S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 308–324 (2005) УДК 512.544
MSC 20E34

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ SF-ГРУПП

М.Н. ИВКО

Abstract. We consider groups that are extensions of groups without involutions by a four-group L. Using the properties of the centralizers of involutions of L we have obtained some characterizations of some types of SF-groups in sufficiently wide classes of groups.

Введение

В работе [1] А.А. Шафиро и В.П. Шунковым была получена характеризация черниковских групп в классе периодических почти локально разрешимых групп по свойствам централизаторов инволюций четверной подгруппы Клейна. При этом, благодаря одному из результатов, полученных ещё в работе [2] М.И. Каргаполовым (см. ниже предложение 7), задача была сведена к изучению групп вида $G = H \leftthreetimes L$, где H — подгруппа, не содержащая инволюций, а L — четверная группа Клейна. В данной работе группы такого вида изучаются в гораздо более обширных классах групп и, в частности, по свойствам централизаторов инволюций из L получены характеризации слойно конечных групп в классе слабо сопряжённо 2-бипримитивно конечных групп, а также характеризации черниковских групп и периодических локально разрешимых групп, удовлетворяющих условию примарной минимальности (=слойно черниковских групп), в классе сопряжённо бипримитивно конечных групп (=групп Шункова).

Ivko, M.N., Characterizations of some types of SF-groups.

Поступила 16 сентября 2005 г., опубликована 24 декабря 2005 г.

Определения и известные результаты

Приведём определения некоторых понятий, используемых в работе.

1. Говорят, что *группа G удовлетворяет условию (a, a)-конечности для некоторого элемента $a \in G$*, если почти все (т.е. все за исключением конечного числа) группы вида гр(a, a^g) $(g \in G)$ конечны. Группа G удовлетворяет *сильному условию (a, a)-конечности* для некоторого элемента $a \in G$, если конечны все группы вида гр(a, a^g) [3].

Пользуясь свойствами диэдральных групп, нетрудно показать, что для любой инволюции $i \in G$ условие (i, i)-конечности и сильное условие (i, i)-конечности совпадают.

2. Группа G называется *слабо (сопряжённо) q-бипримитивно конечной* $(q \in \pi(G))$, если любые два её (сопряжённых) элемента простого порядка q порождают конечную подгруппу [4].

3. Группа G называется *(сопряжённо) q-бипримитивно конечной* $(q \in \pi(G))$, если для любой её конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два (сопряжённых) элемента простого порядка q порождают конечную подгруппу [5].

4. Группа G называется *группой Шункова*, [1] если она сопряжённо бипримитивно конечна, т.е. для любой её конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряжённых элемента простого порядка порождают конечную подгруппу (см., например, [6]).

Остальные термины и обозначения, используемые в работе, являются общепринятыми (см., например, [7]–[10]), а ниже приведены известные результаты, ссылаться на которые будем как на предложения с соответствующим номером.

1. (В.П. Шунков [9]) Если группа G, содержащая инволюции, обладает сильно вложенной подгруппой и удовлетворяет условию (i, i)-конечности для некоторой инволюции $i \in G$, то все инволюции в G сопряжены между собой.
2. (С.Н. Черников [10]) Группа G, являющаяся расширением слойно конечной группы при помощи слойно конечной группы, слойно конечна тогда и только тогда, когда она локально нормальна.
3. (В.П. Шунков [3]) Пусть $G = H \leftthreetimes (a)$, где H — подгруппа, не содержащая инволюций, и a — её автоморфизм порядка 2. Если в группе G выполняется условие (a, a)-конечности, то справедливы следующие утверждения:
   1) $G = BC_G(a) = C_G(a)B$, где B — множество элементов из G строго вещественных относительно a;
   2) гр$(B) \lhd G$.
4. (В.П. Шунков [11]) Пусть G — группа, D — SF-подгруппа из G, A, C — некоторые подгруппы из G. Если D обладает такими подгруппами F и R, что $|D\!:\!R| < \infty$, $R \leqslant F$, $A, D \leqslant N_G(F)$ и $C, D \leqslant N_G(R)$, то в D существует подгруппа X конечного индекса в D и $A, C, D \leqslant N_G(X)$.
5. (В.П. Шунков [9]) Если группа G обладает почти регулярной инволюцией i и удовлетворяет условию (i, i)-конечности, то она локально конечна, почти разрешима и обладает полной частью.

[1] По аналогии с термином "черниковская группа" автор в данном случае считает более удачным употреблять термин "шунковская группа".

6. (А.А. Шафиро, В.П. Шунков [1]) Пусть G — периодическая почти локально разрешимая группа, обладающая элементарной абелевой подгруппой L порядка p^2. Если централизатор в G любого неединичного элемента из L является черниковской группой, то G — черниковская группа.
7. (М.И. Каргаполов [2]) Если G — периодическая почти локально разрешимая S_pF-группа, то $G/O_{p'}(G)$ — черниковская группа. В частности, если силовская p-подгруппа из G конечна, то фактор-группа $G/O_{p'}(G)$ конечна.
8. (М.И. Каргаполов [2]) Локально разрешимая SF-группа обладает полной частью.
9. (Файт, Томпсон [13]) Конечная группа нечетного порядка разрешима.
10. (В.П. Шунков [14]) Пусть $G = P \leftthreetimes (i)$, где P — периодическая полная абелева группа нечётного порядка, а (i) — инволюция. Если инволюция i почти регулярна в P, то все элементы из P строго вещественны относительно i.
11. (В.П. Шунков [9]) В бесконечной черниковской группе любая элементарная абелева p-подгруппа порядка p^2 обладает элементом с бесконечным централизатором.
12. (Н.Г. Сучкова, В.П. Шунков [15]) Группа Шункова тогда и только тогда является черниковской, когда она удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп.
13. (Я.Д. Половицкий [16]) Периодическая локально разрешимая группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию примарной минимальности, когда она является расширением полной абелевой группы A с черниковскими силовскими p-подгруппами по всем p с помощью локально нормальной группы с конечными силовскими p-подгруппами по всем p, причём каждый элемент из G неперестановочен лишь с конечным числом силовских p-подгрупп из A.
14. (И.И. Павлюк [17]) Локально конечная группа, удовлетворяющая условию примарной минимальности почти локально разрешима.
15. (А.К. Шлёпкин [18]) Фактор-группа группы Шункова по слойно конечному нормальному делителю также является группой Шункова.
16. (А.К. Шлёпкин [19]) Периодическая группа Шункова, удовлетворяющая условию примарной минимальности локально конечна.

1. Характеризация слойно конечных групп

Начнём со следующего элементарного результата.

Лемма 1.1. *В группе $G = H \leftthreetimes A$, где A — абелева группа, никакие две элемента из A не сопряжены.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что для некоторых двух различных элементов $a,\ b \in L$ существует элемент $g \in G$ такой, что $a^g = b$. Тогда поскольку $G = H \leftthreetimes A$, то $g = ch$ для некоторых $c \in A$ и $h \in H$. Отсюда

$$a^{-1}b = a^{-1}a^{ch} = a^{-1}h^{-1}c^{-1}ach = a^{-1}h^{-1}ah \in H \cap A = 1.$$

Следовательно, $a = b$. Противоречие. Лемма доказана.

Следствие 1.1. *В группе $G = H \leftthreetimes L$, где L — четверная группа Клейна, никакие две инволюции из L не сопряжены.*

Вытекающее из леммы 1.1 следствие позволяет получить следующее обобщение предложения 7 из [1], где аналогичная ситуация рассматривалась лишь для периодических локально разрешимых групп.

