S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 239–249 (2005) УДК 519.172.2

MSC 05C15

ОРИЕНТИРОВАННАЯ РАСКРАСКА ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ НЕ МЕНЕЕ 4

О.В. БОРОДИН, А.О. ИВАНОВА

Abstract. An oriented k-colouring of an oriented graph H is a homomorphism of H into a tournament on k vertices. In the paper we prove that any orientation of a planar graph without triangle has an oriented 47-colouring, which improves the best known upper bound 59.

1. Введение

Гомоморфизм графа G в граф H есть отображение φ из $V(G)$ в $V(H)$, которое сохраняет ребра (или дуги), т. е. $xy \in E(G) \Rightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E(H)$. Другими словами, если рассматривается ориентированный гомоморфизм орграфа G в орграф H (мишень, вершины которой считаются цветами), то требуется каждой вершине из G приписать цвет так, чтобы любая дуга в G, начало которой окрашено в цвет i, а конец — в j, имелась бы в мишени H.

Гомоморфизмы графов изучались в литературе как обобщение раскраски графов. Заметим, что неориентированный граф G имеет k-раскраску если и только если G имеет гомоморфизм в полный граф K_k. Поэтому хроматическое число неориентированного графа G можно эквивалентно определить как минимальное число вершин в неориентированном графе H таком, что G имеет гомоморфизм в H.

В дальнейшем рассматриваются орграфы без антипараллельных дуг. *Ориентированная k-раскраска* орграфа H есть ориентированный гомоморфизм в k-вершинный орграф H'. *Ориентированное хроматическое число* $o(G)$ неориентированного графа G определяется как минимальное k, при котором каждая ориентация графа G имеет ориентированную k-раскраску. Ориентированное

Borodin, O.V., Ivanova, A.O., An oriented colouring of planar graphs with girth at least four.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 03-01-00796, а второго — 05-01-00816.

Поступила 4 октября 2005 г., опубликована 4 ноября 2005 г.

хроматическое число графа может существенно отличаться от его хроматического числа. Например, существуют двудольные графы с произвольно большим ориентированным хроматическим числом (достаточно заменить каждое ребро графа K_n на путь длины 2, и тогда концы каждого такого пути в полученном графе K_n^*, т. е. все вершины исходного графа K_n, обязаны краситься в разные цвета, т. к. в мишени нет антипараллельных дуг).

Замечание 1. *В любой ориентированной раскраске концы a и b любого (ориентированного) пути axb получают разные цвета.*

Курсель [5] доказал, что $o(G) \leq 3^{63}$ для любого плоского графа G, а в [8] этот результат был улучшен до 80 (с использованием ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов, доказанной в [1]). В [2] была доказана следующая теорема, усиливающая результаты работы [6] .

Теорема 1. *Пусть G — плоский граф обхвата g. Тогда*

(1) *если $g(G) \geq 14$, то $o(G) \leq 5$,*
(2) *если $g(G) \geq 8$, то $o(G) \leq 7$,*
(3) *если $g(G) \geq 6$, то $o(G) \leq 11$,*
(4) *если $g(G) \geq 5$, то $o(G) \leq 19$.*

В [3] ограничение в п. 1 этой теоремы было ослаблено с 14 до 13, а в [4] — до 12. С другой стороны, для плоских графов без треугольников, т. е. с обхватом не менее 4, в [2] не было получено никакой верхней оценки для ориентированного хроматического числа, лучшей, чем упоминавшаяся выше общая оценка 80, верная для любого плоского графа. П. Ошам [7] доказал, что плоские графы без треугольников имеют ориентированную 59-раскраску. Наш основной результат состоит в улучшении этой оценки.

Теорема 2. *Каждый плоский граф без треугольников ориентированно 47-раскрашиваем.*

Отметим, что средняя степень вершин в плоских графах без треугольников может быть сколь угодно близка к 4, как и в упоминавшихся выше графах K_n^*, однако $o(K_n^*)$ растет неограниченно с ростом n.

Фактически мы доказываем, что каждая ориентация плоского графа с обхватом не менее 4 имеет ориентированный гомоморфизм в турнир Пэли $P(47)$, т. е. турнир на вершинах $0, 1, \dots, 46$, в котором пара ij является дугой из i в j, если и только если $j = (i + q_k) \mod 47$, где q_k — один из 23 квадратичных вычетов по $\mod 47$.

Сначала мы изучаем структурные свойства гипотетического минимального контрпримера G_0 к теореме 2. Затем мы обнаруживаем, используя свойства гомоморфизмов в $P(47)$, что ни одна из этих конфигураций не может входить в G_0. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

2. Доказательство теоремы 2

Назовем ребро *тяжелым*, если оба его конца имеют степень не меньше трех. Пусть G_1 — наименьший по числу тяжелых ребер плоский орграф без треугольников, который не допускает гомоморфизма на турнир $P(47)$. Среди всех контрпримеров к теореме 2 с тем же числом тяжелых ребер, что и G_1, выберем наименьший по числу (всех) ребер и обозначим его через G_0. Не нарушая общности, можно считать, что G_0 связен.

