S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 83–87 (2005) УДК 512.536
MSC 13A99

НАСЛЕДСТВЕННО ЧИСТЫЕ МОНОИДЫ

О.В. КНЯЗЕВ

Abstract. In the paper, pure monoids are described.

Понятие чистоты и некоторые родственные понятия, возникшие в теории абелевых групп, могут быть определены, как отмечено в [1] и [2], для произвольных универсальных алгебр. Это обстоятельство дает новый подход к изучению строения алгебр из разных классов. В [1] намечены возможные перспективы дальнейших исследований в этом направлении. Настоящая заметка посвящена решению, в классе моноидов, одной из поставленных в [1] проблем. Прежде чем сформулировать эту проблему напомним необходимые для этого определения. Здесь моноиды рассматриваются как алгебры с одной бинарной ассоциативной операцией — умножение и одной нульарной операцией — выделение единицы 1. Пусть $\mathbf{V}$ —многообразие всех моноидов; $L(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$; $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$; $A \in \mathbf{V}$.

Единственным классом конгруэнции ρ на моноиде A, являющимся подмоноидом моноида A, будет класс, содержащий единицу 1. Обозначают его через $ker(\rho)$ и называют *ядром* конгруэнции ρ. Ядро $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-моноиды по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подмоноидом моноида A, будет класс, содержащий единицу 1. обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}$-*вербалом* моноида A.

Подмоноид B моноида A называют $\mathbf{X}$-*чистым* в A, если

$$\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B. \qquad (*)$$

В случае, когда равенство $(*)$ выполняется для любого атома решетки $L(\mathbf{V})$ (для любого подмногообразия многообразия $\mathbf{V}$) говорят, что подмоноид B моноида A является *атомно чистым* в A (*вербально чистым* в A). Моноид, у которого всякий подмоноид — атомно чистый (вербально чистый), называют

Knyazev, O.V., The hereditary pure monoids.

Поступила 10 мая 2005 г., опубликована 30 июня 2005 г.

наследственно атомно чистым (наследственно вербально чистым). Если все подмоноиды моноида A суть $\mathbf{X}$-чистые подмоноиды, то говорят, что A — *наследственно* $\mathbf{X}$*-чистый* моноид.

В [2] определяется понятие чистоты для произвольных универсальных алгебр и ставится задача(проблема 17): *описать наследственно атомно чистые алгебры данного многообразия* (и та же задача для наследственно вербально чистых алгебр). Мы сообщаем здесь решение проблемы 17 из [2] для многообразия $\mathbf{V}$ всех моноидов.

Мы будем пользоваться стандартными теоретико-полугрупповыми понятиями; их определения можно найти в [3].

Введем следующие обозначения: $\mathbf{A}$ — класс всех абелевых элементарных групп, т.е. групп, являющихся прямыми произведениями циклических групп простых порядков; $\mathbf{S}$ — многообразие полурешеток с единицей; $\mathbf{K}$ — класс всех комбинаторных периодических моноидов (т.е. класс всех периодических моноидов, тривиально пересекающийся с классом $\mathbf{G}$ всех групп); $\mathbf{A}_p$ — многообразие всех абелевых групп простой экспоненты p.

Здесь удобно напомнить, что атомами решетки $L(\mathbf{V})$ являются многообразия $\mathbf{S}$, $\mathbf{A}_p$ для всех простых p и только они.

Через $\circ$ обозначим $\mathbf{V}$-произведение Мальцева классов моноидов из $\mathbf{V}$. Произведение Мальцева ([4]) подклассов $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ класса $\mathbf{V}$ определяется следующим образом:

$$A \in \mathbf{X} \circ \mathbf{Y} \Leftrightarrow (A \in \mathbf{V}) \& (\exists \rho \in Con(A))(A/\rho \in \mathbf{Y}) \& (ker(\rho) \in \mathbf{X}),$$

где $Con(A)$ — решетка конгруэнций алгебры A, $ker(\rho)$ — ядро конгруэнции ρ. В нашем случае $ker(\rho)$ состоит из одного класса конгруэнции ρ — класса, содержащего единицу 1.