Лемма 1.2. *Пусть $G = H \leftthreetimes L$ — слабо сопряжённо 2-бипримитивно конечная группа, где H — подгруппа без инволюций, а L — четверная группа Клейна. Тогда $G =$ гр$(C_G(i), C_G(j), C_G(k))$, где i, j, k — инволюции из L.*

Доказательство. Пусть $K =$ гр$(C_G(i), C_G(j), C_G(k))$ и предположим, что $G \neq K$. Покажем, что для любого элемента $g \in G \setminus K$ пересечение $K \cap K^g$ не содержит инволюций. Прежде всего отметим, что силовские 2-подгруппы сопряжены в G (это нетрудно показать, опираясь на условие слабо сопряжённо 2-бипримитивной конечности). Поэтому, если бы это пересечение содержало бы инволюцию, то её содержало бы и пересечение $L^t \cap L^{sg}$ для некоторых $t, s \in K$. Очевидно, тогда возможны только два случая.

1) $i^t = i^{sg}$ для некоторой инволюции $i \in L$. Отсюда $sgt^{-1} \in C_G(i)$, и поскольку $C_G(i) \leqslant K$, то $sgt^{-1} \in K$. Но $s, t \in K$, и следовательно, $g \in K$, что противоречит выбору элемента g.

2) $i^t = j^{sg}$ для некоторых инволюций $i, j \in L$. Тогда $i = j^{sgt^{-1}}$, что противоречит следствию 1.1.

Таким образом, для любого элемента $g \in G \setminus K$ пересечение $K \cap K^g$ не содержит инволюций, т.е. подгруппа K сильно вложена в G. Но тогда по предложению 1 все инволюции в группе G сопряжены, что противоречит следствию 1.1. Лемма доказана.

Отметим также, что лемма 1.2 является обобщением известной теоремы Р. Брауэра из [12] (см. также [8]) для случая, когда $p = 2$.

Следствие 1.2. *Если слабо сопряжённо 2-бипримитивно конечная группа G, обладает четверной подгруппой Клейна L, то любая L-инвариантная подгруппа из G, не содержащая инволюций, лежит в подгруппе порожденной централизаторами инволюций из L.*

Следующий результат так же, как и лемма 1.1, является довольно элементарным, и его доказательство приводится лишь для полноты изложения.

Лемма 1.3. *Пусть G — группа, i — некоторая ее инволюция и F — подгруппа, не содержащая инволюций, нормальная в G. Если в подгруппе $F \leftthreetimes (i)$ выполняется (сильное) условие $(i,\ i)$-конечности, то $C_{G/F}(iF) = C_G(i)F/F$.*

Доказательство. Обозначим через T полный прообраз для $C_{G/F}(iF)$ в группе G. Очевидно, $C_G(i) \leqslant T$, а поэтому покажем, что $T \leqslant C_G(i)$. Пусть t — произвольный элемент из T. Так как $t^{-1}itF = iF$, то $t^{-1}it = if$ для некоторого элемента $f \in F$. Если $f = 1$, то $t \in C_G(i)$, а поэтому предположим, что $f \neq 1$. Обозначим $K =$ гр$(i,\ f)$. Тогда $K = (f) \leftthreetimes (i) =$ гр$(i,\ i^f)$, так как f является строго вещественным элементом относительно инволюции i.

Далее, поскольку в подгруппе $F \leftthreetimes (i)$ выполняется условие $(i,\ i)$-конечности, то подгруппа K конечна, причём, по свойствам диэдральных групп существует элемент $f_1 \in K \cap F$ такой, что $t^{-1}it = f_1^{-1}if_1$, и следовательно, $f_1^{-1}t \in C_G(i)$. Но тогда $t \in C_G(i)F$, и, ввиду произвольности выбора элемента t, лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть $G = H \leftthreetimes L$, где H — подгруппа без инволюций, а L — четверная группа Клейна. Если централизатор в H любой инволюции из L*

локально нормален, и $|G : C_G(i)| < \infty$ для некоторой инволюции $i \in L$, то группа G локально нормальна.

Доказательство. Прежде всего отметим, что по теореме 23.1.1 из [7] G является локально конечной группой. Далее, так как для любого элемента $g \in G$ существуют такие $h \in H$ и $l \in L$, что $g = hl$, то, поскольку $C_G(g) \geqslant C_G(h) \cap C_G(l)$, достаточно показать, что подгруппа H локально нормальна, и $|G : C_G(l)| < \infty$ для любой инволюции $l \in L$. Но последнее утверждение очевидным образом вытекает из условия леммы, а поэтому остается показать лишь справедливость первого.

Пусть l — произвольная инволюция из L. По предложению 3 для любого элемента $h \in H$ существуют такие $b \in B$ и $t \in C_H(l)$, что $h = bt$. Так как $t \in C_H(l)$, а $C_H(l)$ по условию локально нормален, то $|C_H(l) : C_H(l) \cap C_H(t)| < \infty$, а поскольку $|H : C_H(l)| < \infty$, то и $|H : C_H(t)| < \infty$, поэтому для завершения доказательства леммы достаточно показать, что $\text{гр}(B) \leqslant FC(H)$.

Так как по условию леммы $|H : C_H(l)| < \infty$, то, как следует из предложения 3, множество B конечно, и в силу локальной конечности подгруппы H подгруппа $\text{гр}(B)$ конечна, причём по предложению 3 $\text{гр}(B) \lhd H$. Но тогда по упражнению 3.1.4 из [7] $\text{гр}(B) \leqslant FC(H)$, что, как уже отмечалось, завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Слабо сопряжённо 2-бипримитивно конечная группа G вида $G = H \leftthreetimes L$, где H — подгруппа без инволюций, а L — четверная группа Клейна, тогда и только тогда является слойно конечной когда централизатор в G любой инволюции из L слойно конечен.*

Доказательство. Так как из условия теоремы следует, что $C_G(L)$ является слойно конечной (и, следовательно, локально нормальной) подгруппой, то согласно лемме 1.4 и предложению 2 достаточно показать, что $|G : C_G(L)| < \infty$.

Покажем сначала, что если $W = \text{гр}(C_G(i), C_G(j))$, где i, j — произвольные инволюции из L, то $|W : C_G(L)| < \infty$. Действительно, так как $C_G(i)$ и $C_G(j)$ слойно конечны, то, очевидно, $|C_G(i) : C_G(L)| < \infty$ и $|C_G(j) : C_G(L)| < \infty$. Положим

$$F = \bigcap_{g \in C_G(i)} C_G(L^g) \quad \text{и} \quad R = \bigcap_{h \in C_G(j)} F^h.$$

Тогда $C_G(i), C_G(L) \leqslant N_G(F)$ и $C_G(j), C_G(L) \leqslant N_G(R)$. Отсюда согласно предложению 4 в $C_G(L)$ существует подгруппа конечного индекса X такая, что $C_G(i), C_G(j), C_G(L) \leqslant N_G(X)$, а это позволяет показать, что подгруппа W локально конечна.

