S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 88–101 (2005) УДК 517.958, 519.63
MSC 35Q60

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

И.В. ПРОХОРОВ, И.П. ЯРОВЕНКО

Abstract. In the paper boundary problems for the stationary integro-differential transport equation with generalized conditions of conjunction on the media interfaces are posed and numerically investigated. Methods of solution of a direct problem for the transport equation are proposed conformably to the problem of 3-D objects visualization and an optimization problem related with optics of clarifying coatings and to the problem of media masking. Results of proper numerical experiments are presented.

Введение

В работе изучается краевые задачи для стационарного монохроматического уравнения переноса излучения с коэффициентами, которые могут иметь разрывы первого рода. Разрывность коэффициентов соответствует тому, что среда, в которой изучается процесс переноса излучения, состоит из нескольких разнородных по своим физическим характеристикам материалов. Кроме этого, для каждого материала задан коэффициент преломления, характеризующий его оптические свойства. То есть коэффициент преломления неоднородной среды также является разрывной (кусочно-постоянной) функцией. На поверхностях, где рвутся коэффициенты, ставятся условия сопряжения, которые являются следствием известных формул Френеля [1,2]. Условия сопряжения выражают связь между падающим, отраженным и преломленным потоками на границах раздела однородных сред. По смыслу, изучаемые в работе задачи можно отнести к задачам дифракции [3].

Prokhorov, I.V., Yarovenko, I.P., A numerical solution of diffraction problems for the radiation transport equation.

Работа поддержана грантами РФФИ № 04-01-00126, № 05-07-90055 и грантом № 04-2-1-00-006 конкурса интеграционных проектов ДВО РАН с научными учреждениями Сибирского и Уральского отделений РАН.

Поступила 1 мая 2005 г., опубликована 16 августа 2005 г.

Отметим, что в теории переноса более распространены условия сопряжения типа "склейки" решения, в которых эффекты отражения (преломления) не учитываются [4-9]. Краевые задачи для уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения, учитывающие эффекты отражения и преломления, исследовались в работах [10-13]. Данная работа продолжает теоретические исследования работ [12,13]. Предложены численные методы решения прямой задачи для уравнения переноса, применительно к задаче визуализации трехмерных объектов, и оптимизационной задаче, имеющей отношение к оптике просветляющих покрытий [1,13-16] и к проблеме маскирующих сред [9,13]. Проведены соответствующие численные эксперименты.

1. Прямая задача для уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения

Пусть среда, в которой происходит процесс распространения излучения, заполняет в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ выпуклую ограниченную область G с диаметром d. Среда предполагается неоднородной и состоящей из конечного числа включений. Обозначим через $G_i, i = 1, ..., p$, попарно непересекающиеся области содержащиеся в G, интерпретируемые как неоднородности, и введем в рассмотрение множество

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^{p} G_i, \quad \overline{G}_0 = \overline{G}.$$

Границу области G, $\partial G = \overline{G} \setminus G$ будем называть внешней границей среды, а границу разделов сред G_i будем обозначать через γ, $\gamma = \partial G_0 \setminus \partial G$ и называть внутренней границей среды.

Поверхности ∂G и γ предполагаются кусочно-гладкими класса C^1. Если $z \in \partial G$, то через $n(z)$ будем обозначать единичный вектор внешней нормали в точке z, если же $z \in \gamma$ и лежит на границе контакта двух областей G_i, G_j, $i < j$, то нормаль $n(z)$ выбирается внешней к поверхности ∂G_j (с большим индексом). Относительно ∂G_0 будем дополнительно предполагать выполнимость условия обобщенной выпуклости, как оно понимается в [6]. То есть, любая прямая, имеющая общую точку с G_0, пересекает ∂G_0 в конечном числе точек.

Обозначая через Ω единичную сферу в $\mathbb{R}^3$, $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$ и через $\Omega_\pm(z)$ полусферы

$$\Omega_\pm(z) = \{\omega \in \Omega : \mathrm{sgn}(\omega \cdot n(z)) = \pm 1\},$$

построим граничные множества $\Gamma^\pm = \partial G \times \Omega_\pm(z)$. Пусть

$$f(z \pm 0\omega, \omega) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(z \pm \varepsilon\omega, \omega)$$

предельные значения функции $f(r, \omega)$ при соответствующем стремлении точки r к z, принадлежащей границе множества G_0. Для всех $(z, \omega) \in (\gamma \times \Omega) \cup \Gamma^\pm$ будем использовать обозначения $f^\pm(z, \omega) = f(z \mp 0\omega, \omega)$.

Задача 1. *Прямая задача дифракции для уравнения переноса заключается в нахождении неизвестной функции $f(r, \omega)$, удовлетворяющей уравнению*

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r) f(r, \omega) =$$
$$= \mu_s(r) \int_\Omega g(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega' + J(r, \omega), \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (1)$$

краевому условию на границе области G

$$f^-|_{\Gamma^-} = h(z, \omega) \quad (2)$$

и обобщенным условиями сопряжения на границе раздела γ

$$f^-|_{\gamma \times \Omega} = (\widehat{B} f^+)(z, \omega), \quad (3)$$

где функции μ, μ_s, J, g, h и оператор $\widehat{B}$ заданы.

Функция $f(r,\omega)$ интерпретируется как плотность потока излучения в точке r и направлении ω. Величины μ, μ_s, J характеризуют среду и называются соответственно коэффициентом ослабления, коэффициентом рассеяния и плотностью внутренних источников. Функция g называется индикатрисой рассеяния, а h описывает плотность потока входящего в среду излучения. Оператор сопряжения $\widehat{B}$ моделирует эффекты, возникающие на контактных границах. В прямой задаче величины $\mu, \mu_s, J, g, \widehat{B}, h$ считаются заданными, а f — искомой.