Теорема 1. *Следующие условия для моноида A эквивалентны:*

(1) A — наследственно вербально чистый моноид;

(2) A — наследственно атомно чистый моноид;

(3) $A \in \mathbf{K} \circ \mathbf{A}$;

(4) A есть расширение комбинаторного моноида с помощью элементарной абелевой группы.

Напомним, что моноид A называется $\mathbf{X}$*-полным*, если его $\mathbf{X}$-вербальная конгруэнция $\rho(\mathbf{X}, A)$ есть универсальное отношение на A. Пусть a — элемент моноида A. Тогда подмоноид моноида A, порожденный a, называют *циклическим* и обозначают через $\langle a \rangle$. Элемент a моноида A называют $\mathbf{X}$*-полным*, если $\mathbf{X}(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$. Множество всех $\mathbf{X}$-полных элементов моноида A обозначим через $C_{\mathbf{X}}(A)$, а класс всех моноидов, состоящих только из $\mathbf{X}$-полных элементов, — через $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$.

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Справедливость следующей леммы проверяется без особого труда.

Лемма 1. *Класс $\mathbf{C}_{\mathbf{A}_p}$ совпадает с классом всех периодических моноидов, у которых все циклические подмоноиды имеют период взаимно простой с p.*

Лемма 2. *Класс $\mathbf{C}_{\mathbf{S}}$ совпадает с классом всех периодических групп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что если моноид $\langle a \rangle$ — группа, то $\mathbf{S}(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$. Если моноид $\langle a \rangle$ не является группой, то к нему единица присоединена внешним образом. Следовательно, разбиение $\langle a\rangle$ на два класса $\{1\}$ и $\{\langle a\rangle\backslash\{1\}\}$ задает нетривиальный гомоморфизм на полурешетку. Значит $\mathbf{S}(\langle a\rangle) \neq \langle a\rangle$.

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{X}$ — подмногообразие многообразия $\mathbf{V}$ всех моноидов. Тогда для моноида A следующие условия эквивалентны:*

(1) A — наследственно $\mathbf{X}$-чистый;

(2) Каждый циклический подмоноид моноида A суть $\mathbf{X}$-чистый;

(3) $A \in \mathbf{C_X} \circ \mathbf{X}$.

Доказательство. 1) (1) $\Rightarrow$ (2). Очевидно.

2) (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть у моноида A каждый циклический подмоноид суть $\mathbf{X}$-чистый и C — подмоноид моноида A. Покажем, что C есть $\mathbf{X}$-чистый подмоноид. Если $c \in \mathbf{X}(A) \cap C$, то $\langle c\rangle \subseteq \mathbf{X}(A)$. Поэтому $\mathbf{X}(A) \cap \langle c\rangle = \langle c\rangle$. По условию циклический подмоноид $\langle c\rangle$ является $\mathbf{X}$-чистым в A. Следовательно, $\mathbf{X}(\langle c\rangle) = \langle c\rangle$. Но $c \in C$. Тогда $\mathbf{X}(\langle c\rangle) \subseteq \mathbf{X}(C)$. Значит $\langle c\rangle \subseteq \mathbf{X}(C)$. Итак $\mathbf{X}(A) \cap C \subseteq \mathbf{X}(C)$. Очевидно, что $\mathbf{X}(C) \subseteq \mathbf{X}(A) \cap C$. Доказали, что $\mathbf{X}(A) \cap C = \mathbf{X}(C)$.