Действительно, если подгруппа X не содержит инволюций, то согласно лемме 1.3 $|C_{W/X}(iX)| = |C_W(i)/X| < \infty$, и по предложению 5 фактор-группа W/X локально конечна, а тогда по теореме 23.1.1 из [7] локально конечной является и группа W. Если же подгруппа X обладает инволюцией, скажем t, то, ввиду сопряжённости силовских 2-подгрупп в группе G, по обобщенной лемме Фраттини (см., например, упражнение 17.1.9 из [7]) $W = XN_W(S)$, где S — некоторая силовская 2-подгруппа из X. Так как инволюция t сопряжена с некоторой инволюцией из L, то $C_W(S)$ является слойно конечной (и, следовательно, локально конечной) подгруппой, а поскольку подгруппа S конечна, то согласно упражнению 3.1.4 из [7] $|N_W(S) : C_W(S)| < \infty$ и по теореме 23.1.1

из [7] $N_W(S)$ также локально конечен. Но тогда и в этом случае группа W локально конечна.

Покажем теперь, что $|W:C_W(L)|<\infty$. Действительно, пусть M_1 и M_2 — множества представителей (левых) смежных классов $C_G(i)$ и $C_G(j)$ по подгруппе X соответственно, и $M=M_1\cup M_2$. Нетрудно заметить, что множества M_1 и M_2 (а следовательно, и множество M) конечны, причём

$$W \;=\; \text{гр}(C_G(i),C_G(j)) \;=\; \text{гр}(M,X) \;=\; \text{гр}(M)X.$$

А так как в силу локальной конечности группы W подгруппа гр(M) конечна, то, пользуясь теоремой 4.2.4 из [7], получим:

$$|\,W/X\,| = |\,\text{гр}(M)X/X\,| = |\,\text{гр}(M)/\text{гр}(M)\cap X\,| < \infty.$$

Но $X\leqslant C_G(L)$, а поэтому $|W:C_G(L)|<\infty$.

Теперь нетрудно заметить, что $C_G(L), W$ и $C_G(k)$, где k — инволюция из L, отличная от инволюций i и j, также удовлетворяют всем условиям предложения 4, и поэтому в $C_G(L)$ существует подгруппа конечного индекса Y такая, что $W, C_G(k), C_G(L)\leqslant N_G(Y)$, причём, применяя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, нетрудно показать, что если $K=\text{гр}(W,C_G(k))$, то $|K:C_G(L)|<\infty$. Но $W=\text{гр}(C_G(i),C_G(j))$, а поэтому по лемме 1.2 $K=G$. Таким образом, $|G:C_G(L)|<\infty$, и теорема доказана.

Из доказанной выше теоремы легко получается следующая характеризация конечных групп в классе слабо сопряжённо 2-бипримитивно конечных групп.

Следствие 1.3. *Слабо сопряжённо 2-бипримитивно конечная группа $G=H\leftthreetimes L$, где H — подгруппа, не содержащая инволюций, а L — четверная группа Клейна, конечна тогда и только тогда, когда конечен централизатор в G любой инволюции из L.*

Кроме того, из теоремы 1.1 вытекает следующая характеризация слойно конечных групп в классе периодических групп, не содержащих инволюций.

Следствие 1.4. *Периодическая группа G вида $G=H\leftthreetimes L$, где H — подгруппа без инволюций, а L — четверная группа Клейна, тогда и только тогда является слойно конечной когда централизатор в G любой инволюции из L слойно конечен.*

Доказательство. Действительно, так как группа $G=H\leftthreetimes L$ является периодической, то в ней любые две инволюции порождают конечную подгруппу. Следовательно, группа G 2-бипримитивно конечна, и по теореме 1.1 она слойно конечна. Отсюда очевидным образом вытекает, что подгруппа H также является слойно конечной. Следствие доказано.

2. Характеризации черниковских групп

Теорема 2.1. *Группа Шункова вида $G=H\leftthreetimes L$, где H — подгруппа, не содержащая инволюций, а L — четверная группа Клейна, тогда и только тогда является черниковской группой, когда централизатор в G любой инволюции из L является черниковской группой.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна, а поэтому остаётся показать лишь их достаточность.

Каждой инволюции $l \in L$ поставим в соответствие пару $(r; t)$, где r — ранг полной части из $C_G(l)$, а t — её индекс в $C_G(l)$. Обозначим через i инволюцию из L с наименьшими параметрами $(r; t)$, причём сравнение будем вести, начиная с первого параметра (в случае, когда в группе L содержатся две инволюции с наименьшими параметрами, в качестве i выбираем любую из них). Аналогично в качестве j выбираем одну из двух оставшихся инволюций с наименьшими параметрами, а последнюю оставшуюся инволюцию обозначим через k. Таким образом, каждой группе G, удовлетворяющей условию теоремы, соответствует шестёрка параметров $(r_i; t_i; r_j; t_j; r_k; t_k)$. Предположим теперь, что теорема неверна, и среди всех групп, которые удовлетворяют условию доказываемой теоремы, выберем группу G с наименьшими параметрами $(r_i; t_i; r_j; t_j; r_k; t_k)$.

Дальнейшее доказательство разобьём на ряд лемм, в которых будут изучены свойства некоторых подгрупп группы G.

Лемма 2.1. *Централизатор любой инволюции из L обладает нетривиальной полной частью.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда подгруппа L обладает инволюцией с конечным централизатором в G и по предложению 5 группа G локально конечна и почти разрешима. Следовательно по предложению 6 группа G является черниковской, что противоречит первоначальному предположению. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Нормализатор любой бесконечной L-инвариантной черниковской подгруппы K группы G является черниковской группой.*

Доказательство. Так как $\widetilde{K}$ является характеристической подгруппой группы G, то без ограничения общности можно считать, что K — полная подгруппа. Так как подгруппа K не содержит инволюций, то, опираясь на лемму 1.3, нетрудно проверить, что $N_G(K)/K$ обладает меньшими параметрами, чем группа G, а поэтому $N_G(K)/K$ является черниковской группой. Тогда согласно упражнению 24.1.5 из [7] $N_G(K)$ также является черниковской группой. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если $a \in C_G(l)^{\#}$ для некоторой инволюции $l \in L$ и $L < N_G(\langle a \rangle)$, то $C_G(a)$ — черниковская группа.*

Доказательство. Очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что a — элемент простого нечётного порядка.

Предположим сначала, что $a \in \widetilde{C_G(l)}$. Тогда $\langle a \rangle \in Q$ для некоторой квазициклической подгруппы Q из $C_G(l)$. Но $N_G(\langle a \rangle) = N_G(Q)$ и, так как по условию $\langle a \rangle$ является L-инвариантной подгруппой, то по лемме 2.1 $N_G(\langle a \rangle)$ (а следовательно, и $C_G(a)$) является черниковской группой.

Таким образом, остаётся рассмотреть случай, когда $a \notin \widetilde{C_G(l)}$. Тогда, как следует из леммы 1.3, $N_G(\langle a \rangle)/\langle a \rangle$ обладает меньшими параметрами, чем группа G, а поэтому является черниковской группой, что, как было указано выше, влечёт за собой справедливость утверждения леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Нормализатор любой нетривиальной L-инвариантной черниковской подгруппы K группы G является черниковской группой.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.2 достаточно рассмотреть случай, когда подгруппа K конечна. Как следует из структуры группы G и предложения 9, подгруппа K разрешима, и по упражнению 19.1.7 она обладает характеристической элементарной абелевой подгруппой Q. Выберем произвольную инволюцию $l \in L$ и представим подгруппу Q в виде $Q = A \times B$, где $A < C_G(l)$ и B — подгруппа, состоящая из строго вещественных относительно инволюции l элементов. Очевидно, инволюцию l можно выбрать так, что $A \neq 1$. Так как $A = Q \cap C_G(l)$, то подгруппа A является L-инвариантной, а поэтому существует элемент $a \in A$ такой, что $L < N_G((a))$. Далее, по лемме 2.3 $C_G(a)$ является черниковской группой и так как $C_G(Q) \leqslant C_G(a)$, то $C_G(Q)$ также является черниковской группой. Но $|N_G(Q) : C_G(Q)| < \infty$ и поскольку $N_G(K) \leqslant N_G(Q)$, то отсюда и вытекает справедливость утверждения леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Если A, B — черниковские подгруппы группы G и пересечение $A \cap B$ содержит бесконечную L-инвариантную подгруппу D, то гр$(A,\ B)$ — черниковская группа.*