Пусть $\mu, \mu_s \in C_b(G_0)$, $J \in C_b(G_0 \times \Omega)$, $g \in C_b(G_0 \times \Omega \times \Omega)$, где $C_b(X)$ — пространство ограниченных и непрерывных функции на некотором открытом множестве X с нормой

$$\|\phi\| = \sup_{x \in X} |\phi(x)|.$$

Предполагается, что $\mu(r)$ удовлетворяет неравенству

$$0 < \underline{\mu} \le \mu(r) \le \overline{\mu}, \quad \underline{\mu}, \overline{\mu} = \text{const},$$

а функция $g(r, \omega \cdot \omega')$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} g(r, \nu) d\nu = 1$$

для всех $r \in G$. Будем предполагать, что коэффициент преломления $k(r)$ среды G представляет собой кусочно-постоянную функцию: $k(r) = k_i$ при $r \in G_i$. Пусть точка $z \in \gamma$ контактная точка двух и только двух областей, G_i и G_j. Обозначим через ν косинус угла между нормалью $n(z)$ в точке z и вектором ω, $\nu(z) = n(z) \cdot \omega$ и введем в рассмотрение функции

$$\widetilde{k}(z,\nu) = \begin{cases} k_i/k_j, & \text{если} \quad 0 < \nu \le 1, \\ k_j/k_i, & \text{если} - 1 \le \nu < 0, \end{cases}$$

$$\psi(z,\nu) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\nu) \sqrt{1 - \widetilde{k}^2(z,\nu)(1-\nu^2)}, & \text{если } 1 - \widetilde{k}^2(z,\nu)(1-\nu^2) > 0, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Если оператор сопряжения описывает только френелевское прохождение границы раздела, тогда он имеет вид

$$(\widehat{B} f^+)(z,\omega) = (\widehat{B}_{fr} f^+)(z,\omega) = R(z,\nu) f^+(z,\omega_R) + T(z,\nu) f^+(z,\omega_T), \tag{4}$$

где

$$\omega_R = \omega - 2\nu n, \quad \omega_T = \psi(z,\nu) n + \widetilde{k}(z,\nu)(\omega - \nu n),$$

$$R(z,\nu) = \frac{1}{2}(R_{\parallel}^2(z,\nu) + R_{\perp}^2(z,\nu)), \quad T(z,\nu) = \frac{1}{2}(T_{\parallel}^2(z,\nu) + T_{\perp}^2(z,\nu)) \frac{\widetilde{k}(z,\nu)\nu}{\psi(z,\nu)},$$

$$R_{\parallel}(z,\nu) = \frac{\widetilde{k}(z,\nu)\psi(z,\nu) - \nu}{\widetilde{k}(z,\nu)\psi(z,\nu) + \nu}, \quad R_{\perp}(z,\nu) = \frac{\psi(z,\nu) - \widetilde{k}(z,\nu)\nu}{\psi(z,\nu) + \widetilde{k}(z,\nu)\nu},$$

$$T_{\parallel}(z,\nu) = \frac{2\psi(z,\nu)}{\widetilde{k}(z,\nu)\psi(z,\nu) + \nu}, \quad T_{\perp}(z,\nu) = \frac{2\psi(z,\nu)}{\psi(z,\nu) + \widetilde{k}(z,\nu)\nu}.$$

Здесь ω_R(или ω_T) — направление потока излучения падающего на поверхность ∂G_j и в результате зеркального отражения (или соответственно преломления по закону Снеллиуса [1]) изменяющего свое направление на ω. Коэффициенты R и T характеризуют отражательную и пропускательную способность границы раздела сред G_i и G_j при Френелевском отражении (преломлении) для неполяризованного излучения.

Обозначим через $L_{r,\omega}$ луч исходящий из точки $r \in \mathbb{R}^3$ в направлении ω, $L_{r,\omega} = \{r + \omega t : t \geq 0\}$. Согласно условию обобщенной выпуклости при $r \in G_0$ он пересекает границу множества G_0 в конечном числе точек

$$r_i(r,\omega) = r + t_i(r,\omega)\omega,\ i = 1, ..., q(r,\omega),\ 0 < t_1(r,\omega) < t_2(r,\omega) < ... < t_q(r,\omega) \leq d.$$

Определим банахово пространство $L_\infty(X)$, состоящее из измеримых и ограниченных (почти всюду на X) функций, с нормой

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in X} \operatorname{vrai} |\phi(x)|.$$

Определение 1. *Функция $f(r,\omega)$ принадлежит классу $D(G \times \Omega)$ если:*
1) функции f и $\omega \cdot \nabla_r f$ принадлежат $L_\infty(G \times \Omega)$;
2) почти при всех $(r,\omega) \in G_0 \times \Omega$ функция $f(r + t\omega, \omega)$ абсолютно непрерывна по t на полуоткрытом интервале $(t_1(r, -\omega), t_1(r,\omega)]$.

Выражение $\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega)$ в определении 1 понимается как производная по пространственной переменной r в направлении ω:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega) = \left. \frac{\partial f(r + t\omega, \omega)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

В уравнении (1) и везде далее выражение $\omega \cdot \nabla_r f$ понимается в этом же обобщенном смысле. В [12] показано, что линейное множество $D(G \times \Omega)$ с нормой

$$\|f\|_D = \max \left\{ \|f^-\|_\infty, \left\| \frac{1}{\mu} \omega \cdot \nabla_r f + f \right\|_\infty \right\}$$

образует банахово пространство.

Определение 2. *Функция $f(r,\omega)$ является решением задачи дифракции (1), (2), (3) если: 1) $f \in D(G \times \Omega)$; 2) почти всюду на $G \times \Omega$ удовлетворяется уравнение (1); 3) почти всюду на Γ^- и $\gamma \times \Omega$ удовлетворяются условия (2) и (3) соответственно.*

Имеет место утверждение [12].