3) (1) $\Rightarrow$ (3). Нетрудно понять, что для любого моноида A имеет место включение $C_{\mathbf{X}}(A) \subseteq \mathbf{X}(A)$. Пусть A — наследственно $\mathbf{X}$-чистый моноид. Покажем, что $\mathbf{X}(A) \subseteq C_{\mathbf{X}}(A)$. Если $a \in \mathbf{X}(A)$, то $\mathbf{X}(A) \cap \langle a\rangle = \langle a\rangle$. Следовательно, $\mathbf{X}(\langle a\rangle) = \langle a\rangle$. Поэтому $a \in C_{\mathbf{X}}(A)$ и $\mathbf{X}(A) \subseteq C_{\mathbf{X}}(A)$. Итак $\mathbf{X}(A) = C_{\mathbf{X}}(A)$. Из этого равенства следует, что $A \in \mathbf{C_X} \circ \mathbf{X}$.

4) (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $A \in \mathbf{C_X} \circ \mathbf{X}$. Тогда $\mathbf{X}(A) \in \mathbf{C_X}$. Отсюда $\mathbf{X}(A) \subseteq C_{\mathbf{X}}(A)$. Обратное включение, как уже отмечалось выше, справедливо для всякого моноида. Следовательно, $\mathbf{X}(A) = C_{\mathbf{X}}(A)$. Покажем, что в этом случае моноид A является наследственно $\mathbf{X}$-чистым. Предположим противное, что C — подмоноид моноида A и $\mathbf{X}(A) \cap C \neq \mathbf{X}(C)$. Значит $\mathbf{X}(C)$ строго включается в $\mathbf{X}(A)$ $\cap$ C. Пусть $a \in ((\mathbf{X}(A) \cap C) \setminus \mathbf{X}(C))$. Элемент a принадлежит подмоноиду C, что влечет включение $\mathbf{X}(\langle a\rangle) \subseteq \mathbf{X}(C)$. Отсюда $\mathbf{X}(\langle a\rangle) \neq \langle a\rangle$. Получили противоречие с тем, что $a \in C_{\mathbf{X}}(A)$. Полученное противоречие показывает, что моноид A — наследственно $\mathbf{X}$−чистый.

Лемма 4. *Всякий периодический моноид является наследственно $\mathbf{S}$-чистым.*

Доказательство. Хорошо известно, что множество G всех групповых элементов периодического моноида A есть подгруппа моноида A, причем для любых элементов a и b из A из того, что $ab \in G$ следует, что $a \in G$ и $b \in G$. Отсюда разбиение моноида A на два класса $\{G\}$ и $\{A\backslash G\}$ задает конгруэнцию ρ на A такую, что $A/\rho \in \mathbf{S}$ и $ker(\rho) = \{G\}$ есть группа. Очевидно, что любой групповой элемент всякого моноида является $\mathbf{S}$-полным. Поэтому $ker(\rho) \in \mathbf{C_S}$. Следовательно, по лемме 3, A — наследственно $\mathbf{S}$-чистый моноид.

Лемма 5. *Всякий наследственно $\mathbf{A}_p$-чистый моноид суть периодический моноид.*

Доказательство. Пусть A — наследственно $\mathbf{A}_p$-чистый моноид, $a \in A$ и $|\langle a\rangle| = \infty$. Тогда для любого атома $\mathbf{A}_p$ имеем, что $\mathbf{A}_p(\langle a\rangle) \neq \langle a\rangle$ и $a^p \in \mathbf{A}_p(\langle a\rangle)$. Значит $\langle a^p\rangle \leq \mathbf{A}_p(A)$. Тогда $\mathbf{A}_p(A) \cap \langle a^p\rangle = \langle a^p\rangle$. Но $\mathbf{A}_p(\langle a^p\rangle) \neq \langle a^p\rangle$. (т.к. $|a^p| = \infty$). Получили противоречие с тем, что A — наследственно $\mathbf{A}_p$-чистый моноид.