Формулу Эйлера $|V|-|E|+|F|=2$ для G_0 перепишем в виде

$$\sum_{v\in V}(d(v)-4)+\sum_{f\in F}(r(f)-4)<0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v, $r(f)$ — ранг грани f.

Положим *заряд* $\mu(v)$ каждой вершины v графа G_0 равным $d(v)-4$, а *заряд* $\mu(f)$ каждой грани f равным $r(f)-4$. Заметим, что заряд 2-вершины равен -2, заряд 3-вершины равен -1, 4-вершины — 0 и т. д., а заряд каждой грани неотрицателен.

Мы опишем ряд структурных свойств орграфа G_0, опираясь на которые перераспределим заряды вершин и граней так, чтобы их новые заряды стали неотрицательными. Поскольку сумма зарядов сохраняется, мы получим противоречие с (1), что и завершит доказательство теоремы 2.

Прежде чем приступить к изучению структурных свойств графа G_0, мы отметим несколько важных для нас свойств турнира $P(47)$.

2.1. **Свойства гомоморфизмов в** $P(47)$**.** Турниры Пэли $P(p)$, где p — простое число вида $4k+3$, описаны в литературе; в частности, их основное свойство, выраженное при $p=47$ в лемме 1, хорошо известно, но мы, не найдя подходящей ссылки, с помощью компьютера проверили лемму 1 и установили ряд других свойств турнира $P(47)$ (см. леммы 2–6), необходимых для нашего доказательства.

Пусть R_i и L_i — множества преемников и предшественников вершины i, соответственно.

Лемма 1. (1) *Если* $0\le i\le 46$*, то* $|R_i|=|L_i|=23$*;*
(2) *если* $0\le i<j\le 46$*, то* $\min\{|R_i\cap R_j|,|R_i\cap L_j|,|L_i\cap R_j|,|L_i\cap L_j|\}\ge 11$*;*
(3) *если* $0\le i<j<k\le 46$*, то*
$\min\{|R_i\cap R_j\cap R_k|,|L_i\cap R_j\cap R_k|,|R_i\cap L_j\cap R_k|,|L_i\cap L_j\cap R_k|,$
$|R_i\cap R_j\cap L_k|,|L_i\cap R_j\cap L_k|,|R_i\cap L_j\cap L_k|,|L_i\cap L_j\cap L_k|\}\ge 4.$

Другими словами, полустепени исхода и захода каждой вершины в турнире $P(47)$ равны 23; тем самым, если начало или конец дуги в графе G_0, гомоморфно отображенном на $P(47)$, окрашен в цвет i, то ее конец (начало) может быть окрашен в любой из 23 *допустимых* цветов (вида $i+k^2 \mod 47$ или $p-i-k^2 \mod 47$, соответственно). Далее, согласно лемме 1, если в G_0 вершина v смежна с вершинами x, y, окрашенными в разные цвета, то при любой из 4 ориентаций ребер xv, yv, на v имеется не менее 11 допустимых цветов. Аналогично, если в G_0 вершина v смежна с вершинами x, y, z, окрашенными в три разных цвета, то при любой из 8 возможных ориентаций ребер xv, yv, zv, вершина v получает от x, y, z не менее 4 допустимых цветов.

Лемма 2. *Если* $0<j_2<j_3<p$*, то*
$\min\{|R_0\cup R_{j_2}\cup R_{j_3}|,|L_0\cup L_{j_2}\cup L_{j_3}|\}\ge 40.$

Другими словами, если на конце ребра имеется 3 допустимых цвета, то по этому ребру на другой его конец приходит не более 7 запретов.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha,\beta,\gamma_1,\dots,\gamma_6$ *— 8 попарно различных цветов (вершин из* $P(47)$*),* $R^*=\cup_{1\le i<j\le 6}(R_{\gamma_i}\cap R_{\gamma_j})$*, а* $L^*=\cup_{1\le i<j\le 6}(L_{\gamma_i}\cap L_{\gamma_j})$*. Тогда*
$\min\{|R_\alpha\cap R_\beta\cap R^*|,|L_\alpha\cap R_\beta\cap R^*|,|R_\alpha\cap L_\beta\cap R^*|,|L_\alpha\cap L_\beta\cap R^*|,$
$|R_\alpha\cap R_\beta\cap L^*|,|L_\alpha\cap R_\beta\cap L^*|,|R_\alpha\cap L_\beta\cap L^*|,|L_\alpha\cap L_\beta\cap L^*|\}\ge 4.$

Другими словами, пусть в G_0 вершина v степени 4 смежна с вершинами u, w, x, y, причем x, y окрашены в разные цвета α и β, а на u и w имеется по 6 допустимых цветов $\gamma_1, \dots, \gamma_6$, отличных от α и β, причем ребра vu и vw ориентированы одинаково (либо оба от v, либо оба в v). Тогда при любой из 4 ориентаций ребер xv, yv, для v имеется не менее 4 цветов, δ, которые, во-первых, допустимы по ребрам xv, yv, во-вторых, для каждого δ существуют цвета γ_i и γ_j, где $i \neq j$, в которые можно покрасить u и w.