Теорема 1. *Пусть оператор сопряжения $\widehat{B}$ определяется равенством (4), $\mu, \mu_s \in L_\infty(G)$, $J \in L_\infty(G \times \Omega)$, $g \in L_\infty(G \times \Omega \times \Omega)$, $h \in L_\infty(\Gamma^-)$ и $\overline{\lambda} = \|\mu_s/\mu\|_\infty < 1$. Тогда решение краевой задачи f существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \overline{\lambda}} \max \left\{ \|h\|_\infty, \left\| \frac{J}{\mu} \right\|_\infty \right\}, \tag{5}$$

в случае $J \not\equiv 0$ и

$$\|f\|_\infty \leq \|h\|_\infty, \tag{6}$$

при $J \equiv 0$.

В работе [12] не только доказывается разрешимость краевой задачи, но и фактически дается конструктивный способ нахождения решения. Кратко приведем схему доказательства теоремы, поскольку это будет использовано нами при изложение материала следующего параграфа.

Сначала рассматривается краевая задача с условиями сопряжения, в которых оператор $\widehat{B}_{fr}$ заменен на $\widehat{B}_\delta = (1-\delta)\widehat{B}_{fr}$, где $0 < \delta < 1$. В этом случае решение краевой задачи существует, единственно и может быть построено в виде ряда Неймана, сходящегося в $D(G \times \Omega)$

$$f^\delta(r,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{T}_\delta^n f_0)(r,\omega). \tag{7}$$

Здесь

$$f_0(r,\omega) = J_\Gamma(r - t_1(r,-\omega)\omega,\omega)\exp\left\{-\int\limits_0^{t_1(r,-\omega)}\mu(r-t\omega)dt\right\} +$$
$$+\int\limits_0^{t_1(r,-\omega)}\exp\left\{-\int\limits_0^{t}\mu(r-t'\omega)dt'\right\}J(r-t\omega,\omega')dt, \quad (8)$$

где

$$J_\Gamma(z,\omega) = \begin{cases} h(z,\omega), & \text{если } (z,\omega)\in\Gamma^-, \\ 0, & \text{если } (z,\omega)\in\Gamma^+\cup(\gamma\times\Omega), \end{cases}$$

а $\widehat{T}_\delta : D \to D$ — оператор действующий по правилу

$$(\widehat{T}_\delta f)(r,\omega) = (\widehat{B}_\delta f)(r - t_1(r,-\omega)\omega,\omega)\exp\left\{-\int\limits_0^{t_1(r,-\omega)}\mu(r-t\omega)dt\right\} +$$
$$+\int\limits_0^{t_1(r,-\omega)}\exp\left\{-\int\limits_0^{t}\mu(r-t'\omega)dt'\right\}\mu_s(r-t\omega)\int\limits_\Omega g(r-t\omega,\omega\cdot\omega')f(r-t\omega,\omega')d\omega'dt. \quad (9)$$

Следующим этапом является доказательство сходимости при $\delta \to 0$ функции $f^\delta(r,\omega)$ к решению исходной краевой задачи $f(r,\omega)$ с оператором сопряжения $\widehat{B}_{fr}$, тем самым утверждается существование решения. Затем, независимо от доказательства существования решения показывается и его единственность.

2. Метод Монте-Карло решения прямой задачи дифракции для уравнения переноса. Визуализация трехмерных объектов.

В этом параграфе мы рассмотрим численный метод решения задачи (1)-(3). Для простоты изложения будем считать, что $J \equiv 0$, функция $g(r,\omega\cdot\omega')$ не зависит от переменной r, а коэффициенты рассеяния и ослабления постоянны внутри областей G_i, т.е. имеет место представление

$$\mu(r) = \sum_{i=1}^{p}\chi_i(r)\mu_i, \quad \mu_s(r) = \sum_{i=1}^{p}\chi_i(r)\mu_{s,i}. \quad (10)$$

Здесь $\chi_i(r)$ - характеристические функции областей G_i; $\mu_i, \mu_{s,i}$ - постоянные скалярные величины, и пусть $\lambda_i = \mu_{s,i}/\mu_i < 1$ для всех $i = 1,...,p$. Так же будем считать, что оператор сопряжения $\widehat{B}$ определяется выражением (4). Очевидно, что при сделанных нами предположениях выполняются условия теоремы 1 и решение задачи (1)-(3) существует и единственно. Для нахождения приближенного решения Задачи 1 заменим оператор $\widehat{B}$ оператором $\widehat{B}_\delta$, как было указано выше. В этом случае решение может быть найдено в виде сходящегося ряда Неймана (7). Ограничимся суммой N его первых членов

$$f_N(r,\omega) = \sum_{n=0}^{N}(\widehat{T}_\delta^n f_0)(r,\omega). \quad (11)$$

Перепишем эту сумму в виде следующих рекуррентных соотношений

$$f_n(r,\omega) = \widehat{T}_\delta f_{n-1}(r,\omega) + f_0(r,\omega), \quad n = 1,...,N. \quad (12)$$

Таким образом, если мы сумеем найти приближенную формулу для $\widehat{T}_\delta f$, мы сможем, используя соотношения (12), найти и решение задачи (1)-(3). Рассмотрим подробнее структуру оператора $\widehat{T}_\delta$. Выражение $\widehat{T}_\delta f$ состоит из двух слагаемых, первое из которых отвечает за вклад в общую плотность потока излучения эффектов преломления и отражения. Это слагаемое, как мы увидим далее, может быть вычислено точно (за исключением ошибок округления). Второе слагаемое в $\widehat{T}_\delta f$ соответствует вкладу рассеянных частиц. Рассмотрим это слагаемое более подробно. Пусть $r \in G_i$, тогда $\mu(r) = \mu_i$, $\mu_s(r) = \mu_{s,i}$ и с учетом изложенных выше предположений, путем несложных преобразований, интеграл в правой части (9) можно переписать в виде

$$I_n(r,\omega) = (1 - \exp\{-\mu_i t_1(r,-\omega)\})\lambda_i \times$$
$$\times \int\limits_0^{t_1(r,-\omega)} \int\limits_\Omega \frac{\mu_i \exp\{-\mu_i t\}}{1-\exp\{-\mu_i t_1(r,-\omega)\}} g(\omega\cdot\omega') f_{n-1}(r-\omega t,\omega') d\omega' dt. \quad (13)$$

