S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 250–252 (2005) УДК 512.5

Краткие сообщения MSC 20F50

К ВОПРОСУ О РАСПОЗНАВАНИИ ГРУППЫ $L_2(7)$ ПО СПЕКТРУ

А.А. КУЗНЕЦОВ

Abstract. For a group G, denote by $\omega(G)$ the spectrum of G, i.e. the set of its element orders. We prove that every group G with $\omega(G) \subseteq \omega(L_2(7)) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ in which the product of every two involutions is a 2-element contains a normal 2-subgroup with primary quotient. We also reduce the investigation of groups G with $\omega(G) = \omega(L_2(7))$ to that of groups generated by involutions.

1. Введение

Обозначим через $\omega(G)$ спектр группы G, т.е. множество порядков элементов из G. Например, $\omega(L_2(7)) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$. Группа G из класса $\mathcal{C}$ называется распознаваемой в $\mathcal{C}$ по спектру $\omega(G)$, если любая группа $H \in \mathcal{C}$, для которой $\omega(H) = \omega(G)$, изоморфна G. Другими словами, G распознаваема в $\mathcal{C}$, если $h_{\mathcal{C}}(G) = 1$, где $h_{\mathcal{C}}$ — число попарно неизоморфных групп $H \in \mathcal{C}$, изоспектральных группе G, т.е. имеющих тот же спектр, что и G.

В работе [4] В.Д. Мазуров сформулировал следующий вопрос: *Распознаваема ли группа $L_2(7)$ по спектру в классе всех групп?*

В настоящей статье этот вопрос сводится к группам, порождённым инволюциями, и доказывается, что в группе G с $\omega(G) = \omega(L_2(7))$ всегда есть две инволюции, не порождающие 2–группу.

Теорема 1. *Пусть M — группа и*

α) $\omega(M) \subseteq \omega(L_2(7)) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$;

β) *произведение любых двух инволюций из M есть 2–элемент.*

Тогда M — расширение 2–группы посредством примарной группы.

Kuznetsov, A.A., On the definability of $L_2(7)$ by its spectrum.

Представлена О.В. Богопольским 7 ноября 2005 г., опубликована 7 ноября 2005 г.

Теорема 2. *Если произвольная группа M, порождённая инволюциями и удовлетворяющая условию $\omega(M) = \omega(L_2(7))$, изоморфна $L_2(7)$, то любая группа G со свойством $\omega(G) = \omega(L_2(7))$ изоморфна $L_2(7)$.*

2. Доказательство теоремы 1

Следующий факт проверяется с помощью компьютерных вычислений по алгоритму, описанному в [3].

Лемма 1. *Если M порождается тремя инволюциями, то M — 2–группа периода 4, порядок которой — делитель числа 2^{10}.*

Лемма 2. *Любой элемент $h \in M$ порядка 4 и любая инволюция $x \in M$ порождают конечную подгруппу периода 4.*

Доказательство. Рассмотрим группу $U =< h^2, x, x^h >$. По лемме 1 U — конечная 2–группа. Так как $(h^2)^h = h^2 \in U$, $x^h \in U$ и $(x^h)^h = x^{h^2} \in U$, то $U^h = U$ и $U \trianglelefteq < U, h >$, поэтому $< U, h >$ — конечная 2–группа. Лемма доказана.

Лемма 3. *Подгруппа, порождённая всеми инволюциями группы M, является 2–группой.*

Доказательство. Пусть I — множество инволюций группы M. Достаточно показать, что $(x_1 x_2 \ldots x_n)^4 = 1$ для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ и любого натурального n. Это верно для $n = 1$. Пусть это верно для какого-то s. Тогда $(x_1 x_2 \ldots x_s)^4 = 1$ для любых $x_1, x_2, \ldots, x_s \in I$. По лемме 2 $< (x_1 x_2 \ldots x_s), x_{s+1} >$ — конечная группа (для любых $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1} \in I$), которая является группой периода 4. Поэтому $(x_1 x_2 \ldots x_{s+1})^4 = 1$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть H — наибольшая нормальная 2 –подгруппа из M. Тогда M/H не содержит инволюций.*