Доказательство. Действительно, по лемме 2.4 подгруппа $K = N_G(\widetilde{D})$ является черниковской, причём $\widetilde{K}$ является максимальной полной абелевой подгруппой группы G, содержащей подгруппу $\widetilde{D}$. Если $A \leqslant N_G(\widetilde{D})$, то $A \leqslant N_G(\widetilde{K})$, а поэтому будем предполагать, что $A \nleqslant N_G(\widetilde{D})$. Пусть a — произвольный неединичный элемент из A. Тогда $N_G(\widetilde{D}^a) = K^a$, и поскольку $\widetilde{D} \leqslant \widetilde{A} \leqslant \widetilde{K}$, то $\widetilde{K} \leqslant \widetilde{K}^a$. Но $\widetilde{K} \cong \widetilde{K}^a$, и так как ранг подгруппы $\widetilde{K}$ конечен, то $\widetilde{K} = \widetilde{K}^a$, а поэтому, $a \in N_G(\widetilde{K})$. Таким образом, $A \leqslant N_G(\widetilde{K})$ ввиду произвольности выбора элемента a. Аналогично можно показать, что $B \leqslant N_G(\widetilde{K})$. Отсюда согласно предыдущей лемме вытекает доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Для любых двух инволюций $i,\ j \in L$ пересечение $C_G(i) \cap C_G(j)$ конечно.*

Доказательство. Действительно, если пересечение $C_G(i) \cap C_G(j)$ бесконечно, то по лемме 2.5 подгруппа $R = \text{гр}(C_G(i),\ C_G(j))$ является черниковской. Но так как пересечение $R \cap C_G(k)$, где k — инволюция из L, отличная от i и j, также бесконечно, то группа гр$(C_G(i),\ C_G(j)\ C_G(k))$ также является черниковской. Отсюда согласно лемме 2.2 вытекает, что черниковской будет и сама группа G, что противоречит предположению, сделанному в начале доказательства теоремы. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *В подгруппе L существует такая инволюция j, что подгруппы гр$(C_G(i), C_G(j))$ и гр$(C_G(j), C_G(k))$ не являются черниковскими.*

Доказательство. Покажем сначала, что в L существует пара инволюций $i,\ j$ таких, что подгруппа гр$(C_G(i), C_G(j))$ не является черниковской. Предположим противное. Тогда $A = \text{гр}(C_G(i), C_G(j))$ и $B = \text{гр}(C_G(i), C_G(k))$ являются черниковскими подгруппами. Но так как согласно лемме 2.1 пересечение $A \cap B$ бесконечно, то по леммам 2.5 и 1.2 группа $G = \text{гр}(A,\ B)$ также является черниковской, что противоречит предположению, сделанному в начале доказательства теоремы.

Предположим теперь, что утверждение леммы неверно и пусть, например, подгруппы гр$(C_G(i), C_G(j))$ и гр$(C_G(j), C_G(k))$ являются черниковскими. Тогда, пользуясь аналогичными рассуждениями, легко получим противоречие с первоначальным предположением о группе G. Лемма доказана.

Выберем теперь в качестве j инволюцию из L, удовлетворяющую условию леммы 2.7, а через i обозначим одну из двух оставшихся инволюций. Далее, пусть a — произвольный элемент простого порядка из $\widetilde{C_G(i)}$, и рассмотрим подгруппы вида $A_b = \text{гр}(a^{b^{-1}},\ a^b)$, где $b \in \widetilde{C_G(j)}$. Как следует из леммы 2.5 и предложения 10 все элементы из $\widetilde{C_G(i)}$ и $\widetilde{C_G(j)}$ являются строго вещественными относительно инволюций j и i соответственно, а поэтому любая подгруппа A_b, как нетрудно проверить, является L-инвариантной и, ввиду условия теоремы, конечной.

Лемма 2.8. *Множество подгрупп вида гр*$(a^{b^{-1}}, a^b)$ *бесконечно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует конечная подгруппа $A_b = \text{гр}(a^{b^{-1}},\ a^b)$ такая, что $a^{b_n} \in A_b$ для некоторой бесконечной последовательности $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n,\ \dots$ из $\widetilde{C_G(j)}$. Так как подгруппа A_b конечна, то без ограничения общности можно предполагать, что

$$a^{b_1} = a^{b_2} = \ldots = a^{b_n} = \ldots$$

Отсюда $b_n b_1^{-1} \in C_G(a)$, а поэтому пересечение $C_G(a) \cap \widetilde{C_G(j)}$ бесконечно.

Пусть теперь $A = \text{гр}(C_G(i),\ C_G(a))$. Как следует из лемм 2.3 и 2.5, подгруппа A является черниковской. Далее, по доказанному выше и лемме 2.5 подгруппа гр$(A,\ C_G(j))$ также является черниковской, а отсюда очевидным образом вытекает, что и подгруппа гр$(C_G(i),\ C_G(j))$ черниковская, вопреки выбору инволюций i и j. Лемма доказана.

Обозначим $A_n = \text{гр}(a^{b_n^{-1}},\ a_n^b)$, где $b_n \in \widetilde{C_G(j)}$ $(n = 1,\ 2,\ \dots)$. Как следует из предложения 9, подгруппа A_n разрешима, и согласно упражнению 19.1.7 из [7] она обладает (по крайней мере, одной) характеристической элементарной абелевой подгруппой V_n.

Лемма 2.9. *В множестве* $V_1,\ V_2,\ \dots,\ V_n,\ \dots$ *существует бесконечно много различных подгрупп.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда для некоторой подгруппы $V = V_n$ в подгруппе $R = N_G(V)$ содержится бесконечное множество элементов

$$a^{b_1},\ a^{b_2}, \dots,\ a^{b_m},\ \dots,$$

где $b_m \in \widetilde{C_G(j)}$ $(m = 1,\ 2,\ \dots)$.

Так как по лемме 2.4 R является черниковской группой, то почти все подгруппы

$$(a^{b_1}),\ (a^{b_2}),\ \dots,\ (a^{b_m}),\ \dots,$$

сопряжены в подгруппе R (см., например, [9]). Поэтому для некоторого $b \in \widetilde{C_G(j)}$ существует бесконечное множество элементов $r_n \in R$ $(n = 1,\ 2,\ \dots)$ таких, что

$$a^{br_1} = a^{br_2} = \ldots = a^{br_n} = \ldots$$

Отсюда следует, что $r_n^{-1} r_1 \in C_G(a^b)$ $(n = 1,\ 2,\ \dots)$, а поэтому подгруппа $T = R \cap C_G(a^b)$ бесконечна.