Интеграл в этом выражении можно рассматривать, как математическое ожидание функции f_{n-1} от случайных величин t, ω' распределенных с плотностями $\mu_i e^{-\mu_i t}/(1-e^{-\mu_i t_1(r,-\omega)})$ и $g(\omega\cdot\omega')$ соответственно. Для вычисления этого интеграла мы используем метод Монте-Карло [17-19]. Пусть M - число испытаний, тогда следуя общей схеме метода Монте-Карло, значение $I_n(r,\omega)$ оценивается величиной

$$I_{n,M}(r,\omega) = (1-\exp\{-\mu_i t_1(r,-\omega)\})\lambda_i \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} f_{n-1}(r - t_k\omega, \omega_k),$$

где ω_k - является независимой реализацией случайной величины распределенной с плотностью $g(\omega\cdot\omega')$, а t_k — распределены с плотностью

$$\frac{\mu_i \exp\{-\mu_i t\}}{1-\exp\{-\mu_i t_1(r,-\omega)\}}.$$

Таким образом, согласно (12), значение функции f_n в точке (r,ω) оценивается величиной

$$f_{n,M}(r,\omega) = (\widehat{B}_\delta f^+_{n-1,M})(r - t_1(r,-\omega)\omega,\omega)\exp\{-\mu_i t_1(r,-\omega)\} +$$
$$+ (1-\exp\{-\mu_i t_1(r,-\omega)\})\lambda_i \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} f_{n-1,M}(r - t_k\omega,\omega_k) + f_0(r,\omega), \quad (14)$$
$$n = 1,...,N, \qquad f_{0,M}(r,\omega) = f_0(r,\omega).$$

Программная реализация рекуррентных соотношений (14) несложно реализуется с помощью использования рекурсивных процедур, поэтому мы не будем здесь подробно останавливаться на этом.

Относительно сходимости рассматриваемого метода стоит отметить, что в (12) приближенно считается только интегральное слагаемое, поскольку член отвечающий за отражение и преломление на границах раздела сред при использовании рекурсии вычисляется точно (за исключением ошибок округления). При вычислении интегрального слагаемого используется не M траекторий, как может показаться на первый взгляд, а M — деревьев, что соответствует порядка $3^N M$ линейных (физических) траекторий. Это связано с тем, что на каждом шаге рекурсии n, частица "делится" на три — за счет эффектов отражения, преломления и рассеяния. Если при построении дерева встречается полное внутреннее отражение или отсутствие в среде рассеяния, то число физических траекторий несколько уменьшается. Применение такого ветвящегося процесса увеличивает время расчета и не меняет порядок сходимости приближенного решения $f_{N,M}$ к точному f_N (он равен $O(M^{-\frac{1}{2}})$, но приводит к значительному уменьшению дисперсии оценки в аналогичных задачах, решаемых с помощью методов Монте-Карло [17-19]. Описанный здесь способ вычисления решения прямой задачи метод можно отнести к одной из модификаций метода Монте-Карло, называемой методом сопряженных блужданий [17] с использованием ветвления траекторий. В численных способах решения задач визуализации он иногда называется методом обратной трассировки лучей [20].

Скажем несколько слов по поводу выбора параметра "регуляризации" $\delta > 0$ в операторе сопряжения $\widehat{B}_\delta$. Численные эксперименты показали, что при значениях δ меньше 0.01 количественные характеристики функции f практически не меняются, а качественное поведение функции f, например в задаче визуализации (см. ниже), еще в меньшей степени зависит от этого параметра. Возможно, такое поведение решения прямой задачи, в предложенном способе его вычисления, объясняется следующим. Для проведенных тестовых задач, структура разбиения $G_1, G_2, ..., G_p$, ограничения на коэффициенты уравнения и начальное приближение $f_0(r,\omega)$ были выбраны такими, что обеспечивали сходимость ряда Неймана (7) и при $\delta = 0$. Вследствие чего, изменение малого параметра δ несущественно сказывается на решении задачи. В общем случае этого гарантировать нельзя и выбор параметра должен производиться из конкретных особенностей задачи. Учитывая выше сказанное, во всех экспериментах, содержащихся в статье, δ полагалось равным 0.001.

Для демонстрации работы метода Монте-Карло приведем одно из приложений задачи дифракции (1)–(3). Пусть Π некоторая плоскость, такая что $\Pi_G = \Pi \cap G \neq \emptyset$ и $\omega_0 \in \Omega$ - некоторое фиксированное направление. Поставим следующую задачу, являющуюся частным случаем краевой Задачи 1.

Задача 2. *Задачу нахождения $f(r,\omega_0)$ для всех $r \in \Pi_G$ из уравнения (1) и условий (2),(3), при известных $\mu, \mu_s, g, J, J_\Gamma, k$ назовем задачей визуализации.*

Заметим, что выбор такого названия для задачи не случаен. Действительно, пусть $f(r,\omega_0)$ найденное нами решение Задачи 2 для некоторой плоскости Π, если представить его графически на экране в виде полутонового изображения, то мы получим визуализацию объектов внутри среды G. Множество Π_G, либо его часть, далее будем называть экраном.

Отметим, что в большинстве работ по визуализации трехмерных объектов учитываются лишь эффекты преломления, отражения и ослабления потока частиц за счет поглощения, описываемого простым экспоненциальным законом. В некоторых работах, к указанным выше эффектам также добавляется однократное рассеяние в поверхностном слое и диффузионная аппроксимация решения уравнения переноса внутри объекта [21,22]. Напомним, что в нашей модели излучение не зависит от длины волны, поэтому изображение объекта будет представлено оттенками одного цвета, например, серого. Однако, с математической точки зрения теория представления изображения объекта в цвете проще, чем визуализация его геометрических характеристик, и несложно обобщается с монохроматического случая.