Доказательство. Предположим противное. По предыдущей лемме $H \neq 1$. Если в M/H любые две инволюции порождают 2 –подгруппу, то поскольку $\omega(M/H) \subseteq \omega(M) \subseteq \omega(L_2(7))$, все инволюции M/H по лемме 3 порождают нетривиальную 2 –подгруппу, полный прообраз которой является 2–группой, собственным образом содержащей H, что противоречит выбору H. Поэтому в M/H есть две инволюции $\bar{a}, \bar{b}$, произведение которых является нетривиальным элементом простого нечётного порядка. Если a, b — прообразы $\bar{a}, \bar{b}$ в M, то $< a, b >$ — конечная группа. Пусть h — нетривиальный элемент из H. Тогда $h^{<a,b>}$ — конечное множество. Поскольку H локально конечна, $H_0 =< h^{<a,b>} >$ является нетривиальной конечной 2–подгруппой, инвариантной относительно $< a, b >$, и в подгруппе $M_0 = H_0 \cdot < a, b >$ силовская p–подгруппа P для некоторого нечётного числа p нетривиальна. Так как P действует без неподвижных точек на $M_0 \cap H \neq 1$, то $N_{M_0}(P) \cong < \bar{a}, \bar{b} >$ и поэтому является группой диэдра. Но тогда в $M_0 \setminus H$ есть инволюция, что противоречит выбору H. Лемма доказана.

Лемма 5. *M является расширением 2 –группы посредством примарной группы.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть H — подгруппа из предыдущей леммы. По лемме 4 M/H является $\{3, 7\}$–группой и, следовательно, M

содержит элемент a порядка 3. Поскольку H локально конечна, $< H, a >$ локально конечна. Если $x, y, z \in H$, то $M_0 =< x, y, z, a >$ — конечная группа и $H_0 = M_0 \cap H$ — конечная группа, на которой элемент a порядка 3 действует при сопряжении без неподвижных точек. По [7] H_0 двуступенно нильпотентна и, следовательно, $[[x, y], z] = 1$. Это показывает, что H двуступенно нильпотентна. Пусть $Z = Z(H)$. Тогда M/H — группа, действующая свободно на абелевой 2–группе Z, и по [1] центр M/H содержит элемент порядка 3. Но тогда M/H содержит элемент порядка 21, что противоречит условию. Лемма и теорема доказаны.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть M — подгруппа, порождённая всеми инволюциями группы G. Тогда $M \trianglelefteq G$. Если $\omega(M) = \omega(G)$, то по предположению $M \cong L_2(7)$. По условию на G, $C_G(M) = 1$ и поэтому $G \leq Aut\ M$. Отсюда $G \cong L_2(7)$ или $PGL_2(7)$, но в $PGL_2(7)$ есть элемент порядка 6, поэтому $G \cong L_2(7)$, и заключение в этом случае верно.

Пусть $\omega(M) \neq \omega(G)$. Если $4 \notin \omega(M)$, то по [5] это невозможно. Поэтому либо $3 \notin \omega(M)$, либо $7 \notin \omega(M)$.

Если $3 \notin \omega(M)$, то по лемме 6 из [2], M нильпотентна и, следовательно, является 2–группой. По теореме 1 $\omega(G) \neq \omega(L_2(7))$. Противоречие.

Если $3 \in \omega(M)$, а $7 \notin \omega(M)$, то по [6] M локально конечна. По [8] M нильпотентна и, следовательно, в M есть элемент порядка $6 \notin \omega(L_2(7))$. Противоречие. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору В.Д. Мазурову за постановку задачи и высказанные идеи о пути её решения.

Список литературы

[1] А.Х. Журтов, *О квадратичных автоморфизмах абелевых групп*, Алгебра и логика.– 2000.– Т. 39, №1.– С. 320–328.

[2] А.Х. Журтов, *О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса*, Сиб. матем. журн.– 2000.– Т. 41, №2.– С. 329–338.

[3] А.А. Кузнецов, А.К. Шлёпкин , С.А. Тарасов, *Об одном алгоритме получения соотношений в свободной бернсайдовской группе* $B(m, n)$, Труды VI Межд. конф. "Дискретные модели в теории управляющих систем", М., МГУ им. М.В. Ломоносова.– 2004.– С. 175–178.

[4] В.Д. Мазуров, *Группы с заданным спектром*, Известия Уральского гос. ун-та. 2005.– №36.– С. 119–138.

[5] В.Д. Мазуров, *О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций*, Алгебра и логика.– 2000.– Т. 39, №1.– С. 74–86.

[6] И.Н. Санов *Решение проблемы Бернсайда для периода 4*, Учен. записки ЛГУ. Сер. матем.– 1940.– №10.– С. 166–170.

[7] B.H. Neumann, *Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed*, Arch. Math. 1956.– 7, №1.– P. 1–5.

[8] J.G. Thompson *Finite groups with fixed–point–free automorphisms of prime order*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.–1959.– №45.– P. 578–581.

Кузнецов Александр Алексеевич
Красноярский государственный аграрный университет,
пр. Мира, 88а,
660049, Красноярск, Россия
E-mail address: alex_kuznetsov80@mail.ru