Лемма 4. *Пусть* α, β, $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — *9 попарно различных цветов. Пусть также* $R^* = \cup_{1 \le i \le 4, 1 \le j \le 3}(R_{\gamma_i} \cap R_{\delta_j})$ *и* $L^* = \cup_{1 \le i \le 4, 1 \le j \le 3}(L_{\gamma_i} \cap L_{\delta_j})$. *Тогда* $\min\{|L_\alpha \cap L_\beta \cap R^*|, |R_\alpha \cap R_\beta \cap L^*|\} \ge 4$.

Другими словами, ситуация отличается от описанной в лемме 3 тем, что, во-первых, на u и w имеются независимые множества допустимых цветов мощности 4 и 3, а во-вторых, рассматриваются лишь 2 из 8 возможных ориентаций ребер при 4-вершине v (когда полустепени исхода и захода вершины v равны 2).

Замечание 2. *Лемма 4 неулучшаема в том смысле, что существуют (и были найдены программой) такие 8 попарно различных цветов* α, β, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *и* $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, *которые оставляют на* v *лишь 3 допустимых цвета.*

Лемма 5. *Пусть* α, β, $\gamma_1, \dots, \gamma_5$, $\delta_1, \dots, \delta_4$ — *11 попарно различных цветов,* $R^* = \cup_{1 \le i \le 5, 1 \le j \le 4}(R_{\gamma_i} \cap R_{\delta_j})$, *а* $L^* = \cup_{1 \le i \le 5, 1 \le j \le 4}(L_{\gamma_i} \cap L_{\delta_j})$. *Тогда* $\min\{|L_\alpha \cap R_\beta \cap R^*|, |R_\alpha \cap L_\beta \cap L^*|\} \ge 4$.

Другими словами, ситуация отличается от описанной в лемме 4 только тем, что полустепень исхода вершины v равна 1 или 3.

Замечание 3. *Лемма 5 неулучшаема в том смысле, что существуют такие 10 попарно различных цветов* α, β, $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ *и* $\delta_1, \dots, \delta_4$, *которые оставляют на* v *лишь 3 допустимых цвета.*

Лемма 6. *Пусть* α, β, $\gamma_1, \dots, \gamma_5$, $\delta_1, \dots, \delta_5$ — *12 попарно различных цветов,* $R^* = \cup_{1 \le i \le 5, 1 \le j \le 5}(R_{\gamma_i} \cap R_{\delta_j})$, *а* $L^* = \cup_{1 \le i \le 5, 1 \le j \le 5}(L_{\gamma_i} \cap L_{\delta_j})$. *Тогда* $\min\{|R_\alpha \cap R_\beta \cap R^*|, |L_\alpha \cap L_\beta \cap L^*|\} \ge 4$.

Другими словами, ситуация отличается от описанной в двух предыдущих леммах только тем, что полустепень исхода вершины v равна 0 или 4.

Замечание 4. *Лемма 6 неулучшаема в том смысле, что существуют такие 11 попарно различных цветов* α, β, $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ *и* $\delta_1, \dots, \delta_4$, *которые оставляют на* v *лишь 3 допустимых цвета.*

2.2. **Структурные свойства минимального контрпримера.** Далее под k-*цепью* будем понимать цепь, состоящую из в точности k вершин степени 2. Обозначим через $d_0(v)$ и $d_1(v)$ количество 0-цепей и 1-цепей, инцидентных v, соответственно.

Лемма 7. $\delta(G_0) \ge 2$. $\square$

Лемма 8. *В* G_0 *нет такой* 1*-цепи* axb, *когда обе дуги* ax *и* bx *либо входят в* x, *либо выходят из* x.