Рассмотрим четыре тестовых примера отражающих характерные особенности решения задачи визуализации. Во всех примерах область G представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат. Внутри области G находится включение G_1, представляющее собой объединение шести шаров с одинаковым радиусом 0.2 центры которых расположенных в точках: $(0,0,0.15)$, $(0,0,-0.15)$, $(0,0.15,0)$, $(0,-0.15,0)$, $(0.15,0,0)$, $(-0.15,0,0)$. Обозначим через G_2, множество $G_2 = G \setminus \overline{G}_1$. В рассматриваемых экспериментах полагалось, что $\mu_2 = 0.001, \mu_{s,2} = 0$, и показатели преломления $n_1 = 4, n_2 = 1$. Предполагается также, что если G_1 — рассеивающее включение, то фотоны в нем рассеиваются по закону Релея и индикатриса имеет вид:

$$g(\omega \cdot \omega') = \frac{3}{16\pi}(1 - (\omega \cdot \omega')^2). \tag{15}$$

В качестве внешнего источника излучения берется функция

$$h(z,\omega) = 0.3 + \exp(-0.5|\omega - \overline{\varpi}|^2), \tag{16}$$

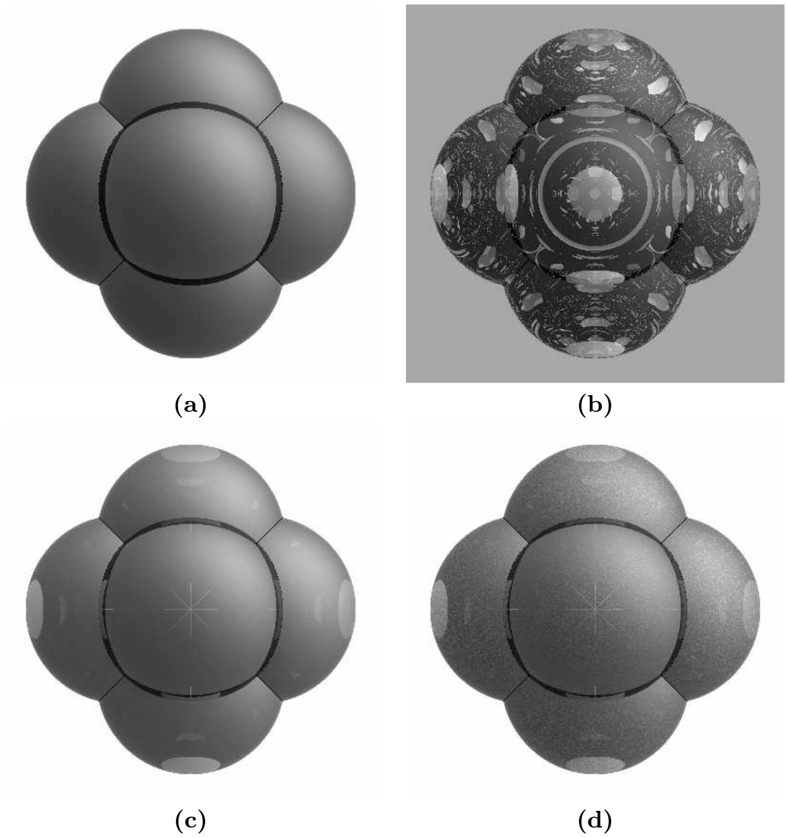


Рис. 1: Решение задачи визуализации для объекта, представляющего собой объединение шести шаров:
(a) — нерассеивающая оптически плотная среда;
(b) — слабо поглощающий не рассеивающий объект;
(c) — рассеивающая среда средней плотности;
(d) — параметры среды совпадают с тестом 1c, но для вычисления решения использовалось меньшее число траекторий.

где $\overline{\omega} = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Функция h моделирует источник излучения равномерно распределенный в пространстве, интенсивность которого возрастает экспоненциально при приближении к направлению $\overline{\omega}$. Решение задачи визуализации ищется для направления $\omega_0 = (0, 0, 1)$ на экране определяемом плоскостью $r_2 = 0.6$. При графическом представлении решения используется разрешение 400×400 точек. На рисунке 1a приведено графическое представление решения задачи визуализации, для случая когда в среде G_1 отсутствует рассеяние ($\mu_{s,1} = 0$) и коэффициент полного взаимодействия внутри включения достаточно большой ($\mu_1 = 10$). В этом случае основной вклад в решение дает первый член ряда Неймана (11), который соответствует однократному отражению. Эффекты преломления и многократного отражения при этом не заметны из-за сильного ослабления излучения внутри среды.

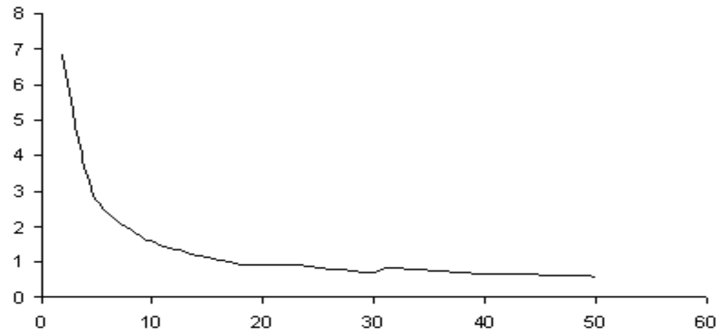


Рис. 2: График функции $\Delta(M)$, характеризующий относительную статистическую погрешность (в процентах) приближенного решения.

Рисунок 1b представляет решение задачи визуализации, для случая аналогичного предыдущему, но коэффициент полного взаимодействия внутри включения достаточно маленький ($\mu_1 = 0.05$). В этом случае излучение мало ослабляется при прохождении через среду и становятся заметными эффекты многократного преломления и отражения.