Предположим сначала, что пересечение $R \cap C_G(j)$ бесконечно. Тогда согласно лемме 2.5 подгруппа гр$(R,\ \widetilde{C_G(j)})$ является черниковской и по лемме 2.7 $\widetilde{R} \leqslant \widetilde{C_G(j)}$. Следовательно, по лемме 2.6 и предложению 10 любая квазициклическая подгруппа из $\widetilde{R}$ также является L-инвариантной, а поэтому

$\widetilde{T} = \widetilde{T}^i$. Но поскольку $T^i = \big(R \cap C_G(a^b)\big)^i = R \cap C_G(a^{b^{-1}})$, то отсюда следует, что $\widetilde{T} \leqslant C_G(a^b) \cap C_G(a^{b^{-1}})$. Тогда, как следует из леммы 2.5 подгруппа $P = \text{гр}(C_G(a^b),\ C_G(a^{b^{-1}}))$ является черниковской и по той же самой лемме подгруппа $S = \text{гр}(P,\ R)$ также является черниковской, причём, очевидно, $a^b \in \widetilde{S}$. Отсюда следует, что элемент a^b имеет конечное число сопряжённых в S, что противоречит выводу, сделанному в начале доказательства леммы. Таким образом, пересечение $R \cap C_G(j)$ конечно.

Предположим теперь, что пересечение $R \cap C_G(i)$ конечно. Тогда по лемме 2.6 и предложению 10 $\widetilde{R} \leqslant C_G(k)$, а поэтому любая квазициклическая подгруппа из $\widetilde{R}$ также является L-инвариантной, что, как уже было показано выше приводит к противоречию.

Таким образом, остаётся рассмотреть случай, когда пересечение $R \cap C_G(i)$ бесконечно. Пусть M — максимальная L-инвариантная черниковская подгруппа из G, содержащая R. Как следует из леммы 2.5, $C_G(i) \leqslant M$ и по той же самой лемме $C_G(a) \leqslant M$. Таким образом, пересечение $M \cap M^b$ бесконечно.

Так как $\widetilde{C_G(j)}$ является полной группой, то существует элемент $c \in \widetilde{C_G(j)}$ такой, что $c^2 = b$, а поскольку пересечение $M \cap M^{c^2}$ бесконечно, то $M^{c^{-1}} \cap M^c$ является бесконечной L-инвариантной черниковской группой. Но так как по лемме 2.5 подгруппа $\text{гр}(M^{c^{-1}},\ M^c)$ является черниковской, то $M^{c^{-1}} = M^c$ ввиду максимальности подгруппы M. Таким образом, $c^2 = b \in M$. Но так как $C_G(a) \leqslant M$, то отсюда вытекает, что $C_G(a^b),\ C_G(a^{b^{-1}}) \leqslant M$. Следовательно, подгруппа $\text{гр}(C_G(a^b),\ C_G(a^{b^{-1}}))$ является черниковской, а это, как было указано выше, приводит к противоречию. Лемма доказана.

Представим теперь каждую подгруппу V_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ в виде $V_n = Z_n \times F_n$, где $Z_n = C_G(j) \cap V_n$. Так как порядки подгрупп V_n нечётны, то отсюда легко следует, что все элементы из F_n строго вещественны относительно инволюции j. Кроме того, нетрудно заметить, что подгруппы Z_n и F_n являются L-инвариантными.

Лемма 2.10. *Почти все подгруппы Z_n нетривиальны.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $Z_n = 1$, то, как нетрудно заметить, $F_n(a^{b_n^{-1}}) \leftthreetimes (j)$ является группой Фробениуса, а поэтому согласно теореме 10.4.1 из [8] подгруппа $F_n(a^{b_n^{-1}})$ является абелевой. Следовательно, $F_n < C_G(a^{b_n^{-1}}) \leftthreetimes (j)$ или, что равносильно, $F_n^{b_n} < C_G(a)$. Далее, поскольку $|C_G(a) \cap C_G(j)| < \infty$, то, как следует из предложения 10, $\widetilde{C_G(a)} F_n^{b_n} \leftthreetimes (j)$ является группой Фробениуса, а поэтому $\widetilde{C_G(a)} < C_G(F_n^{b_n})$. Предположим теперь, что лемма неверна, т.е. $Z_m = 1$ для бесконечного множества номеров m, и пусть R — некоторая максимальная L-инвариантная черниковская группа, содержащая $C_G(a)$. Тогда существует бесконечная последовательность подгрупп

$$F_1^{b_1},\ F_2^{b_2}, \ldots,\ F_m^{b_m}, \ldots,$$

содержащаяся в R, причём, аналогично тому, как это было сделано в доказательстве предыдущей леммы, можно показать, что в этой последовательности существует бесконечное множество различных подгрупп.

Далее, поскольку пересечение $R \cap N_G(F_m^{b_m})$ бесконечно, то, как следует из леммы 2.5 и предложения 10, подгруппа гр$(R,\ N_G(F_m^{b_m}))$ является черниковской, а отсюда $N_G(F_m^{b_m}) \leqslant R$ $(m = 1,\ 2,\ \dots)$ ввиду максимальности подгруппы R. Но так как $(a^{b_m^2}) < N_G(F_m^{b_m})$, то в R существует бесконечная последовательность подгрупп

$$(a^{b_1^2}),\ (a^{b_2^2}), \dots,\ (a^{b_m^2}), \dots$$

Так как каждый из порождающих элементов этих подгрупп является строго вещественным относительно инволюции j, то отсюда легко следует, что централизаторы всех этих подгрупп бесконечны и лежат в R. Но так как $a \in \widetilde{R}$, то почти все эти подгруппы лежат в $\widetilde{R}$, а поэтому их число конечно. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.11. *Почти все подгруппы Z_n обладают элементом с бесконечным централизатором в $\widetilde{C_G(j)}$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда, как следует из предложения 11, Z_n является циклической группой, т.е. $Z_n = (z)$. Так как (z) является L-инвариантной подгруппой, то возможны два случая.

1) $z \notin C_G(L)$. Тогда $\left(\widetilde{C_G(j)} \leftthreetimes (z)\right) \leftthreetimes (j)$ является группой Фробениуса, и по теореме 10.4.1 из [8] подгруппа $\widetilde{C_G(j)} \leftthreetimes (z)$ является абелевой. Отсюда $\widetilde{C_G(j)} < C_G(z)$. Противоречие.

2) $z \in C_G(L)$. Так как по лемме 2.6 $C_G(L)$ конечен, то отсюда следует, что $z \in A_m$ для бесконечного множества подгрупп

$$A_1,\ A_2, \dots,\ A_m, \dots$$

Далее, поскольку $F_m < C_G(z)$ и, как следует из леммы 2.9, почти все подгруппы

$$F_1,\ F_2, \dots,\ F_m, \dots$$

различны, то $C_G(z)$ бесконечен и согласно лемме 2.3 является черниковской группой. Отметим, что ввиду предположения, сделанного в начале доказательства леммы $\widetilde{C_G(z)} \cap \widetilde{C_G(j)} = 1$, а поэтому $\widetilde{C_G(z)} F_m \leftthreetimes (j)$ является группой Фробениуса.

Отсюда, по теореме 10.4.1 из [8] $\widetilde{C_G(z)} \leqslant C_G(F_m)$ и, таким образом, $\widetilde{C_G(z)} \leqslant C_G(V_m) \leqslant N_G(V_m)$. Теперь, как следует из леммы 2.5, существует максимальная L-инвариантная подгруппа R такая, что $A_m =$ гр$(a^{b_m},\ a^{b_m^{-1}}) < R$. Рассуждая, аналогично, нетрудно показать, что $\widetilde{C_G(z)} \leqslant C_G(a^{b_m}) \cap C_G(a^{b_m^{-1}})$. Поэтому, как следует из леммы 2.5, $P =$ гр$(C_G(a^{b_m}),\ C_G(a^{b_m^{-1}}))$ является черниковской подгруппой. Но $a^{b_m} \in \widetilde{P} \leqslant \widetilde{R}$, а отсюда следует, что в последовательности подгрупп A_m $(m = 1,\ 2,\ \dots)$ существует лишь конечное число различных. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.12. *Почти все подгруппы F_n нетривиальны.*

Доказательство. Предположим сначала, что $F_n = 1$ для некоторого номера n и пусть $b = b_n$. Тогда $z^{a^b} \in C_G(j)$ для любого элемента $z \in Z_n$, а поэтому $z^{a^b j} = z^{a^b}$. Но так как a^b является строго вещественным элементом относительно инволюции j, то $a^b z (a^b)^{-1} = (a^b)^{-1} z (a^b)$. Отсюда ввиду нечётности порядка элемента a^b следует, что $a^b \in C_G(z)$ для любого $z \in Z_n$.