Доказательство. Пусть существует 1-цепь axb, причем обе дуги при x либо входящие, либо выходящие. Удалим вершину x и гомоморфно отобразим полученный граф на $P(47)$. Если a и b получили разные цвета, то по п. 2 леммы 1 существует не менее 11 цветов, в которые можно покрасить x. А если цвета у a и b совпадают, то таких цветов по п. 1 леммы 1 — 23. $\square$

Лемма 9. *В G_0 нет ≥ 2-цепи.*

Доказательство. Пусть существует $\geq$ 2-цепь $axyb\ldots$, где $d(x) = d(y) = 2$. Удалим вершины x и y и отобразим полученный граф на $P(47)$. Пусть вершина a окрасилась в цвет α. По лемме 1, из 23 цветов, допустимых по ребру by на вершине y, выберем цвет, отличный от α и окрасим в него y. Согласно лемме 1 для вершины x имеется не менее 11 допустимых цветов. $\square$

Лемма 10. *В G_0 нет двух 1-цепей с общими концами.*

Доказательство. Пусть существуют 1-цепи axb и ayb. Удалим вершину y и отобразим полученный граф на $P(47)$. Согласно лемме 8 одна из дуг ax, bx входит в x, а другая выходит из x, следовательно вершины a и b окрасились в различные цвета ввиду замечания 1. Поэтому вершину y можно покрасить. $\square$

Лемма 11. *Пусть v — вершина в G_0, смежная хотя бы с одной 2-вершиной. Тогда*

(1) *если $d_0(v) = 0$, то $d_1(v) \geq 47$;*
(2) *если $d_0(v) = 1$, то $d_1(v) \geq 23$;*
(3) *если $d_0(v) = 2$, то $d_1(v) \geq 11$;*
(4) *если $d_0(v) = 3$, то $d_1(v) \geq 4$.*

Доказательство. Удалим все 2-вершины, смежные с v. Напомним, что согласно замечанию 1 каждая 1-цепь (которая является 2-путем по лемме 8), инцидентная вершине v, налагает 1 запрет на выбор цвета для v, поэтому утверждение леммы 11 непосредственно следует из леммы 1.

Например, рассмотрим пункт 4. Если после удаления 2-вершин все три вершины (степени не меньше 3), смежные с v, окрасились в разные цвета, то по лемме 1 для v существует не менее 4 допустимых цветов, поэтому при $d_1(v) \leq 3$ найдется допустимый цвет, отличный от цветов на концах 1-цепей, инцидентных v. Покрасив v в этот цвет, мы можем затем покрасить 2-вершины согласно п. 2 леммы 1.

Предположим теперь, что на каких-то двух вершинах u, w степени не меньше 3, смежных с v, оказался один и тот же цвет α. Поскольку вершину v мы не удаляли, ребра uv и wv ориентированы либо оба к v, либо оба от v согласно замечанию 1. Если третья вершина степени не меньше 3, смежная с v, также окрашена в α, то по п. 1 леммы 1 вершина v имеет 23 допустимых цвета, а в противном случае по п. 2 леммы 1, — 11.

Доказательство в пп. 1–3 аналогично, но проще. $\square$

Граф на рис. 1 показывает, что ограничение 4 в пункте 4 леммы 11 не допускает ослабления.