Доказательство теоремы 1. 1) (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть A — наследственно атомно чистый моноид, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$ и $\mathbf{P}$ — атом решетки $L(\mathbf{V})$. По предположению, моноид A есть наследственно $\mathbf{P}$-чистый. Значит из леммы

3 следует, что $\mathbf{P}(A)= C_{\mathbf{P}}(A)$. Поэтому $\mathbf{X}(A) \subseteq C_{\mathbf{P}}(A)$ для любого атома $\mathbf{P}$ такого, что $\mathbf{P} \leq \mathbf{X}$. Предположим, что моноид A не является наследственно $\mathbf{X}$-чистым. Тогда из леммы 3 заключаем, что $C_{\mathbf{X}}(A) \neq \mathbf{X}(A)$. При этом $C_{\mathbf{X}}(A) \subset C_{\mathbf{P}}(A)$. Итак в $\mathbf{X}(A)$ найдется элемент a такой, что $\mathbf{X}(\langle a \rangle) \neq \langle a \rangle$. Покажем, что последнее неравенство не имеет места. Действительно. Нетривиальный циклический моноид $\langle a \rangle / \rho(\mathbf{X}; \langle a \rangle)$ принадлежит многообразию $\mathbf{X}$. Нетрудно понять, что для всякого нетривиального циклического моноида $\langle b \rangle$ из многообразия $\mathbf{X}$ найдется хотя бы один атом $\mathbf{P}$ решетки $L(\mathbf{V})$ такой, что $\mathbf{P} \leq \mathbf{X}$ и $\mathbf{P}(\langle b \rangle) \neq \langle b \rangle$. Значит и для циклического моноида $\langle a \rangle / \rho(\mathbf{X}; \langle a \rangle)$ найдется атом $\mathbf{P}$ такой, что $\mathbf{P}(\langle a \rangle / \rho(\mathbf{X}; \langle a \rangle)) \neq \langle a \rangle / \rho(\mathbf{X}; \langle a \rangle)$. Отсюда $\mathbf{P}(\langle a \rangle) \neq \langle a \rangle$. А это означает, что моноид $\langle a \rangle$ не является $\mathbf{P}$-чистым подмоноидом. Получили противоречие с тем, что моноид A — наследственно атомно чистый. Следовательно наше предположение о том, что $C_{\mathbf{X}}(A) \neq \mathbf{X}(A)$ неверно. Последнее доказывает, что моноид A является наследственно $\mathbf{X}$-чистым.

2) (2) $\Rightarrow$ (1). Очевидно.

3) (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть A — наследственно атомно чистый моноид. По лемме 5 моноид A является периодическим моноидом. Покажем, что $\bigcap_{p \in P} \mathbf{A}_p(A)$ будет наибольшим среди всех $\mathbf{A}_p$-полных подмоноидов моноида A. (Здесь p пробегает множество P всех простых чисел.) Действительно. Пусть C — наибольший среди всех $\mathbf{A}_p$-полных подмоноидов моноида A. (Существование такого подмоноида показано в [5].) Тогда $\mathbf{A}_p(C) = C \leq \mathbf{A}_p(A)$. Отсюда $C \leq \bigcap_{p \in P} \mathbf{A}_p(A)$. Но $\bigcap_{p \in P} \mathbf{A}_p(A) \leq \mathbf{A}_p(A)$ и приэтом A — наследственно чистый моноид. Поэтому моноид $\bigcap_{p \in P} \mathbf{A}_p(A)$ должен быть $\mathbf{A}_p$-полным моноидом для каждого простого числа p. Следовательно, $\bigcap_{p \in P} \mathbf{A}_p(A) \leq C$. Итак $C= \bigcap_{p \in P} \mathbf{A}_p(A)$. Ясно, что C является ядром конгруэнции $\bigcap_{p \in P} \rho(\mathbf{A}_p, A)$. Подмоноид C состоит из элементов $\mathbf{A}_p$-полных по всем простым p. По лемме 1 элементы с таким свойством у периодических моноидов суть комбинаторные элементы. Получаем, что ядро конгруэнции $\bigcap_{p \in P} \rho(\mathbf{A}_p, A)$ принадлежит классу $\mathbf{K}$, а фактор-моноид $A \ / \bigcap_{p \in P} \rho(\mathbf{A}_p, A)$ есть периодическая абелева группа. Хорошо известно, что периодическая абелева группа разлагается в прямое произведение своих примарных компонент. Таким образом $A \in \mathbf{K} \circ \mathbf{A}$.