Предположим теперь, что лемма неверна, т.е. в последовательности

$$F_1,\ F_2,\ \dots,\ F_n,\ \dots$$

существует бесконечное множество тривиальных подгрупп. Тогда по лемме 2.11 можно считать, что пересечение $C_G(z)\cap\widetilde{C_G(j)}$ бесконечно, а поэтому, как следует из леммы 2.5, подгруппа $K=\text{гр}(C_G(z),\ \widetilde{C_G(j)})$ является черниковской. Очевидно, $a\in K$. Отметим также, что $K\cap\widetilde{C_G(i)}=1$, так как в противном случае подгруппа $\text{гр}(K,\ \widetilde{C_G(i)})$ была бы черниковской, вопреки лемме 2.7. Пусть $D=\widetilde{K}\leftthreetimes(a)$. Тогда $D\leftthreetimes(k)$, где k — инволюция, отличная от i и j, является группой Фробениуса, а поэтому $\widetilde{K}\leqslant C_G(a)$. Отсюда $\widetilde{K}\leqslant\widetilde{C_G(i)}$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.13. *Если M — максимальная L-инвариантная черниковская подгруппа группы G, содержащая $C_G(j)$, то $|M:C_G(j)|<\infty$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда, поскольку $|M:\widetilde{M}|<\infty$, то $\widetilde{M}\cap\widetilde{C_G(i)}\neq 1$ для некоторой инволюции $i\in L\setminus\{j\}$. Отсюда согласно лемме 2.5 получим, что подгруппа $\text{гр}(C_G(i),\ M)$ является черниковской, и следовательно, подгруппа $\text{гр}(C_G(i),\ C_G(j))$ также является черниковской, вопреки лемме 2.7. Лемма доказана.

Лемма 2.14. *Почти все подгруппы F_n лежат в $FC(M)$.*

Доказательство. Обозначим через z_n элемент из Z_n, удовлетворяющий условиям леммы 2.11. Так как $F_n<C_G(z_n)$ и $C_G(z_n)<M$ ввиду максимальности подгруппы M, то $F_n<M$ почти для всех n. Далее, поскольку $|M:C_G(j)|<\infty$, то в подгруппе M содержится лишь конечное множество B строго вещественных относительно инволюции j элементов. Но поскольку согласно предложению 3 $\text{гр}(B)\lhd O(M)$, то $F_n\leqslant\text{гр}(B)\leqslant FC(M)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Как следует из лемм 2.12 и 2.14, для некоторого номера n существует подгруппа F_n такая, что $F_n\leqslant FC(M)$. Далее, поскольку F_n является L-инвариантной подгруппой, то для некоторой инволюции, скажем i, $T_n=C_G(i)\cap F_n\neq 1$. Но тогда, очевидно, $\widetilde{C_G(i)}T_n\leftthreetimes(j)$ является группой Фробениуса, и следовательно, $\widetilde{C_G(i)}\leqslant C_G(T_n)\leqslant N_G(T_n)$. С другой стороны, $T_n\leqslant F_n\leqslant FC(M)$, а поэтому $|M:N_M(T_n)|<\infty$. Но так как M является черниковской группой и $|M:C_G(j)|<\infty$, то $\widetilde{C_G(j)}=\widetilde{M}\leqslant N_M(T_n)$. Таким образом, $\widetilde{C_G(i)},\ \widetilde{C_G(j)}\leqslant N_G(T_n)$ и, как следует из леммы 2.4 подгруппа $\text{гр}(\widetilde{C_G(i)},\ \widetilde{C_G(j)})$ является черниковской. Отсюда, пользуясь леммой 2.5 легко получить, что подгруппа $\text{гр}(C_G(i),\ C_G(j))$ также является черниковской, вопреки лемме 2.7. Теорема доказана.

Отметим, что из основного результата работы [15] (см. предложение 12) и теоремы 2.1 вытекает следующая

Теорема 2.2. *Группа Шункова вида $G=H\leftthreetimes L$, где H — подгруппа, не содержащая инволюций, а L — четверная группа Клейна, тогда и только тогда является черниковской группой, когда централизатор в G любой инволюции из L удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп.*

3. Характеризации групп, удовлетворяющих условию примарной минимальности

Прежде, чем перейти к основному результату данного параграфа, уточним структуру групп, удовлетворяющих этому условию, в некоторых частных случаях.

Лемма 3.1. *Локально конечная группа G, удовлетворяющая условию примарной минимальности, тогда и только тогда является черниковской, когда централизатор некоторого ее элемента a простого порядка является черниковской группой.*

Доказательство. Очевидно, в доказательстве нуждается лишь достаточность условий леммы. Прежде всего отметим, что согласно предложению 14 группа G почти локально разрешима и ввиду предложения 13 элемент a неперестановочен лишь с конечным множеством силовских p-подгрупп из $\widetilde{G}$. Поэтому, как следует из условия леммы, $\widetilde{G}$ является группой конечного ранга и, таким образом, множество $\pi = \pi(\widetilde{G})$ конечно. Тогда, как следует из предложения 7, $G/O_{\pi'}(G)$ является черниковской группой, а поэтому остается показать, что подгруппа $H = O_{\pi'}(G) \leftthreetimes (a)$ конечна. Но $\widetilde{O_{\pi'}(H)} = 1$, а поэтому, как следует из условия леммы и из предложения 13, H является тонкой слойно конечной группой. Отсюда вытекает, что $C_H(a)$ конечен, а следовательно конечна и подгруппа H. Лемма доказана.

Замечание. Аналогичный результат не имеет места в классе почти слойно конечных групп. Действительно, пусть H — прямое произведение бесконечного множества попарно различных абелевых p-групп с условием минимальности, i — ее автоморфизм порядка 2, действующий регулярно почти на всех указанных выше сомножителях. Очевидно, группа $G = H \leftthreetimes (i)$ не является черниковской, хотя $C_G(i)$ является черниковской группой.