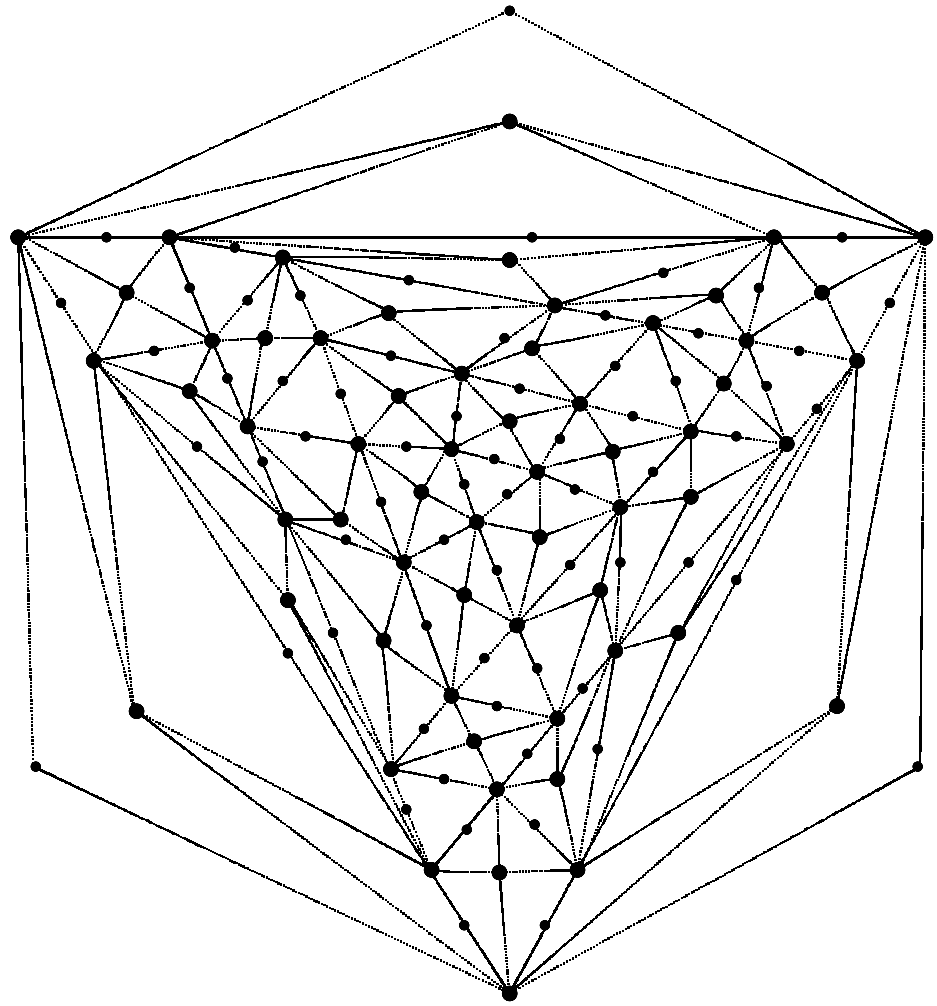

Рис. 1.

Лемма 12. *В G_0 нет 3-вершины.*

Доказательство. Согласно лемме 11 в G_0 нет 3-вершины, смежной с 2-вершиной. Пусть v — 3-вершина, смежная с $\geq$ 3-вершинами u, w, x. Если все дуги при v входящие либо все выходящие, то удаляем v и рассматриваем раскраску полученного графа. Если цвета вершин u, w, x попарно различны, то по п. 3 леммы 1 для v имеется 4 допустимых цвета, а в случае совпадения цветов на u, w, x допустимых цветов для v либо 11, либо 23.

Пусть теперь дуга из x входит в v, а из v выходят дуги в u и w. Тогда мы заменяем v и инцидентные ей ребра на пути xv_1u и xv_2w, ориентированные от x, где v_1, v_2 — вершины степени 2. Заметим, что в полученном графе тяжелых ребер меньше, чем в G_0, хотя общее число ребер больше, поэтому существует гомоморфизм c полученного графа на $P(47)$. Заметим, что $c(u) \neq c(x) \neq c(w)$. Перенесем раскраску c на G_0; теперь по лемме 1 для v существует 4 допустимых цвета если $c(u) \neq c(w)$ и 11 — в противном случае. Для других ориентаций дуг при вершине v доказательство аналогично. $\square$

Назовем вершину v *особой*, если $d_0(v) = 3$, $d_1(v) = 4$ и при v существует единственная грань вида $f = axvyc\ldots$, где x, y — вершины степени 2. Например, на рис. 1 все вершины, инцидентные в точности трем 0-цепям, являются особыми.

Назовем 6-грань *особой*, если она инцидентна трем 1-цепям. Отметим, что на рис. 1 каждая особая грань инцидентна трем особым вершинам, хотя, вообще говоря, особая вершина не обязана быть инцидентной особой грани и, наоборот, особая грань может быть не инцидентна ни одной особой вершине.

Лемма 13. *Пусть v — вершина в G_0, инцидентная 4-грани $f_4 = uvwz$, где u и w — особые вершины, а z — вершина степени 2. Тогда*

(1) *если $d_0(v) = 3$, то $d_1(v) \geq 9$;*
(2) *если $d_0(v) = 4$, то $d_1(v) \geq 4$.*

Доказательство. (1) Пусть сначала $d_0(v) = 3$, тогда по лемме 12 вершина v инцидентна хотя бы одной 2-вершине t. Удалим t и перенесем раскраску полученного графа на G_0. Обесцветим вершины u, v, w и все 2-вершины, смежные с ними.

Согласно лемме 1 вершина u имеет 11 вариантов раскраски, не противоречащих цветам двух уже окрашенных смежных с нею $\geq$ 3-вершин графа G_0. Учитывая инцидентность вершины u трем 1-цепям, ведущим в уже окрашенные вершины, мы получаем множество U цветов, допустимых для u, где $|U| \geq 11-3 = 8$. Аналогично определяется множество W мощности не менее 8. Чтобы не возникло конфликта между единственной смежной с v окрашенной вершиной x, мы вычеркнем цвет вершины x из множеств U и W. Обозначим полученные множества мощности не менее 7 через U' и W', соответственно. Ввиду наличия вершины z, мы должны выбрать для u и w по одному цвету, $c(u)$ и $c(w)$ из множеств U' и W' так, чтобы $c(u) \neq c(w)$.

Для этого выделим в U' и W' независимые подмножества U'' и W'', соответственно, мощности 3 каждое. По лемме 2 множества U'' и W'' дают по 7 запретов на выбор цвета для вершины v. Поскольку x разрешает для v не менее 23 цветов, то не менее $23 - 7 - 7 = 9$ цветов должны присутствовать на концах 1-цепей, инцидентных v. Действительно, в противном случае мы красим в допустимые цвета сначала v, затем u и w, а потом все 2-вершины, смежные с ними.