4) (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $A \in \mathbf{K} \circ \mathbf{A}$. Всякий моноид A из $\mathbf{K} \circ \mathbf{A}$ — периодический моноид, а это значит по лемме 4 моноид A будет наследственно $\mathbf{S}$-чистым моноидом.

Покажем, что $\mathbf{K} \circ \mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}_{\mathbf{A}_p} \circ \mathbf{A}_p$ для любого простого p. Пусть $A \in \mathbf{K} \circ \mathbf{A}$. Тогда существует конгруэнция ρ такая, что $A/\rho \in \mathbf{A}$ и $ker(\rho) \in \mathbf{K}$. Пусть $\theta : A \to A/\rho$ и $\pi : A/\rho \to (A/\rho)/\rho(\mathbf{A}_p, A/\rho)$ — естественные гомоморфизмы, а $\sigma : A \to (A/\rho)/\rho(\mathbf{A}_p, A/\rho)$ — композиция этих гоморфизмов и τ — конгруэнция, определяемая гомоморфизмом σ (τ — ядро гомоморфизма σ). Моноид A/τ очевидно принадлежит многообразию $\mathbf{A}_p$. Покажем, что моноид $ker(\tau)$ находится в классе $\mathbf{C}_{\mathbf{A_p}}$. Группа A/ρ суть прямое произведение циклических групп простых порядков, а ее подгруппа $\mathbf{A}_p(A/\rho)$ — прямое произведение циклических групп, порядки которых не равны p. Ядро $ker(\rho)$ конгруэнции ρ — комбинаторный периодический моноид. Отсюда полный прообраз B подгруппы $\mathbf{A}_p(A/\rho)$ при естественном гомоморфизме σ есть расширение комбинаторного периодического моноида с помощью прямого произведения циклических групп, порядки которых простые числа не равные p. Тогда у моноида B все элементы имеют порядок взаимно простой с p. Значит, по лемме 1 моноид $B = ker(\tau)$ принадлежит классу $\mathbf{C}_{\mathbf{A}p}$. Нашли конгруэнцию τ на моноиде A такую, что фактор-моноид A/ρ принадлежит многообразию $\mathbf{A}_p$ и $ker(\tau) \in \mathbf{C}_{\mathbf{A}p}$. Следовательно по лемме 3, A — наследственно $\mathbf{A}_p$-чистый моноид. Из сказанного выше следует, что A — наследственно атомно чистый моноид.

5) (3) $\Leftrightarrow$ (4). Очевидно.

Список литературы

[1] Л.М. Мартынов, *О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр //Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара.* Волгоград: Перемена 2000, 179 - 190.

[2] L. M. Martynov, *On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility, and purity for arbitrary algebras // International conference on Modern Algebra and Its Applications. Vanderbilt University, Nashville, Ten-nesse, May 14-18, 1996.* Schudule and Abstracts. P. - 79-80.

[3] Л.Н. Шеврин, *Полугруппы*, гл IV. В книге "Общая алгебра"(под ред. Скорнякова Л.А.). Т.2. М.; Наука. 1991.

[4] А.И. Мальцев, *Об умножении классов алгебраических систем*, Сиб. матем. журн., 1967, T.VIII. **2**, 346-365.

[5] Л.М. Мартынов, *Об одном радикале алгебр со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям*, Вестник ОмГУ,**2** (2004), 19-21.

Олег Викторович Князев
Омский государственный педагогический университет,
наб. Тухачевского, 14, кафедра алгебры,
644099, Омск, Россия
E-mail address: knyazev@omsk.edu