Лемма 3.2. *Если ранг полной части локально конечной группы G, удовлетворяющей условию примарной минимальности конечен, то она является конечным расширением прямого произведения полной абелевой группы с условием минимальности на тонкую слойно конечную подгруппу.*

Доказательство. Действительно, по предложениям 14 и 13, $G = \widetilde{G} \leftthreetimes H$, где H — тонкая слойно конечная группа. Если подгруппа H конечна, то G — черниковская группа, а поэтому будем предполагать, что подгруппа H бесконечна. Так как по условию леммы ранг группы $\widetilde{G}$ конечен, то $|N_G(\widetilde{G}) : C_G(\widetilde{G})| < \infty$. Следовательно, существует конечное множество $\pi \subseteq \pi(H)$ такое, что $O_{\pi'}(H) < C_G(\widetilde{G})$. При этом, поскольку H является тонкой слойно конечной группой, то $|H : O_{\pi'}(H)| < \infty$, а поэтому $|G : \widetilde{G} \times O_{\pi'}(H)| = |H : O_{\pi'}(H)| < \infty$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Локально конечная группа вида $G = H \leftthreetimes L$, где H — группа, не содержащая инволюций, а L — четверная группа Клейна, тогда и только тогда удовлетворяет условию примарной минимальности, когда централизатор любой инволюции из L удовлетворяет этому условию.*

Доказательство. Так как необходимость условий леммы очевидна, то остаётся доказать лишь их достаточность. Так как по предложению 9 группа G

локально разрешима, то по предложению 6 она является SF-группой. Следовательно, по предложению 8 G обладает полной частью, причём, как следует из предложения 13 и леммы 1.3, $G/\widetilde{G}$ является тонкой слойно конечной группой. Далее, так как по предложению 13 для любой инволюции $l \in L$ каждый элемент из $C_G(l)$ неперестановочен лишь с конечным числом силовских примарных подгрупп из $\widetilde{G}$ и по лемме 1.2 $G = \text{гр}(C_G(i), C_G(j), C_G(k))$, где i, j, k — инволюции из L, то и каждый элемент из G неперестановочен лишь с конечным числом силовских примарных подгрупп из $\widetilde{G}$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Группа Шункова вида $G = H \leftthreetimes L$, где H — группа, не содержащая инволюций, а L — четверная группа Клейна, тогда и только тогда является периодической локально разрешимой группой, удовлетворяющей условию примарной минимальности, когда централизатор любой инволюции из L является локально конечной группой удовлетворяющей этому условию.*

Доказательство. Как следует из предложения 9 и леммы 3.3, достаточно показать, что группа G локально конечна. Предположим, что это не так, и разобьем доказательство теоремы на ряд лемм, в которых будут изучены свойства некоторых подгрупп группы G.

Лемма 3.4. *Без ограничения общности можно предполагать, что группа G обладает тривиальным локально конечным радикалом.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. группа G обладает нетривиальным локально конечным радикалом K. Тогда, очевидно, возможны два случая.

1) Подгруппа K обладает инволюциями. Тогда согласно обобщенной лемме Фраттини (см., например, упражнение 17.1.9 из [7]) $G = KN_G(S)$, где S — силовская 2-подгруппа из K. Как следует из условия теоремы и упражнения 3.1.4 из [7] $N_G(S)$ локально конечен. Тогда согласно теореме 23.1.1 из [7] локально конечна и группа G, вопреки сделанному выше предположению.

2) Подгруппа K не обладает инволюциями. Тогда согласно лемме 1.3 фактор-группа $\overline{G} = G/K$ удовлетворяет условию теоремы, причём ее локально конечный радикал тривиален. Отсюда и следует доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Для любых двух инволюций i, $j \in L$ пересечение $C_G(i) \cap C_G(j)$ бесконечно.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, т.е. $|C_G(i) \cap C_G(j)| < \infty$ для некоторых инволюций i, $j \in L$. Тогда пересечение $C_G(i) \cap C_G(k)$, где k — третья инволюция из L, также конечно. Отсюда согласно лемме 3.1 следует, что $C_G(i), C_G(j), C_G(k)$ являются черниковскими группами и согласно теореме 2.1 G — черниковская группа, вопреки первоначальному предположению. Лемма доказана.

В дальнейшем инволюции из L будем обозначать через i_1, i_2, i_3, а их централизаторы через R_1, R_2, R_3 соответственно.

Лемма 3.6. *Ранг полной части централизатора любой инволюции из L конечен.*

Доказательство. Предположим например, что R_1 обладает полной частью бесконечного ранга. Тогда, как следует из предложения 13, R_2 и R_3 также обладают полной частью бесконечного ранга. Обозначим через π_k $(k = 1, 2, 3)$ множество тех простых чисел, для которых силовские p-подгруппы из $\widetilde{R}_k$ неперестановочны с остальными двумя инволюциями, и пусть $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$. Так как согласно предложению 13 множество π конечно, то $O_{\pi'}(R_1) \neq 1$, причём $O_{\pi'}(\widetilde{R}_1) \lhd R_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Но так как по лемме 1.2 $G = \text{гр}(R_1, R_2, R_3)$, то $O_{\pi'}(\widetilde{R}_1) \lhd G$, что противоречит лемме 3.4. Лемма доказана.

Обозначим теперь через i_1 инволюцию из L, централизатор которой обладает полной частью наименьшего ранга r_1 среди всех инволюций из L (если в L содержатся две инволюции с таким свойством, то в качестве i_1 выбираем любую из них). Аналогично в качестве i_2 выбираем одну из двух оставшихся инволюций, а последнюю оставшуюся инволюцию обозначим через i_3. Таким образом, каждой группе G, удовлетворяющей условию теоремы, можно поставить в соответствие тройку (r_1, r_2, r_3), составленную из рангов r_1, r_2, r_3 полных частей централизаторов инволюций i_1, i_2, i_3 соответственно. Выберем теперь среди всех групп, удовлетворяющих условию теоремы, но не являющихся локально конечными, группу G с минимальными параметрами (r_1, r_2, r_3).

Лемма 3.7. *Нормализатор любой нетривиальной L-инвариантной полной абелевой подгруппы группы G локально конечен.*

Утверждение леммы очевидным образом вытекает из выбора группы G.

Лемма 3.8. *Если A, B — локально конечные подгруппы группы G и пересечение $A \cap B$ содержит нетривиальную L-инвариантную подгруппу D, то подгруппа гр(A, B) локально конечна.*

Доказательство. Действительно, по лемме 3.7 подгруппа $K = N_G(D)$ является локально конечной, причём $\widetilde{K}$ является максимальной полной абелевой подгруппой группы G, содержащей подгруппу D. Если $A \leqslant N_G(D)$, то $A \leqslant N_G(\widetilde{K})$, а поэтому будем предполагать, что $A \nleqslant N_G(D)$. Пусть a — произвольный неединичный элемент из A. Тогда $N_G(D^a) = K^a$, и поскольку $D \leqslant \widetilde{A} \leqslant \widetilde{K}$, то $\widetilde{K} \leqslant \widetilde{K}^a$. Но $\widetilde{K} \cong \widetilde{K}^a$, а поэтому ввиду леммы 3.6 $\widetilde{K} = \widetilde{K}^a$, и следовательно, $a \in N_G(\widetilde{K})$. Таким образом, $A \leqslant N_G(\widetilde{K})$ ввиду произвольности выбора элемента a. Аналогично можно показать, что $B \leqslant N_G(\widetilde{K})$. Отсюда согласно предыдущей лемме вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Централизатор любой инволюции из L обладает нетривиальной полной частью.*

Доказательство. Предположим сначала, что централизатор любой инволюции из L обладает тривиальной полной частью. Тогда, согласно предложению 13 R_1, R_2, R_3 слойно конечны и по теореме 1.1 группа G слойно конечна, вопреки первоначальному предположению. Таким образом, этот случай невозможен.

Предположим теперь, что $\widetilde{R}_1 = \widetilde{R}_2 = 1$, а $\widetilde{R}_3 \neq 1$. Тогда, как следует из предложения 13, подгруппы R_1 и R_2 слойно конечны, и, как показано в доказательстве теоремы 1.1, подгруппа $X = \text{гр}(R_1, R_2)$ также слойно конечна. Далее, поскольку $R_3 \geq R_1 \cap R_2$, $|X : R_1| < \infty$ и $|X : R_2| < \infty$, то $|X : R_1 \cap R_2| < \infty$, а поэтому $|X : X \cap R_3| < \infty$. Отсюда по предложению 13 следует, что $O_{\pi'}(X) \leqslant C_G(R_3)$ для некоторого конечного множества $\pi \subseteq \pi(R_3)$.