(2) Пусть теперь $d_0(v) = 4$. Обозначим через x и y отличные от u, w вершины степени не менее 3, смежные с v. Удалим 2-вершину z и перенесем раскраску полученного графа на G_0. Обесцветим вершины u, v, w и все 2-вершины, смежные с ними.

Замечание 5. *Если бы ребра uv и vw образовывали путь (uvw или wvu), то для доказательства леммы достаточно было бы покрасить вершину z, а это возможно ввиду леммы 1. Поэтому будем считать, что ребра uv и vw ориентированы либо оба к v, либо оба от v.*

В зависимости от ориентации четырех тяжелых ребер, инцидентных v, мы оказываемся в одной из трех ситуаций, описанных в леммах 4, 5, 6.

Случай 1. Оба ребра xv и yv по отношению к вершине v сориентированы иначе чем ребра uv и vw (либо первые два заходят в v, а вторые — выходят, либо наоборот).

Определим множества U и W как п. 1 настоящей леммы. Чтобы не возникло конфликта между одной из вершин x, y и одной из вершин u, w, мы вычеркнем цвета α и β вершин x и y, соответственно, из множеств U и W (в предположении, что $\alpha \neq \beta$, поскольку иначе можно воспользоваться леммой 1: пусть $\alpha = \beta$; тогда зафиксируем цвет γ из множества U, отличный от α, а затем цвет δ из W, отличный от α и γ). Обозначим полученные множества мощности не менее 6 через U' и W', соответственно. Ввиду наличия вершины z, мы должны выбрать для u и w по одному цвету, $c(u)$ и $c(w)$ из множеств U' и W' так, чтобы $c(u) \neq c(w)$.

Если $U' = W'$, то можно воспользоваться леммой 3. Действительно, если $d_1(v) \leq 3$, то мы красим в допустимые цвета сначала v, затем u и w, а потом все 2-вершины, смежные с ними.

Пусть $U' \neq W'$. Тогда выделим в U' и W' независимые подмножества U'' и W'' мощности 4 и 3, соответственно (сначала внесем в U'' элемент γ_1 из $U' \setminus W'$, а в W'' элемент δ_1 из $W' \setminus V'$; далее если в $U' \setminus \{\gamma_1\}$ и $W' \setminus \{\delta_1\}$ есть один и тот же элемент, то включаем его в U'' (а иначе уже нечего доказывать), а следующий общий элемент в оставшихся подмножествах, если таковой имеется, включаем уже в W'', и т. д.). Теперь остается воспользоваться леммой 4.

Случай 2. В точности одно из ребер xv и yv, пусть yv, сориентировано по отношению к вершине v так же, как ребра uv и vw.

Теперь мы вычеркнем из множеств U и W (напомним, что мощность каждого из них не менее 8) только цвет α вершины x. Далее, если цвет β вершины y (заметим, что $\beta \neq \alpha$) не принадлежит множеству $U \cup W$, то действуем полностью аналогично доказательству случая 1. Единственное различие возникает лишь если $|U' \cap W'| \leq 5$, т. е. нельзя воспользоваться леммой 3: тогда сначала внесем в U'' два элемента из $U' \setminus W'$, а в W'' — два элемента из $W' \setminus V'$. В конце воспользуемся леммой 5.

Предположим теперь, учитывая симметрию между U и W, что $\beta \in W$. Тогда на вершине w зафиксируем цвет β, а на вершине u — цвет из U, отличный от α и β; после чего можно воспользоваться леммой 1, т. к. одинаково окрашенные вершины y и w при одинаково направленных ребрах yv и wv можно рассматривать как одну вершину.

Случай 3. Оба ребра xv и yv сориентированы по отношению к вершине v так же, как ребра uv и vw.

Теперь конфликтов между вершинами x, y, u и w нет, поэтому если $\alpha \neq \beta$ и $\{\alpha, \beta\} \cap (U \cup W) = \emptyset$, то мы пользуемся леммой 6 в случае когда $|U \cap W| \leq 5$ (начиная построение множеств U'' и W'' с независимых троек, а потом расширяя их до независимых множеств нужной мощности), а в противном случае — леммой 3.

Вырожденные варианты разбираются, как в случае 2, с использованием леммы 1. А именно, если $\alpha = \beta$, то вершины x и y "склеиваются", а на u и w фиксируется 2 различных цвета, отличных от α. Пусть $\alpha \neq \beta$, но, скажем, $\alpha \in U$; тогда u окрашивается в α и отождествляется с x, а на w выбирается цвет, отличный от α и β. $\square$

2.3. **Правила перераспределения зарядов.** **R1**: Любая 2-вершина получает по 1 заряда от смежных вершин.