На рисунке 1c приведены результаты расчетов для рассеивающей среды G_2 с коэффициентами $\mu_1 = 2, \mu_{s,1} = 1.9$.

При численных расчетах в первых двух тестах учитывалась сумма 25 первых членов ряда Неймана (11) (то есть $N = 25$), а в третьем 10 членов. Последнее обстоятельство вызвано тем, что в первых двух экспериментах рассеяние в среде отсутствовало, что повлекло за собой исчезновение суммы в рекуррентных соотношениях (14), и как следствие, уменьшение количества траекторий и значительное сокращение времени счета. Фактически, в отсутствии рассеяния строится только одна траектория ($M = 1$), или точнее говоря одно дерево детерминированных траекторий с началом в точке экрана. С физической точки зрения, эти траектории описывают всевозможные пути фотона попавшего в точку r под направлением ω_0, и при этом испытавших не более N актов отражения или преломления на границах раздела сред. В третьем эксперименте для расчета функции f в каждой точке (r, ω_0) использовалось 50 деревьев. Для сравнения, на рисунке 1d приведены результаты эксперимента с данными из третьего тестового примера, но с моделированием только двух ветвящихся траекторий для каждой точки экрана. Число же физических траекторий частиц, попавших в точку $r \in \Pi_G$ с направлением ω_0 — порядка $2 \cdot 3^N$. На рисунке 1d становится заметна характерная "шероховатость" поверхности визуализируемого тела, связанная с рассеянием. Однако, здесь она вызвана не только физическими причинами, но и погрешностью вычислений. При увеличении разрешения экрана, можно заметить матовый оттенок поверхности объекта и на рисунке 1c. В этом случае, такая особенность поверхности в большей степени обусловлена физическими особенностями процесса распространения света в рассеивающей среде, нежели погрешностью метода. Основанием для этого утверждения послужили результаты численных экспериментов. Было установлено, что при моделировании 10 и более деревьев, внешний вид визуализируемой среды практические не изменяется. Кроме того, с данными последнего эксперимента была вычислена исправленная выборочная дисперсия для функции f_N в точке $r_0 = (0.15, 0.6, 0),\ \omega = \omega_0$

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M} (f_{N,m}^2 - f_{N,M}^2)$$

для $M = 2, 3, .., 50$. Вычисления показали достаточно быстрое уменьшение дисперсии с ростом M. На рисунке 2 приведен график функции

$$\Delta(M) = \frac{\sigma_M}{f_{N,M}} \cdot 100\%, \quad M = 2, 3, ..., 50,$$

характеризующий относительное среднеквадратичное отклонение величины $f_{N,M}$ от f_N. Численные значения функции $\Delta(M)$ в некоторых точках промежутка $[2, 50]$ равны: $\Delta(2) = 6.86\%$, $\Delta(10) = 1.57\%$, $\Delta(20) = 0.9\%$ и $\Delta(50) = 0,58\%$.

3. Задача оптимизации для уравнения переноса. Просветляющие покрытия и маскирующие среды

Как и ранее через G_0 будем обозначать объединение подобластей $G_1, G_2, ..., G_p$, разбивающих среду G на p включений. Для каждой неоднородности заданы коэффициенты $\mu_i, \mu_{s,i}, J_i, k_i$, являющиеся постоянными величинами. Пусть для простоты везде в этом параграфе фазовая функция рассеяния g не зависит от переменной r.

Далее возьмем, например, область G_p и поместим в нее еще два включения G_{p+1}, G_{p+2} следующим образом. Множество $G_{p+1} \cup G_{p+2}$ находится внутри G_p и не имеет общих точек с ∂G_p, то есть $\overline{G_{p+1} \cup G_{p+2}} \subset G_p$. Обозначим через $G'_p = G_p \setminus \overline{G_{p+1} \cup G_{p+2}}$. Будем также предполагать, что границы G_{p+2} и G'_p не имеют общих точек, а область G_{p+1} "покрывает" G_{p+2} и является разделяющим множеством между областями G_{p+2} и G'_p. Точнее говоря $\overline{G'_p} \cap \overline{G}_{p+2} = \emptyset$ и $\overline{G'_p} \cap \overline{G}_{p+1} \cap \overline{G}_{p+2} = \partial G_{p+1}$.

Обозначим через G'_0 объединение областей $G_1, G_2, ..., G_{p-1}, G'_p, G_{p+1}, G_{p+2}$. В G_{p+1}, G_{p+2} коэффициенты уравнения полагаются равными μ_{p+1}, $\mu_{s,p+1}$, J_{p+1}, k_{p+1} и μ_{p+2}, $\mu_{s,p+2}$, J_{p+2}, k_{p+2}, соответственно, а в дополняющей до G_p области G'_p значения коэффициентов пусть остаются прежними $\mu_p, \mu_{s,p}$, J_p, k_p. Решения прямой задачи дифракции (1)–(3) для разбиений $G_1, G_2, ..., G_p$ и $G_1, G_2, ..., G_{p-1}, G'_p, G_{p+1}, G_{p+2}$ обозначим соответственно через f и f'.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу для уравнения переноса.

Задача 3. *Пусть для каждой среды $G_1, G_2, ..., G_{p-1}, G'_p, G_{p+1}, G_{p+2}$ заданы коэффициенты: $\mu_i, \mu_{s,i}, J_i$, $i = 1, ..., p+2$. Кроме того, определены функции h, g и коэффициенты преломления $k_1, k_2, ..., k_{p-1}, k_p, k_{p+2}$ сред $G_1, G_2, ..., G_{p-1}, G'_p, G_{p+2}$. Требуется найти коэффициент преломления k_{p+1} среды G_{p+1} так, чтобы он сообщал минимум функции*

$$F(k_{p+1}) = (f(r, \omega) - f'(r, \omega, k_{p+1}))^2. \tag{17}$$

Здесь (r, ω) некоторая фиксированная точка из $(G \times \Omega) \cup \Gamma^+$, не принадлежащая множеству $\overline{G}_{p+1} \cup \overline{G}_{p+2}$.