Но так как $|X/O_{\pi'}(X)| < \infty$, то $|R_1/O_{\pi'}(X)| < \infty$, а поэтому согласно предложению 5 группа $N_G(O_{\pi'}(X))/O_{\pi'}(X)$ локально конечна. Тогда согласно теореме 23.1.1 из [7] $N_G(O_{\pi'}(X))$ также является локально конечной группой. Отсюда ввиду того, что $\widetilde{R_3} \leqslant N_G(O_{\pi'}(X))$ согласно лемме 3.8 следует,что подгруппа гр$(N_G(O_{\pi'}(X)), R_3))$ локально конечна. Но поскольку $R_1, R_2 \leqslant N_G(O_{\pi'}(X))$, то по лемме 1.2 группа G также локально конечна, вопреки предположению.

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\widetilde{R}_1 = 1$, а $\widetilde{R}_2 \neq 1$ и $\widetilde{R}_3 \neq 1$. Тогда согласно предложениям 13 и 8 $O_{\pi_1'}(R_1) \leqslant C_G(\widetilde{R}_2)$ и $O_{\pi_1'}(R_1) \leqslant C_G(\widetilde{R}_3)$ для некоторых конечных множеств $\pi_1, \pi_2 \subseteq \pi(R_1)$. Пусть $\pi = \pi_1 \bigcup \pi_2$. Пользуясь теперь теми же рассуждениями, что и выше, можно показать, что $N_G(O_{\pi'}(R_1))$ локально конечен, а поэтому подгруппа гр$(\widetilde{R_1}, \widetilde{R_2})$ локально конечна. Тогда, как следует из предложения 8, подгруппы $\widetilde{R}_2$ и $\widetilde{R}_3$ перестановочны, а отсюда очевидным образом получаем, что $\widetilde{R}_2 \leqslant N_G(R_3)$ и $\widetilde{R}_3 \leqslant N_G(R_2)$. Поэтому, как следует из леммы 3.8, подгруппа $X =$ гр(R_2, R_3) локально конечна, а поскольку $\widetilde{X} \leqslant N_G(O_{\pi'}(R_1))$, то подгруппа гр$(X, N_G(O_{\pi'}(R_1)))$ также локально конечна. Но тогда согласно лемме 1.2 группа G локально конечна, вопреки предположению. Лемма доказана.

Лемма 3.10. *Для любых инволюций $i_1, i_2 \in L$ подгруппа гр(R_1, R_2) локально конечна.*

Доказательство. Действительно, пусть $B = R_1 \cap R_2$. Так как по леммам 3.6 и 3.2 $|R_1 : FC(R_1)| < \infty$ и $|R_2 : FC(R_2)| < \infty$, то согласно упражнению 2.4.4 из [7] $|B : B \cap FC(R_1) \cap FC(R_2)| < \infty$. Поскольку $\widetilde{B} = 1$ (в противном случае утверждение леммы сразу же следует из леммы 3.8), то по свойствам слойно конечных групп существует L-инвариантная подгруппа $F \leqslant B \cap FC(R_1) \cap FC(R_2)$ такая, что $F \lhd B$ и $|B : F| < \infty$. При этом, по свойствам FC-групп, $\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2 \leqslant C_G(F)$. Обозначим $V = N_G(F)$. Тогда по лемме 1.3

$$C_{V/F}(i_1F) \cap C_{V/F}(i_2F) \cong R_1/F \cap R_2/F \cong (R_1 \cap R_2)F/F = B/F.$$

Так как по предложению 15 группа V/F является группой Шункова, то она удовлетворяет всем условиям доказываемой теоремы и согласно теореме 2.1 V/F является черниковской группой. Следовательно, $N_G(F)$ локально конечен, а поэтому согласно лемме 3.8 подгруппы гр$(N_G(F), R_1)$ и гр$(N_G(F), R_2)$ локально конечны. Снова применяя лемму 3.8, отсюда получаем, что подгруппа гр(R_1, R_2) также локально конечна. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. По лемме 3.10 подгруппы гр(R_1, R_2) и гр(R_1, R_3) локально конечны, а поскольку по лемме 3.6 $\widetilde{R}_1 \neq 1$, то по лемме 3.8 и лемме 1.2 группа $G =$ гр(R_1, R_2, R_3) локально конечна. Теорема доказана.

В заключение отметим, что из теоремы 3.1 и основного результата работы [19] (см. предложение 16) вытекает следующая

Теорема 3.2. *Группа Шункова вида $G = H \leftthreetimes L$, где H — группа, не содержащая инволюций, а L — четверная группа Клейна, тогда и только тогда является периодической локально разрешимой группой, удовлетворяющей условию примарной минимальности, когда централизатор любой инволюции из L является периодической группой, удовлетворяющей этому условию.*

Литература

[1] Шафиро А.А., Шунков В.П. *О локально конечных группах с черниковскими централизаторами инволюций.* — В кн.: Исследования по теории групп. Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1975, 128–146.

[2] Каргаполов М.И. *Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами* , Сиб. матем. журн., **2** (1961), 853–873.

[3] Шунков В.П. *О вложении примарных элементов в группе*, Новосибирск, ВО "Наука", 1992.

[4] Созутов А.И., Шунков В.П. *Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы*, Матем. сб., **100(142)** (1976), 495–506.

[5] Остыловский А.Н., Шунков В.П. *О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности.* — В кн.: Исследования по теории групп. Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1975, 32–48.

[6] Шлёпкин А.К., Рубашкин А.Г. *О группах, насыщенных конечным множеством подгрупп*, Сиб. матем. журн., **45** (2004), 1397–1400.

[7] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1982.

[8] Gorenstein D. *Finite groups*, New York, Harper & Row, 1968.

[9] Шунков В.П. M_p*-группы*, М., Наука, 1990.

[10] Черников С.Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*, М., Наука, 1980.

[11] Шунков В.П. *О локально конечных группах конечного ранга*, Алгебра и логика, **10** (1971), 199–225.

[12] Brauer R. *Some applications of blocks of characters of finite groups*, J. Algebra, **1** (1964), 307-334.

[13] Feit W., Thompson J.G. *Solvability of groups of odd order*, Pacif. J. Math., **13** (1963), 775–1029.

[14] Шунков В.П. *О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп*, Алгебра и логика, **9** (1970), 579–615.

[15] Сучкова Н.Г., Шунков В.П. *О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп*, Алгебра и логика, **25** (1986), 445–469.

[16] Половицкий Я.Д. *Слойно экстремальные группы*, Матем. сб., **56** (1962), 95–106.

[17] Павлюк И.И., Шафиро А.А., Шунков В.П. *О локально конечных группах с условием примарной минимальности для подгрупп*, Алгебра и логика, **13** (1974), 324–336.

[18] Сенашов В.И. *Характеризация слойно конечных групп в классе периодических групп*, Алгебра и логика, **24** (1985), 608–617.

[19] Шлёпкин А.К. *О сопряжённо бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности*, Алгебра и логика, **22** (1983), 226–231.

Максим Николаевич Ивко
филиал Омского госпедуниверситета в г.Таре,
пер. Школьный 69,
646530, г.Тара, Омская обл., Россия
E-mail address: ivko_m@mail.ru