R2: Если в границе ≥ 5-грани $f = axbyc\ldots$ имеются 1-цепи axb и byc, где x, y — вершины степени 2, то вершина b получает от грани f заряд 1, если b — особая и $\frac{1}{2}$ в противном случае.

R3: Пусть особая грань f^* смежна с гранью f по 1-цепи bxc, где b и c — особые вершины. Тогда f^* получает заряд:
(i) $\frac{1}{2}$ от вершины a, если $f = abxc$ и
(ii) 1 от f, если $r(f) \geq 5$, причем в грани f имеются 0-цепи ab и cd.

2.4. **Завершение доказательства теоремы 2.** Убедимся, что после перераспределения зарядов по правилам R1–R3 новые заряды $\mu^*(f)$ и $\mu^*(v)$ всех вершин и граней становятся неотрицательными.

2.4.1. *Проверка того, что* $\mu^*(f) \geq 0$. Напомним, что исходный заряд грани f есть $\mu(f) = r(f) - 4$. Заметим, что 4-грани имеют заряд 0 и в правилах перераспределения зарядов не участвуют.

Пусть $r(f) = 5$, тогда f может отдавать заряд ≤ 1 согласно правилу R2 или R3, причем не более одного раза, так что $\mu^*(f) \geq 0$.

Пусть $r(f) = 6$, причем сначала предположим, что f — особая. Заметим, что f не может передавать 1 другой особой грани по правилу R3ii, так что может делать передачи только по правилу R2. Если f инцидентна не более чем одной особой вершине, то $\mu^*(f) \geq 6 - 4 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 \times 1 = 0$. Пусть теперь f инцидентна двум особым вершинам, b и c. Тогда f получает не менее $\frac{1}{2}$ через 1-цепь bxc по правилу R3: действительно, если с f по 1-цепи bxc соседствует грань $abxcd\ldots$, то при $a = d$ применимо правило R3i, а в противном случае из определения особой вершины следует, что $d(a) \geq 3$ и $d(d) \geq 3$, поэтому работает правило R3ii. Отсюда $\mu^*(f) \geq 6 - 4 - 2 \times 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Если же f инцидентна трем особым вершинам, то по только что приведенным причинам она получает не менее $3 \times \frac{1}{2}$ согласно правилу R3, а значит $\mu^*(f) \geq 6 - 4 - 3 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} > 0$.

Пусть теперь f — неособая, тогда если в границе f имеется две 1-цепи axb и byc, где x, y — вершины степени 2, то f отдает вершине b не более 1 по правилу R2, а остальные вершины и грани, инцидентные f, не получают ничего. Пусть в границе f нет смежных 1-цепей, тогда f отдает по правилу R3ii особым граням, смежным с ней по 1-цепям, не более 2×1, откуда $\mu^*(f) \geq 6 - 4 - 2 = 0$.

Пусть, наконец, $r(f) \geq 7$. Чтобы оценить общий расход грани f по правилам R2 и R3, распределим заряды, отдаваемые гранью f по правилам R2 и R3, следующим образом.

Заряд 1 или $\frac{1}{2}$, получаемый вершиной b от f по правилу R2, отнесем на два инцидентных грани f ребра bx и by, где $d(x) = d(y) = 2$, по $\frac{1}{2}$, если b — особая, или на одно из них в противном случае. Аналогично, заряд 1, передаваемый f через 1-цепь bxc по правилу R3, отнесем по $\frac{1}{2}$ на ребра bx и xc. Заметим, что при этом никакое ребро не может получить $\frac{1}{2}$ дважды. Если $r(f) = 7$, то ввиду нечетности все ребра грани f не могут быть инциденты 2-вершинам, поэтому $\mu^*(f) \geq 7 - 4 - 6 \times \frac{1}{2} = 0$. Во всех остальных случаях заряд грани также остается неотрицательным, т. к. $\mu^*(f) \geq r(f) - 4 - r(f) \times \frac{1}{2} = \frac{r(f)}{2} - 4 \geq 0$ при $r(f) \geq 8$.

2.4.2. *Проверка того, что* $\mu^*(v) \geq 0$. Напомним, что вершина v имеет исходный заряд $\mu(v) = d(v) - 4$.

Если $d(v) = 2$, то v получает $2 \times \frac{1}{2}$ по правилу R1, откуда $\mu^*(v) = 0$. В дальнейшем, ввиду леммы 12, будем считать, что $d(v) \geq 4$, .

