x_0$ делится на 13. Получаем $x_0 = 6$, $x_1 = 6$, $x_2 = 234$ и $x_3 = 390$, в частности, $[a]-\Omega$ является шестиугольником и t является центральной симметрией шестиугольника.

Пусть $\psi = 12$. Тогда $\varphi = 1$ или 3. Если $\varphi = 3$, то $\sum x_i = 636$, $\sum ix_i = 1650$ и $\sum\binom{i}{2}x_i = 1416$. Отсюда $x_0+x_3 = 402$, $x_2 = 210+3x_0$ и $x_1 = 24-3x_0$, следовательно $0 \le x_0 \le 8$. Тогда $7\cdot 40+210+4x_0$ делится на 13 и $x_0 = 14$, противоречие. Если $\varphi = 1$, то $\sum x_i = 638$, $\sum ix_i = 1564$ и $\sum\binom{i}{2}x_i = 1262$. Получим $x_0+x_3 = 336$, $x_2 = 254+3x_0$ и $x_1 = 48-3x_0$, следовательно $0 \le x_0 \le 16$. Тогда $7\cdot 38+254+4x_0$ делится на 13 и $x_0 = 0$, $x_3 = 336$, $x_2 = 254$ и $x_1 = 48$.

Если $\psi = 11$, то $\varphi = 0, 2, 4$ или 6. Пусть $\varphi = 6$. Тогда $\sum x_i = 636$, $\sum ix_i = 1656$ и $\sum\binom{i}{2}x_i = 1428$. Отсюда $x_0+x_3 = 408$, $x_2 = 204+3x_0$ и $x_1 = 24-3x_0$, следовательно $0 \le x_0 \le 8$. Тогда $7\cdot 40+204+4x_0$ делится на 13. Поэтому x_0 сравнимо с 9 по модулю 13, противоречие с тем, что x_0 не больше 8.

Пусть $\varphi = 4$. Тогда $\sum x_i = 638$, $\sum ix_i = 1570$ и $\sum\binom{i}{2}x_i = 1274$. Получим $x_0+x_3 = 342$, $x_2 = 248+3x_0$ и $x_1 = 48-3x_0$, следовательно $0 \le x_0 \le 16$. Тогда $7\cdot 38+248+4x_0$ делится на 13. Поэтому x_0 сравнимо с 8 по модулю 13 и $x_0 = 8$, $x_3 = 334$, $x_2 = 272$ и $x_1 = 24$.

Пусть $\varphi = 2$. Тогда $\sum x_i = 640$, $\sum ix_i = 1484$ и $\sum\binom{i}{2}x_i = 1128$. Отсюда $x_0+x_3 = 284$, $x_2 = 276+3x_0$ и $x_1 = 80-3x_0$, следовательно $0 \le x_0 \le 26$. Тогда $7\cdot 36+284+4x_0$ делится на 13. Поэтому x_0 сравнимо с 9 по модулю 13 и $x_0 = 22$, $x_3 = 262$, $x_2 = 342$ и $x_1 = 14$.

Пусть $\varphi = 0$. Тогда $\sum x_i = 642$, $\sum ix_i = 1398$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 990$. Получим $x_0 + x_3 = 234$, $x_2 = 288 + 3x_0$ и $x_1 = 120 - 3x_0$, следовательно $0 \leq x_0 \leq 40$. Тогда $7 \cdot 34 + 288 + 4x_0$ делится на 13. Поэтому x_0 сравнимо с 5 по модулю 13 и $x_0 = 18$, $x_3 = 216$, $x_2 = 234$ и $x_1 = 66$.

Если $\psi = 10$, то $\varphi = 1, 3, 5$ или 7. Пусть $\varphi = 7$. Тогда $\sum x_i = 638$, $\sum ix_i = 1576$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 1286$. Отсюда $x_0 + x_3 = 348$, $x_2 = 242 + 3x_0$ и $x_1 = 48 - 3x_0$, следовательно $0 \leq x_0 \leq 16$. Тогда $7 \cdot 38 + 242 + 4x_0$ делится на 13. Поэтому x_0 сравнимо с 3 по модулю 13 и $x_0 = 16$, $x_3 = 332$, $x_2 = 290$ и $x_1 = 0$.

Пусть $\varphi = 5$. Тогда $\sum x_i = 640$, $\sum ix_i = 1490$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 1140$. Получим $x_0 + x_3 = 290$, $x_2 = 270 + 3x_0$ и $x_1 = 80 - 3x_0$, следовательно $0 \leq x_0 \leq 26$. Тогда $7 \cdot 36 + 270 + 4x_0$ делится на 13. Поэтому x_0 сравнимо с 3 по модулю 13 и $x_0 = 16$, $x_3 = 274$, $x_2 = 318$ и $x_1 = 32$.

Пусть $\varphi = 3$. Тогда $\sum x_i = 642$, $\sum ix_i = 1404$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 1002$. Отсюда $x_0 + x_3 = 240$, $x_2 = 282 + 3x_0$ и $x_1 = 120 - 3x_0$, следовательно $0 \leq x_0 \leq 40$. Тогда $7 \cdot 34 + 282 + 4x_0$ делится на 13. Поэтому x_0 сравнимо с 0 по модулю 13 и $x_0 = 0$, $x_3 = 240$, $x_2 = 282$ и $x_1 = 120$; либо $x_0 = 26$, $x_3 = 214$, $x_2 = 360$ и $x_1 = 42$;

Пусть $\varphi = 1$. Тогда $\sum x_i = 644$, $\sum ix_i = 1318$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 872$. Получим $x_0 + x_3 = 198$, $x_2 = 278 + 3x_0$ и $x_1 = 168 - 3x_0$, следовательно $0 \leq x_0 \leq 56$. Тогда $7 \cdot 32 + 270 + 4x_0$ делится на 13. Поэтому x_0 сравнимо с 8 по модулю 13 и $x_0 = 8$, $x_3 = 190$, $x_2 = 254$ и $x_1 = 144$; либо $x_0 = 34$, $x_3 = 164$, $x_2 = 176$ и $x_1 = 66$.

Список литературы

[1] Махнев А.А., Падучих Д.В. *Об автоморфизмах графа Ашбахера*// Алгебра и логика 2001, т. 40, №2, 125–134.

[2] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs* // Berlin etc: Springer-Verlag – 1989.

[3] Махнев А.А., Носов В.В. *Об автоморфизмах сильно регулярных графов с* $\lambda = 0$, $\mu = 2$ // Матем. сборник 2004, т. 185, N 3,47–68.

[4] Махнев А.А., Минакова И.М. *Об автоморфизмах графов с* $\lambda = 1$, $\mu = 2$ // Дискрет. матем. 2004, т. 16, N 1, 95–104.

[5] Казарина В.И., Махнев А.А. *Об автоморфизмах сильно регулярных графов с* $\lambda = 2$ и $\mu = 3$ // Проблемы теор. и прклад. матем. Труды 36 Регион. молод. конф. Екатеринбург 2005, 35–36.

[6] Brouwer A.E., Haemers W.H. *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra* // Europ. J. Comb. 1993, v. 14, 397–407.

[7] Cameron P. *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts 45, Cambridge Univ. Press. – 1999.

Вероника Игоревна Казарина
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской 16,
620219, Екатеринбург, Россия
E-mail address: vkazarina@mail.ru