С физической точки зрения суть поставленной задачи заключается в выборе оптимального коэффициента преломления среды G_{p+1}, покрывающей включение G_{p+2} так, чтобы минимизировать влияние составного тела $\overline{G_{p+1} \cup G_{p+2}}$ на отраженное и рассеянное от него излучение в точке (r, ω). В этом случае, покрытие G_{p+1} является маскирующим для объекта G_{p+2} при визуализации его вблизи точки r в направлении ω.

Эта задача тесно связана с задачей синтеза оптическим систем и, в частности, задачей о просветлении оптики [1,14-16]. Раннее, эти задачи ставились и исследовались в рамках волновой теории и в основном для упрощенных уравнений Максвелла [1,14-16]. Отметим лишь работу [13], в которой задача о просветляющей пленке была сформулирована в терминах модели, основанной на уравнении переноса с обобщенными условиями сопряжения в области с плоско-параллельной симметрией. Там же были получены некоторые аналитические решения задачи. В частности, в [13] показано, что экстремальная задача просветления оптики в чисто поглощающей трехслойной среде $\{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : a_0 < r_3 < a_1, \, a_1 < r_3 < a_2, \, a_2 < r_3 < a_3\}$ с ненулевыми внешними источниками только на одной части границы $(r_3 = a_0)$ имеет единственное решение

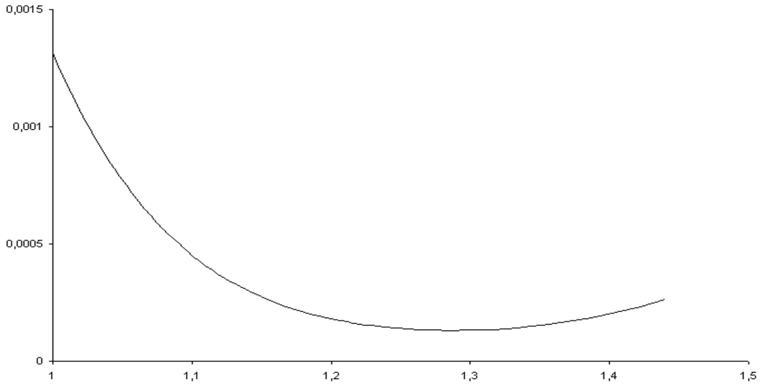


Рис. 3: Зависимость минимизируемой функции F от коэффициента преломления маскирующего слоя k_3.

$k_2 = \sqrt{k_1 k_3}$, при условии, что направление ω, в котором происходит минимизация отраженного сигнала, перпендикулярно поверхностям раздела сред. Однако, даже в этой простой модели учет рассеяния и "подсветки" на обеих внешних границах неоднородного слоя приводит к трудностям при получении аналитических выражений для коэффициента преломления k_2 промежуточного слоя $\{a_1 < r_3 < a_2\}$. Поэтому в настоящей статье мы предлагаем численный метод решения оптимизационной Задачи 3.

Предлагаемый метод решения Задачи 3 не претендует на оригинальность и вряд ли является самым экономичным. В настоящей работе, начальной в своем направлении, ставится цель показать принципиальную возможность решения новой поставленной оптимизационной задачи. Метод можно отнести к числу "полеточных" и его краткий алгоритм заключается в следующем.

1. В заданной точке (r, ω) вычисляется решение f прямой задачи (1)–(3), соответствующее разбиению области G на подобласти $G_1, G_2, ..., G_p$.

2.Задается интервал $[k_{\min}, k_{\max}]$ изменения коэффициента преломления k_{p+1} и выбирается шаг дискретизации $\Delta = |k_{\min} - k_{\max}|/l$ этого интервала. Затем численно в точке (r, ω) фазовой области $G \times \Omega$ вычисляется значения $f'(r, \omega, k_{p+1})$ прямой задачи (1)–(3), соответствующее разбиению $G_1, G_2, ..., G_{p-1}, G'_p, G_{p+1}, G_{p+2}$, при $k^j_{p+1} = k_{\min} + \Delta j,\ j = 0, ..., l$.

2. Среди значений $k^j_{p+1},\ j = 0, ..., l$ выбирается то, которое доставляет минимум функции

$$F(k^j_{p+1}) = (f(r, \omega) - f'(r, \omega, k^j_{p+1}))^2,$$

заданной на дискретном множестве.

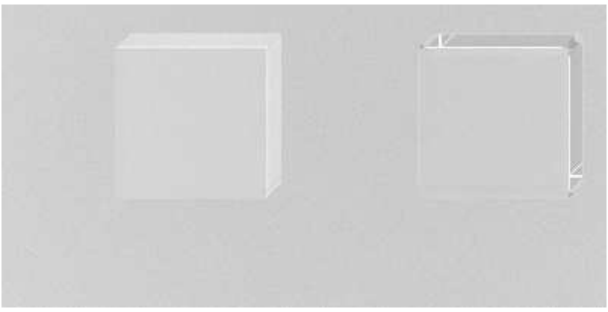
Далее в работе рассматриваются конкретные численные эксперименты по решению Задачи 3.

Будем считать, что область G представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат. Внутри среды G помещено включение: G_1 представляющее собой куб с центром в точке $(-0.2, 0, 0)$, грани которого параллельны координатным плоскостям и длина ребра равна 0.2. И пусть $G_2 = G \setminus \overline{G}_1$. Внутрь области G_2 поместим два включения G_3 и G_4. Область G_4 есть куб с центром в точке $(0.2, 0, 0)$, грани которого параллельны координатным плоскостям, а длина ребра составляет 0.18. Множество G_3, "покрывающее" G_4, определяется следующими соотношениями:

$$G_3 = \{(r_1, r_2, r_3) : r_1 \in (0.1, 0.11) \cup (0.29, 0.3), r_2 \in (-0.1, -0.09) \cup (0.09, 01),$$

$$r_3 \in (-0.1, -0.09) \cup (0.09, 01)\}.$$

(a)



(b)

Рис. 4: Визуализация в рассеивающей среде двух кубов, один из которых (справа), покрыт маскирующим слоем: **(a)** — визуализация для направления $\omega_0 = (0,0,1)$, перпендикулярного экрану; **(b)** — визуализация для направления $\omega_0 = (0.1, 0.1, \sqrt{0.98})$.