Если $d_0(v) = 0$, то $d_1(v) = d(v) \geq 47$ ввиду леммы 11, следовательно v получит от инцидентных ей граней заряд, не меньший $47 \times \frac{1}{2}$ и ничего не отдает по правилу R3i, откуда ввиду правил R1, R2 имеем $\mu^*(v) \geq d(v) - 4 - d(v) + 47 \times \frac{1}{2} > 0$. Аналогично, если $d_0(v) = 1$, то $d_1(v) \geq 23$, поэтому v получит от инцидентных ей граней заряд, не меньший $22 \times \frac{1}{2}$ (поскольку при наличии лишь одной 0-цепи имеется $d_1(v) - 1$ пар соседних 1-цепей при вершине v), и также ничего не отдает по правилу R3i, следовательно $\mu^*(v) \geq d(v) - 4 - (d(v) - 1) + 22 \times \frac{1}{2} > 0$; если же $d_0(v) = 2$, то $d_1(v) \geq 11$, при v имеется не более $d_1(v) - 2$ пар соседних 1-цепей, и вершина v может делать не более одной передачи по правилу R3i, откуда $\mu^*(v) \geq d(v) - 4 - (d(v) - 2) + 9 \times \frac{1}{2} - 1 > 0$.

Пусть теперь $d_0(v) = 3$. Если v — особая, то ее исходный заряд был $\mu(v) = d(v) - 4 = 3$, она отдает 4 единицы заряда по правилу R1 вершинам степени 2 и получает заряд 1 от особой грани по правилу R2, откуда $\mu^*(v) = 0$.

Заметим, что неособая вершина v не может делать более чем $\frac{d_0(v)}{2}$ передач заряда $\frac{1}{2}$ особым граням по правилу R3i т. к. никакая особая вершина не может быть инцидентна двум особым граням.

Итак, пусть v — неособая вершина с $d_0(v) = 3$. Напомним, что после применения правила R1 ее заряд стал -1. По лемме 11 имеем $d_1(v) \geq 4$, а так как v неособая, то получает два раза по $\frac{1}{2}$ по правилу R2. Если v не делает передач по правилу R3i, то отсюда уже следует, что $\mu^*(v) \geq 0$; если же делает, то не более одной передачи ввиду только что сделанного замечания, но тогда $d_1(v) \geq 9$ по лемме 13, откуда $\mu^*(v) \geq -1 - 1 \times 1\frac{1}{2} + (9 - 3) \times \frac{1}{2} > 0$.

Пусть теперь $d_0(v) = 4$. Если v не фигурирует в правиле R3i, то $\mu^*(v) \geq d(v) - 4 - d_1(v) = 0$. Если v делает хотя бы одну передачу по правилу R3i, то $d_1(v) \geq 4$ согласно лемме 13, но таких передач делается не более $\frac{d_0(v)}{2} = 2$. Если такая передача ровно одна, то ввиду того, что при v имеется 4-грань (через которую совершается эта передача), при v существует и пара соседних 1-цепей, поэтому v получает $\frac{1}{2}$ согласно правилу R2, откуда $\mu^*(v) \geq d(v) - 4 - d_1(v) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Если же таких передач две, то пар соседних 1-цепей тоже две, поэтому $\mu^*(v) \geq d(v) - 4 - d_1(v) - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Рассмотрим случай $d_0(v) = 5$. Поскольку v может делать не более $\lfloor \frac{d_0(v)}{2} \rfloor = 2$ передач по правилу R3i, имеем $\mu^*(v) \geq d(v) - 4 - d_1(v) - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Наконец, если $d_0(v) \geq 6$, то $\mu^*(v) \geq d(v) - 4 - (d(v) - d_0(v)) - \frac{d_0(v)}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3d_0(v) - 16}{4} > 0$.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] O.V. Borodin, *On acyclic colorings of planar graphs*, Discrete Math. **25** (1979), 211–236.

[2] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud, and E. Sopena, *On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph*, Discrete Mathematics **206** (1999), 77–90.

[3] O.V. Borodin, S.-J. Kim, A. V. Kostochka, and D.B. West, **Homomorphisms from sparse graphs with large girth**, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **90** (2004), 147–159.

[4] О.В. Бородин, А.О. Иванова, А.В. Косточка, *Ориентированная 5-раскраска разреженных графов*, в печати.

[5] B. Courselle, *The monadic second order logic of graphs VI: On several representations of graphs by relational structures*, Discrete Appl. Math. **54** (1994), 117–149.

[6] J. Nešetřil, A. Raspaud, and E. Sopena, *Colorings and girth of oriented planar graphs*, Discrete Math. **165–166**:(1–3) (1997), 519–530.

[7] P. Ochem, *Oriented colorings of triangle-free planar graphs*, Inf. Process. Lett., **92**(2) (2004), 71-76.

[8] A. Raspaud and E. Sopena, *Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs*, Inf. Processing Letters **51** (1994), 171–174.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `brdnoleg@math.nsc.ru`

Иванова Анна Олеговна
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского 48,
677000, Якутск, Россия
E-mail address: `shmgnanna@mail.ru`