Введем так же обозначение $G_2' = G_2 \setminus \overline{G_3 \cup G_4}$. Предполагается, что $J \equiv 0$ и коэффициенты μ и μ_s внутри области G постоянны и равны 0.5 и 0.25, соответственно. Входящее в среду излучение задается функцией вида

$$h(z,\omega) = \exp(-0.2|\omega - \overline{\omega}|^2), \tag{18}$$

где $\overline{\omega} = \{0,0,1\}$. Индикатриса рассеяния, как и ранее, определяется формулой (15). Коэффициенты преломления $k_1 = k_4 = 1.44, k_2 = 1$. Обозначим через $f(r,\omega)$ решение задачи (1)–(3) для области определяемой разбиением G_1, G_2, а через $f'(r,\omega,k_3)$ решение задачи при разбиении G_1, G_2', G_3, G_4 и пусть $F(r,\omega,k_3) = (f(r,\omega) - f'(r,\omega,k_3))^2$.

На рисунке 3 приведен график функции $F(r,\omega,k_3)$ в точке $r = (0.2, 0, 0.6)$ для направления $\omega = (0,0,1)$ в зависимости от коэффициента преломления k_3, $k_3 \in [k_1, k_4]$. Функция F достигает своего наименьшего значения при $k_3 = 1.28$. Заметим кстати, что оптимальное значение k_3, полученное при численном решении Задачи 3, отлично от своего значения $k_3 = \sqrt{k_1 k_4} = \sqrt{1.44} = 1.2$ в классической постановке задачи о просветлении оптики.

На рисунке 4a приведено графическое представление решения задачи визуализации при $k_3 = 1.28$. В качестве экрана выбрана часть плоскости $r_3 = 0.6$, $r_1 \in (-0.4, 0.4), r_2 \in (-0.2, 0.2)$. Направление визуализации $\omega_0 = (0,0,1)$. Как видно из рисунка 3a куб, покрытый маскирующей пленкой (справа), виден хуже.

На рисунке 4b приведено графическое представление задачи визуализации для направления $\omega_0 = (0.1, 0.1, \sqrt{0.98})$. Видимость маскируемого куба улучшилась, но все же его передняя грань, для которой подбирался коэффициент преломления, видна хуже по сравнению с той же гранью куба без пленки.

Список литературы

[1] Борн М., Вольф Э. *Основы оптики.* М.: Наука, 1973.

[2] Исимару А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах.* М.: Мир, Т. 1,2. 1981.

[3] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М.:Наука, 1973.

[4] Владимиров В.С. *Математические задачи односкоростной теории переноса частиц.* – Тр.МИАН СССР, 1961, 61, С. 3-158.

[5] Марчук Г.И., Лебедев В.И. *Численные методы по теории переноса нейтронов.* М.: Атомиздат, 1981.

[6] Гермогенова Т.А. *Локальные свойства решений уравнения переноса.* – М.: Наука, 1986.

[7] Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В. *Использование уравнения переноса в томографии.* М.: Логос, 2000

[8] Anikonov D.S., Kovtanyuk A.E., and Prokhorov I.V. *Transport Equation and Tomography.* – Utrecht-Boston. VSP. 2002. pp. viii+208.

[9] Anikonov D.S., Nazarov V.G., and Prokhorov I.V. *Poorly Visible Media in X-Ray Tomography.* – Utrecht-Boston. VSP. 2002. pp. viii+294p.

[10] Прохоров И.В. *Краевая задача переноса излучения в неоднородной среде с условиями отражения на границе.* // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 6. С. 848-851.

[11] Прохоров И.В. *Определение поверхности раздела сред по данным томографического просвечивания.* // ЖВМ и МФ. 2002. Т. 42, № 10. С. 1542–1555.

[12] Прохоров И.В. *О разрешимости краевой задачи теории переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред.* // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67, № 6. С. 169–192.

[13] Prokhorov I.V., Yarovenko I.P., and Krasnikova T.V. *One Extremal Problem for the Radiation Transport Equation.* // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2005. Vol. 13. № 3.

[14] Гласко В.Б., Тихонов А.Н., Тихонравов А.В. *О синтезе многослойных покрытий.* //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 14. № 1. С. 135-144.

[15] Свешников А.Г., Тихонравов А.В., Яншин С.А. *Синтез оптических покрытий при наклонном падении света.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23. № 4. С. 929–935.

[16] Свешников А.Г., Тихонравов А.В. *Математические методы в теории синтеза оптических тонкослойных систем.* //В сборнике "Некорректные задачи естествознания"под редакцией А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 254–274.

[17] Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назарлиев М.А. и др. *Метод Монте-Карло в атмосферной оптике.* Новосибирск: Наука, 1976.

[18] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. *Статистическое моделирование.* М.: Наука, 1982.

[19] Михайлов Г.А. *Весовые методы Монте-Карло.* Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

[20] J. Arvo. *Backward Ray Tracing.* //Proceedings of SIGGRAPH'86, Developments in Ray Tracing course notes, Aug. 1986.

[21] H. Wann Jensen, S. R. Marschner, M. Levoy, and P. Hanrahan. *A Practical Model for Subsurface Light Transport.* //Proceedings of SIGGRAPH'2001. pp. 511–518. Los Angeles, August 2001.

[22] H. Wann Jensen. *Realistic Image Synthesis Using Photon Mapping.* Publisher: AK Peters, 2001.

Игорь Васильевич Прохоров
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: prh@iam.dvo.ru

Иван Петрович Яровенко
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: yarovenko@iam.dvo.ru